

優先関係グラフを利用した隠面消去アルゴリズム†

—キープレーンによるループの解除—

安居院 猛‡ 高木志郎‡‡ 中嶋正之‡

隠面、隠線消去アルゴリズムにおける優先法の特徴は、優先順位が定まれば、スクリーン上で、その順位に従い重ね書きを行う簡単な処理で実行できる点である。しかし問題点は、環境を構成するすべての要素に対し、いかに優先順位を求めるかであり、多くの方式が提案されている。本論文では、優先法に属する隠面消去アルゴリズムとして、多角形から構成される物体を基本要素とした場合の優先関係から優先グラフを求め、優先順位を定める方式について示す。従来の優先法におけるループをなす場合の計算機による自動解除方法を示す。

1. まえがき

従来の隠線・隠面消去（以下隠面消去と略す）処理は、次の三つに大分類される¹⁾。

- (i) 物体空間法 (method in object-space)
- (ii) 像空間法 (method in image-space)
- (iii) 優先法 (method in list-priority)

(i)の物体空間法は、環境を構成する要素のどの部分がどの部分によって隠されるかという判定を三次元空間上で行う方法であり^{2),3)}、(ii)の像空間法は、判定を、物体を投影するスクリーンを基にして行う方法である^{4),5)}。(iii)の優先法は、環境を構成する要素に対して、視点からの見えやすさを示す優先順位を求め、優先順位の低い順に要素をスクリーン上で重ね書きし、隠面消去を行う方法で、以下の方式が提案されている。

Schumacker による方法¹⁾は、最初に大まかな物体の優先順位を求め視点が離面のどちら側にあるかを調べる方法であるが、多くの処理に人間の介在が必要であり、任意の物体に対しては必ずしも優先順位が定まらない。Newell による方法⁶⁾は、すべての2個の多角形の組合せに対する優先順位を求め、最後に一意な優先順位を決定する方式であるが、視点が変わることに、すべての処理を最初からやり直さなければならぬという問題点がある。Fuchs^{7),8)}の方法は、Schu-

macker の方法において、人間が介在していた部分をある程度計算機に行わせるものであり、多角形の分割処理を提案したが、未解決な問題が残されている。これらに関連する研究に文献9)がある。その他優先順位を定める各種方式が提案されている^{11),12)}。

本論文では、人間の介在なく、自動的に優先順位を定め隠面処理を行う計算機アルゴリズムについて示す。

2. 優先関係について

初めに本論文で使用する優先関係の求め方および使用する記号について示す。

2.1 多角形間の優先関係

一般に二つの多角形間の優先関係は、次の四つに分類され、視点には依存せず一意に定まる。

- (i) 一方の多角形の可視平面¹⁰⁾上のすべての点が、他の多角形の可視面上のすべての点を隠すことが可能な場合。図1(a)は、 P_1 が P_2 をすべて隠せる例であり、 $P_1 \rightarrow P_2$ と表す。
- (ii) 一方の多角形の可視面上のすべての点が、他の多角形の可視面を部分的に隠すことができる場合、または、一方の多角形の可視面の一部分が他の多角形の可視面をすべて隠すことができる場合。図1(b)は前者の例であり、(b)'は後者の例である。ともに $P_1 \rightarrow P_2$ と表す。
- (iii) 2個の多角形の可視面が、互いに、部分的に隠すことができる場合。図1(c)は、 P_1 と P_2 が互いに部分的に隠すことができる例であり、 $P_1 \leftrightarrow P_2$ と表す。
- (iv) 2個の多角形の可視面がともに、他の多角形の可視面を隠すことができない場合。図1(d)、(d)'は、その例であり、 $P_1 \sqsubset P_2$ と表す。

† An Hidden Surface Removal Algorithm by Priority Relation Graph—A Method Opening Loops by Key Planes by TAKESHI AGUI (Imaging Science and Engineering Lab., Tokyo Institute of Technology), SHIROU TAKAGI (Toshiba Corporation, Toshiba Research and Development Center) and MASAYUKI NAKAJIMA (Imaging Science and Engineering Lab., Tokyo Institute of Technology).

‡ 東京工業大学工学部情報工学研究施設
‡‡ 東京芝浦電気(株)総合研究所

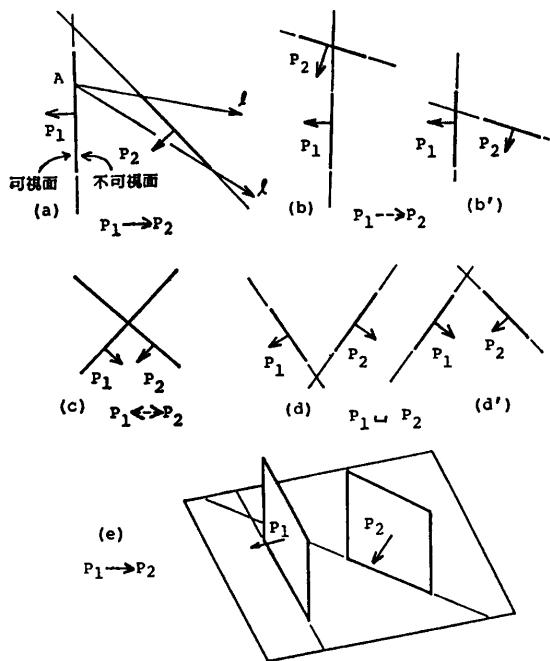


図 1 多角形間の優先関係

Fig. 1 Priority order among polygons.

表 1 条件 A, B による優先関係の分類
Table 1 Classification of priority relations by conditions A and B.

		B	$\forall i$	$\exists i$	no
		A	$P_1 \sqsubset P_2$	$P_1 \rightarrow P_2$	$P_1 \leftarrow P_2$
A	$\forall j$	$P_1 \sqsubset P_2$	$P_1 \rightarrow P_2$	$P_1 \leftarrow P_2$	
	$\exists j$	$P_2 \rightarrow P_1$	$P_1 \leftrightarrow P_2$	$P_1 \rightarrow P_2$	
	no	$P_2 \rightarrow P_1$	$P_2 \rightarrow P_1$	$P_1 \sqsubset P_2$	

2 個の多角形 P_1 と P_2 間の優先関係が前述の四つのどの場合に属するかは、次の条件 A, B により定められる。

(条件 A) 多角形 P_1 の平面関数 f_1 に多角形 P_2 を構成する頂点 V_{2j} ($j=1$ to n_2 : n_2 =多角形 P_2 の頂点数) を代入し、次式が成立。

$$f_1(V_{2j}) < 0 \quad (1)$$

(条件 B) 多角形 P_2 の平面関数 f_2 に多角形 P_1 を構成する頂点 V_{1i} ($i=1$ to n_1 : n_1 =多角形 P_1 の頂点数) を代入し、次式が成立。

$$f_2(V_{1i}) < 0 \quad (2)$$

さらに、多角形 P_1 が P_2 を隠すことができるかを調べるには次の条件 C を満たせばよいことになる。

$$(条件 C) (\exists i, f_2(V_{1i}) > 0) \cap (\exists j, f_1(V_{2j}) < 0) = 1 \quad (3)$$

条件 C を満足するときは、多角形 P_1 は P_2 を隠すことができ、 $P_1 \rightarrow P_2$ または $P_1 \leftarrow P_2$ である。表 1 に示す優先関係の表（優先関係の決定）は、条件 A, B のみで求まる。すなわち $\forall i$ (すべての i に対して真) か、 $\exists i$ (ある i に対してのみ真) か、no (すべての i に対して偽) の 3 種類を条件 A, B に対して成立するか否かを調べることにより求まる。したがって条件 C は、 P_1 が P_2 を隠すことができるか否かの決定のみに使用される。

また、 P_1 と P_2 を交換した場合も条件 C を満たせば、 $P_1 \leftrightarrow P_2$ を意味し、2 回とも条件 C を満たさない場合は $P_1 \sqsubset P_2$ を意味する¹⁰⁾。

なお図 1 (a)～(d) は、2 次元平面での簡易表現であり、たとえば図 1 (a) は、3 次元表現すると図 1 (e) の様子を示したものである。以下本論文では、この簡易表現を利用することにする。

2.2 物体間の優先関係

次に物体間の優先関係について示す。先に述べた多角形間の関係 $\rightarrow, \leftrightarrow, \sqsubset$ を、たんに隠すか隠されるかの関係とみなすと、同様にして、多角形から構成される物体間の関係として拡張することができる。ただし、この場合は、視点に依存した関係となる。

(1) 1 枚の分離面による優先関係

図 2 (a) のように、物体 B_1, B_2 、分離面 SP が存在し、物体 B_1, B_2 は分離面 SP の + 側に物体 B_1 が存在し、一側に物体 B_2 があるとき、物体 B_1 と B_2 は分離面 SP により分離されていると呼ぶ。これを式で表現すると次式となる。

$$(\forall i, SP(V_{1i}) \geq 0) \cap (\forall j, SP(V_{2j}) \leq 0) = 1 \quad (4)$$

V_{1i} : 物体 B_1 を構成する頂点 ($i=1$ to n_1)

V_{2j} : 物体 B_2 を構成する頂点 ($j=1$ to n_2)

視点が図 2 (a) に示すように、分離面 SP の + 側の点 E_1 に存在すると仮定すると、点 E_1 から延びる半直線（視線）は、物体 B_1 を交差後、物体 B_2 を交差することがあるが、逆に、物体 B_2, B_1 の順に交差することはない。つまり $SP(E_1) > 0$ が成立立てば、視点 E_1 から見て、物体 B_1 が物体 B_2 を隠すことがあるが、逆に、物体 B_2 が B_1 を隠すことがない。このとき、 B_1 と B_2 の優先関係を $B_1 \rightarrow B_2$ と表す。また視点が E_2 のときには、 $SP(E_2) < 0$ となり、 $B_2 \rightarrow B_1$ となる。

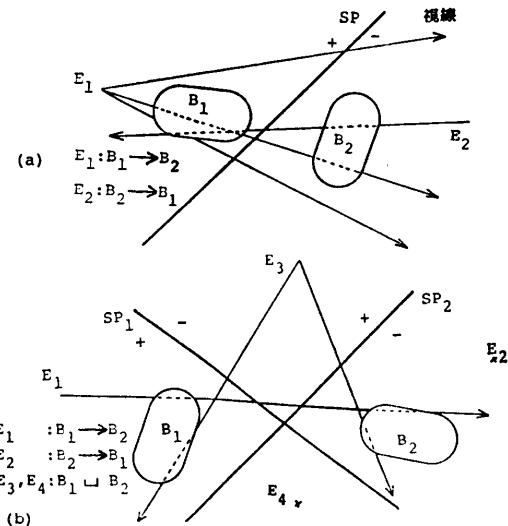


図 2 物体間の優先関係

Fig. 2 Priority order among objects.

(2) 2枚の分離面による優先関係

図2(b)のように、2個の物体 B_1, B_2 を異なる2枚の分離面 SP_1 と SP_2 が分離する場合を考える。2枚の分離面により、空間は四つに分けられ、分離面 SP_1 による優先関係と分離面 SP_2 による優先関係を、図2(b)中 $E_1 \sim E_4$ の四つの空間に視点がある場合に対して調べると次のようになる。

- (i) $SP_1: B_1 \rightarrow B_2, SP_2: B_1 \rightarrow B_2$ (視点 E_1)
- (ii) $SP_1: B_2 \rightarrow B_1, SP_2: B_2 \rightarrow B_1$ (視点 E_2)
- (iii) $SP_1: B_2 \rightarrow B_1, SP_2: B_1 \rightarrow B_2$ (視点 E_3)
- (iv) $SP_1: B_1 \rightarrow B_2, SP_2: B_2 \rightarrow B_1$ (視点 E_4)

ここで注意するのは(iii)と(iv)の場合である。 SP_1 による優先関係と SP_2 によるものが逆になっている。これは分離面 SP_2 に対して物体 B_2 の反対側にある点 E_3 から延ばした半直線が、先に物体 B_1 と交差することができ、そのときには物体 B_2 は分離面 SP_1 に対して反対側（たとえば+側に対し-側）にあり、物体 B_2 と交差できないことを示す。視点が E_4 のときも同様である。これを $B_1 \sqsubset B_2$ と表す。これより次の性質が求まる。

[性質1] 2個の物体 B_1, B_2 が異なる2枚の分離面により分離され、それぞれの分離面に対する優先関係が $B_1 \rightarrow B_2, B_2 \rightarrow B_1$ の場合、物体 B_1 と B_2 の優先関係は $B_1 \sqsubset B_2$ となる。

[性質1]は、3枚以上の分離面に対しても適用される。

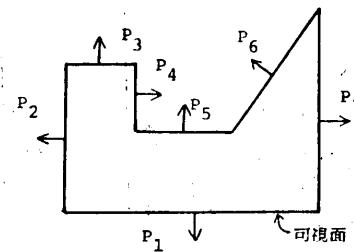


図 3 環境内の多角形

Fig. 3 A polygon in an environment.

表 2 図3に対する優先表

Table 2 The priority table for an object shown in Fig. 3.

I	J	1	2	3	4	5	6	7
1					p	p		
2					p	a		
3					a	p		
4								
5								
6								
7							p	a

3. 優先順位について

3.1 多角形の優先順位

3.1.1 優先表

電子計算機を用いて環境内の多角形の優先関係を決定するために優先表 (priority-list) を導入する。優先表は、多角形数 n に対し、 n 行 n 列の行列表現となつておる、たとえば図3に示す多角形 $P_1 \sim P_7$ に対しては、表2のように与えられる。この表において、 I 行 J 列に相当する場所における “ a ” (all) は、 $P_I \rightarrow P_J$ を表し、“ p ” (part) は $P_I \rightarrow P_J$ を表す。また I 行 J 列および J 行 I 列が空白である場合は $P_I \sqsubset P_J$ を表す。そして I 行 J 列および J 行 I 列に “ p ” が存在する場合は $P_I \leftrightarrow P_J$ を表す。

優先表から次の二つの性質が導入される。

[性質2] I 行がすべて空白ならば、多角形 P_I が隠すことができる多角形は存在せず、 P_I は最も低い優先順位をもつ。

[性質3] J 列がすべて空白ならば、多角形 P_J を隠すことができる多角形は存在せず、 P_J は最も高い優先順位をもつ。

優先表に対し[性質2]を適用し、多角形を優先順位の低い順に決定する計算機アルゴリズムを示すフローチャートを図4に示す。ここでは、優先順位の低い順に、多角形をスタックに格納している。たとえば表2

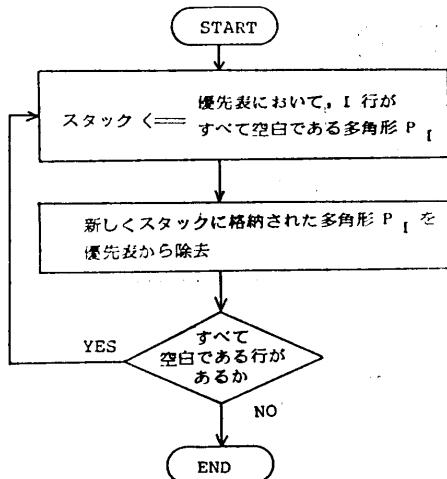


図 4 優先順位の低い順に多角形を決定する方法

Fig. 4 A method determining the low-priority order among polygons.

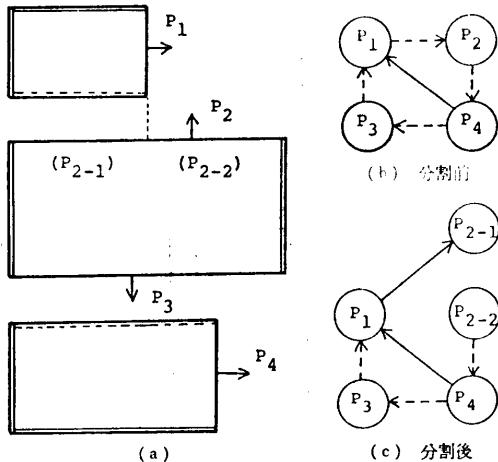


図 5 分割によりループが解ける例

Fig. 5 An example of opening loops by dividing objects.

の多角形に対しては、最初に、 P_4, P_5, P_6 が最も低い順位をもつものとして決定され、これらの多角形を隠すことを示す記号 (4, 5, 6 列中の “a” と “p”) を消す。次に多角形 P_1, P_2, P_3 が決定され、最後に P_7 が決定される。

一方、優先表に対し、【性質 3】を適用し、多角形を優先順位の高い順に決定するアルゴリズムは、図 4 の I 行を J 列に、多角形 P_I を多角形 P_J に、行を列に変更すればよいことになる。

3.1.2 ループの解除

図 3 に示した例では、多角形の優先順位の高い順に決定すると、

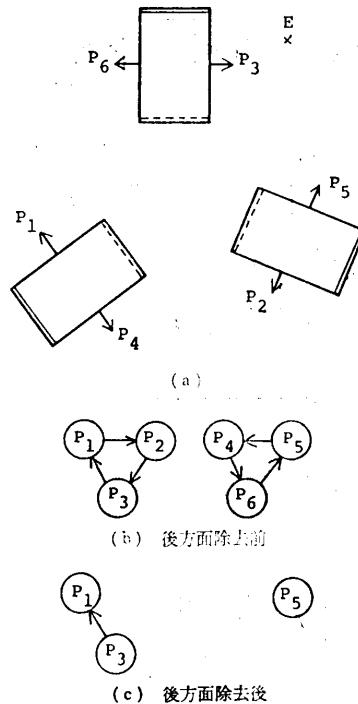


図 6 視点の決定によりループが解ける例

Fig. 6 An example of opening loops by fixing view point.

3: P_1, P_2, P_7 , 2: P_3, P_4 , 1: P_5, P_6

となり、低い順位との組合せにより、環境内のすべての多角形の隠面処理に必要な優先順位が決定される。しかし、一般的には、決定できない例が多く存在し、この状態をループをなすとよぶ。そこでループを解く三つの技法を示す。

(1) ケース 1

図 5 (a)において \rightarrow と \leftarrow で示す多角形は、【性質 2】と【性質 3】をそれぞれ適用し、優先順位が高い順に、または低い順に決定されたことを示す。これら以外の多角形に対する優先関係をグラフ的に表現すると (b) のようになる。多角形 P_1, P_2, P_4 と、 P_1, P_2, P_4, P_3 がループをなしていることがわかる。ここで P_1 は P_2 を部分的に隠している。この場合は、 P_2 を P_1 を含む平面で切断し、 P_{2-1} と P_{2-2} に分割するとループが解けることになる。図 5 (c) は分割後のグラフ表現である。

(2) ケース 2

図 6 (a) に示す多角形に対するグラフ表現は (b) のようになりループをなしていることがわかる。この例では、ケース 1 のように部分的に隠す優先関係が存在しないため分割により解けない。この場合は視点の決

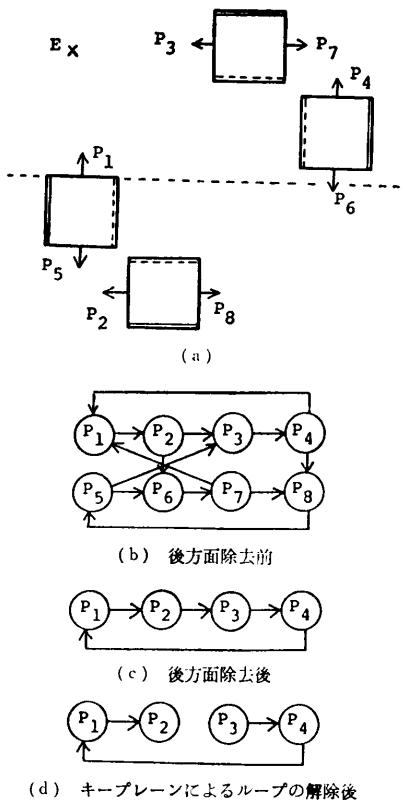


図 7 キープレーンによるループの解除例
Fig. 7 An example of opening loops by using key plane.

定によりループを解く。たとえば図6(a)において視点が点\$E\$に存在すると仮定すると前方面となる多角形は\$P_1, P_3, P_5\$だけであり、後方面(負面とも呼ぶ)を除去すればループは解け優先順位は次のように決定される。

$$1: P_1, P_5, \quad 2: P_3$$

(3) ケース 3

図7(a)に示す環境内の優先関係が一意に定まっていない多角形のグラフ表現を(b)に示す。この場合は、ケース1のように分割を行うことができずさらに、視点が図7(a)の\$E\$点に存在するときは、\$P_1, P_2, P_3, P_4\$が前方面となり、これらは(c)のようにループをなす。

優先関係“\$\rightarrow\$”は隠すことが可能ということを示し、スクリーン上で隠すということは2個の多角形がスクリーン上で交差することである。一般に、2個の多角形の交差を調べることは複雑である。そこで、“物体の優先関係”的考え方を利用して次のようにループを解く。

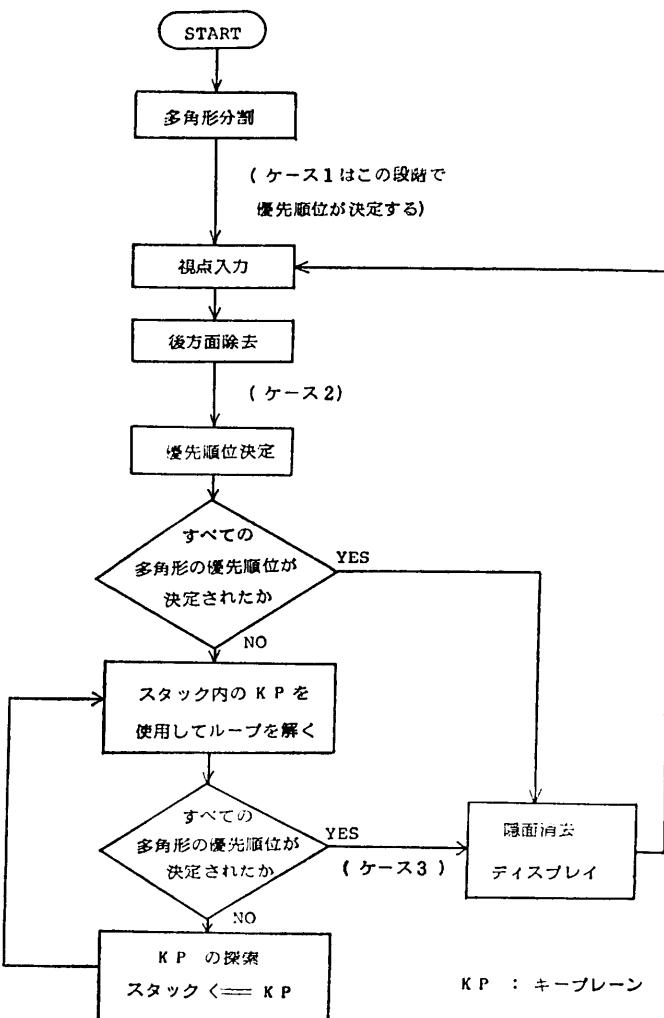


図 8 計算機を用いた自動優先順位決定のフローチャート
Fig. 8 A flow chart of obtaining priority order automatically.

図7(a)において\$P_1\$を含む平面を分離面として考え、空間を二つに分割する。\$P_3\$と\$P_4\$は視点と同じ空間にあり、\$P_2\$は反対側の空間に存在する。つまり反対側にある\$P_2\$は視点側にある\$P_3, P_4\$を隠すことができないことが判明する。そこで図7(c)の\$P_2\$から\$P_3\$へ向かう“\$\rightarrow\$”を除去することができる、(d)のようになり、優先順位は次のように決定される。

$$1: P_2, 2: P_1, 3: P_4, 4: P_3$$

ループを解くときに使用する分離面をキープレーン(key plane)とよび、次に述べるように容易にキープレーンの設定を行うことができる。

3.1.3 優先順位決定アルゴリズム

ループを解く処理を含めた多角形の優先順位を決定する計算機アルゴリズムを図8に示す。

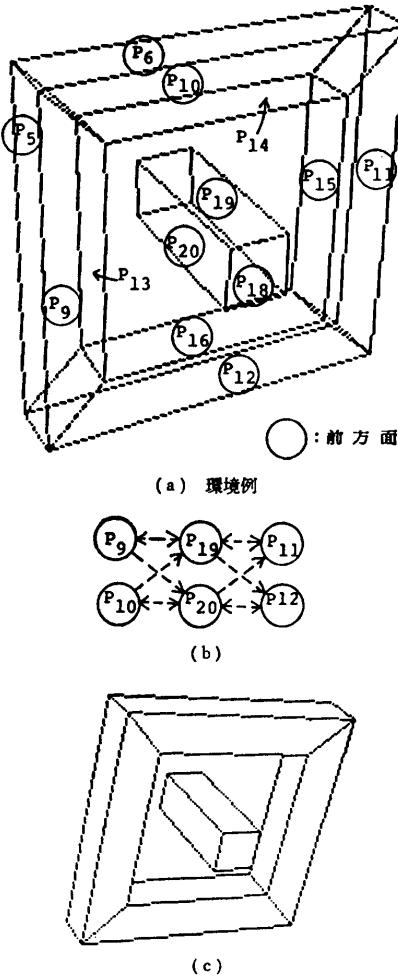


図 9 キープレーンによる隠面消去の例
Fig. 9 An example of hidden surface removal by key plane.

キープレーンの探索は、ループをなす場合の処理において、多角形分割、後方面除去後も一意な優先順位が決定されないときに行われ、探索されたキープレーンはスタック内に格納しておく。このため、視点が一度通った近傍においては、スタック内のキープレーンが有効となり、多くの異なる視点に対して優先順位を決定することに、処理の効率が向上する。

キープレーン探索は、環境内の多角形を含む平面を候補として行う。環境内の多角形は物体を構成し、閉じているため、ほとんどの場合、この候補の中にループを解くキープレーンが存在する。

3.1.4 キープレーンの使用例

図 9 は、多角形の分割を行わずに、キープレーンによるループの解除を使用することで優先順位が決定された例である。この場合、 P_5, P_6, P_{18} には高い優先

表 3 キープレーンによるループの解法
Table 3 Loop opening by key planes.

No.	KP	除去された優先関係	抽出された多角形
1	-13	$P_1 \cdots P_9$	
2	-14	$P_{10} \cdots P_{19}$	
3	+15	$P_{11} \cdots P_{19}$	P_{11}
4	+16	$P_{12} \cdots P_{20}$	P_{12} P_{19}, P_{20} P_9, P_{10}

KP: Key Plane

順位が与えられ、 P_{15}, P_{16} には低い順位が与えられる。他の優先順位の決定されない多角形に対する優先関係のグラフを図 9 (b) に示す。キープレーンを探索し、優先順位の低い順に、多角形を決定した結果を表 3 に示す。キープレーン (KP) の列は、分離面として選択された多角形の番号であり、“+”は視点がその多角形の前面側にあるとき、隣に書いた優先関係が除去されることを示し、“-”は視点が後方面側にあるとき、優先関係が除去されることを示している。

この例では、四つのキープレーンにより、すべての多角形の優先順位が一意に決定されている。隠面消去された図を (c) に示す。

3.2 物体の優先順位

3.1 節で示した多角形の優先順位と同様にして、物体間の優先順位を定める。

3.2.1 分離面の決定

多角形から構成される物体の優先順位を決定するためには、あらかじめ、物体間の分離面が求められていないければならない。環境内の任意の 2 個の物体に対し、重なりがなく、線形分離が可能であると仮定すれば分離面の決定は次のようにして行われる。

- (1) 2 個の物体を構成するすべての多角形に対し、その多角形を含む平面が 2 個の物体を分離するか調べる。
- (2) (1) の処理で分離面が求まらないときは、1 個の物体上の頂点と、他方の物体上の稜線からなる三角形を考え、その三角形を含む平面を分離平面の候補とする。頂点と稜線から求まる平面から分離面が求まらない場合は、さらにすべての頂点と他方の物体上の 2 点の組合せについて、この平面が分離面となるか調べる。2 個の物体が線形分離であれば、これらの平面の中に、必ず分離面が存在する。

多くの場合が(1)の処理で分離面を求めることがで

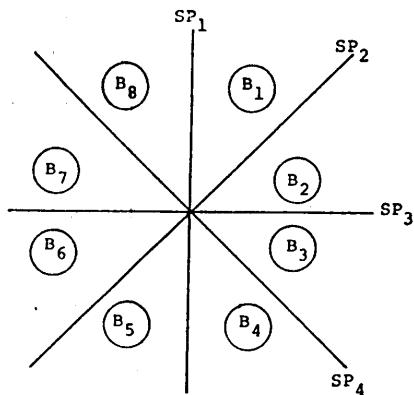


図 10 分離面決定の理想的なケース

Fig. 10 An ideal case of determining separate planes.

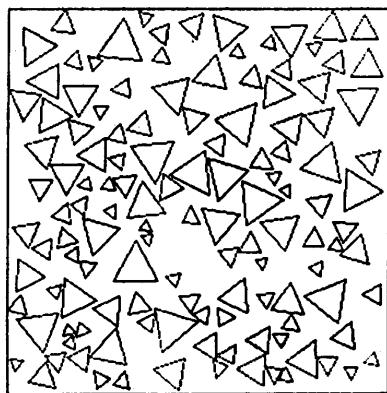
図 11 分離面数を求めるときに使用したデータ ($n=122$)

Fig. 11 An example data of obtaining the number of separate planes. ($n=122$)

きる。線形分離が不可能な場合も含めた分離面決定は次のように行う。まず注目する2個の物体に対し前述の(1), (2)の処理を行う。ここで分離面が決定されたら処理を終わる。決定されない場合は、1個の物体を構成する多角形を含む平面のなかで、他方の物体と交差する平面を選び、物体を分割し、分割された物体に対し、再度(1), (2)の処理を行う。分割された物体の任意の2個の組合せに対して、分離面がすべて決定されるまで処理を行う。

3.2.2 分離面の総数

物体の数が増加すれば、当然分離面数も増加する。ただし分離面数とは、各物体を分離する最少限の分離面の数とする。環境内に n 個の線形分離可能な物体が存在するとしたら、任意の2個の物体のすべての組合せに対し、分離面を求めるとき、その数は nC_2 となる。しかし、図 10 に示す理想的な場合は、分離面の数が

表 4 分離面数を求めた結果の例

Table 4 The number of separate planes for that of objects.

物体数 n	nC_2	分離面数
4	6	3
8	28	5
16	120	12
32	496	23
64	2,016	54
127	8,001	113

$n/2$ となり、このことから分離面の数は、物体数に比例すると予測される。図 11 は、二次元的に三角形の大きさと位置と傾きを乱数を用いて定め、重ならないように配置したものである。この物体数を4個から127個まで変化させて、すべての物体が分離されるまで、ランダムに分離面を選択して、分離面の数を計算機により求めた結果を表 4 に示す。これより、隠面消去処理に使用する分離面の数は、ほぼ物体数に比例することがわかる。

任意の物体間の分離面を決定し、互いに隠し合うループが存在するときは 3.1.2 項で示した方式を適用し、ループを解くことにより一意な物体間の優先順位が決定される。

4. む す び

複数の基本要素が互いに隠しあい、一意の優先順位を求めることが不可能な場合に対し、多角形の分割、後方面の除去およびキープレーンによるループの解除について示した。本方式により、任意の複数物体に対しても優先順位が定まり、かつ優先関係を求める際に使用する分離面の総数が、たかだか物体数に比例することを確認した。本方式は、西田らが提案した方式¹¹⁾(最終的な優先順位がスクリーン上の輪郭線どうしの交点を用いてその前後関係の判定を利用する方式)とは異なり、すべて物体空間上で優先順位を求める特徴としている。

現在、本アルゴリズムは PL/I 言語によりプログラミングされ、視点および複数の立体がさまざまに変化するコンピュータ・アニメーションの作製に使用している。

謝辞 热心に検討され、筆者らの論文内容をより正確かつ有意義となるよう、ご指導下さいました査読委員にお礼申し上げます。

参考文献

- 1) Sutherland, I. E., Sproull, R. E. and Schumacker, P. A.: A Characterization of Ten Hidden Surface Algorithms, *Comput. Surv.*, Vol. 6, No. 1, pp. 1-55 (1974).
- 2) Roberts, L. G.: Machine Perception of Three Dimensional Solids, MIT Lincoln Lab., TR 315 (1963).
- 3) Weiler, K. and Atherton, P.: Hidden Surface Removal Using Polygon Area Sorting, *ACM Comput. Gr.*, Vol. 11, No. 3, pp. 214-222 (1977).
- 4) 山口富士夫: コンピュータディスプレイによる図形処理工学, 第5章, 日刊工業新聞社, 東京 (1981).
- 5) Franklin, W. R.: A Linear Time Exact Hidden Surface Algorithm, *ACM Comput. Gr.*, Vol. 14, No. 3, pp. 117-123 (1980).
- 6) Newell, M. E., Newell R. G. and Sancha, T. L.: A New Approach to The Shaded Picture Problem, *Proc. ACM Nat. Conf.*, pp. 443-450 (1972).
- 7) Fuchs, H. and Kedem, Z. M.: Predicting Visibility Priority in 3-D Scene, *ACM Comput. Gr.*, Vol. 13, No. 2, pp. 175-181 (1979).
- 8) Fuchs, H., Kedem, Z. M. and Naylor, B. F.: On Visible Surface Generation by a Priori Tree Structures, *ACM Comput. Gr.*, Vol. 14, No. 3, pp. 124-133 (1980).
- 9) 千代倉, 大野: 面の上下リストを持った隠面消去アルゴリズム, 情報処理学会第21回全国大会, pp. 601-602 (1980).
- 10) 安居院, 高木: 正負面を持つ多角形を用いた隠面消去, 信学会情報システム部門大会, No. 670 (1981).
- 11) 西田, 藤井, 中前: 優先順位を用いた三次元物体の陰影表示の一手法, コンピュータグラフィックス研究会 5-1 (1982).
- 12) Yao, F. F.: On the Priority Approach to Hidden-Surface Algorithm, 21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (1980).

(昭和57年9月13日受付)

(昭和58年2月14日採録)