激しい振動積分の自動積分法†

長谷川 武光†† 鳥居 達生†††

滑らかな関数 $f(x)$ に対する有限フーリエ積分 $\int_a^b f(x)e^{i\omega x}dx$ の能率的な自動積分法を示す．関数 $f(x)$ が滑らかであると，$f(x)$ のチェビシェフ級数展開は収束が速いので，この展開を行いかつ項別積分する．おのおのの項別積分の値は展開の次数に関するある非同次３項漸化式の最小解であることが知られている．従来，この最小解を要求精度で安定にかつ能率的に求めることが困難とされていた．本論文では，この困難を克服するとともに，通常の項数が倍々と増大する FFT（高速フーリエ変換）の代りにより緩やかに増大する FFT を用いてチェビシェフ展開を計算することにより，要求精度に対し無駄な標本数の節減を図った．数値実験の結果，本方法は効率の高い自動積分法であることが示される．

1. はじめに

有限フーリエ積分

$$\begin{aligned} I_c&=\int_a^b f(x)\cos 2\pi\omega x dx \\ I_s&=\int_a^b f(x)\sin 2\pi\omega x dx \end{aligned} \qquad (1)$$

の近似値を求める問題は，工学や物理の分野でしばしば生ずる．ここで(1)の両者を区別するとき，それぞれ(有限) cosine 積分，sine 積分と呼ぶことにする．

さて，振動数ωの値が大きいとき，被積分関数が激しく振動するので通常の数値積分法ではこの問題を扱えない．特別の手法が必要となる．このために工夫された方法として Filon の方法[1]が有名である．この方法は $f(x)$ の区分的２次補間に基づいているという点で通常のシンプソン則に対応する．したがって，その性能はシンプソン則と同程度でしかない．

関数 $f(x)$ の滑らかを仮定すると $f(x)$ のチェビシェフ級数展開は収束が速い[2]．そこでこの展開を FFT を用いて行い，項別積分することが能率的な積分法を作る一つの手段となる．以下では cosine 積分 I_c についてのみ考える．sine 積分の場合もまったく同様に扱えるからである．積分区間$[a,b]$を１次変換により$[-1,1]$に移すと(1)の I_c は

$$I_c=\alpha\left\{\int_{-1}^{1} F(t)\cos\xi t dt\cos\eta - \int_{-1}^{1} F(t)\sin\xi t dt\sin\eta\right\} \qquad (2)$$

ここで，$F(t)=f(\alpha t+\beta)$, $\alpha=(b-a)/2$, $\beta=(b+a)/2$, $\xi=2\pi\alpha\omega$ および $\eta=2\pi\beta\omega$ である．補間法に基づくチェビシェフ多項式 $T_n(t)$ による $F(t)$ の展開，すなわち(有限)チェビシェフ級数

$$P_N(t)=\sum_{n=1}^{N}{}'' A_n^N T_n(t) \qquad (3)$$

を(2)の右辺の $F(t)$ に代入し，項別積分すると cosine 積分 I_c の近似値

$$I_c^N=\alpha\left\{\sum_{n=0}^{N/2}{}'' A_{2n}^N C_{2n}\cos\eta - \sum_{n=1}^{N/2} A_{2n-1}^N S_{2n-1}\sin\eta\right\} \qquad (4)$$

をうる．ここで，(3),(4)における和$\sum''$は初項と末項のみ 1/2 倍して総和することを意味する．上式(4)の重み係数 C_{2n}, S_{2n-1} は，それぞれ

$$\begin{aligned} C_{2n}&=\int_{-1}^{1} T_{2n}(t)\cos\xi t dt \\ S_{2n-1}&=\int_{-1}^{1} T_{2n-1}(t)\sin\xi t dt \end{aligned} \qquad (5)$$

で定義される一種のモーメントであり，別々に非同次３項漸化式

$$a_n y_{n-1}+b_n y_n+c_n y_{n+1}=d_n \qquad (6)$$

を満足することが知られている[3]．ここで $y_n=C_{2n}$ に対しては

$$\begin{aligned} a_n&=(2n+1)(n+1)\xi^2 \\ b_n&=4(n^2-1)(8n^2-2-\xi^2) \\ c_n&=(2n-1)(n-1)\xi^2 \\ d_n&=12\xi\sin\xi-16(n^2-1)\cos\xi \end{aligned} \qquad (7)$$

一方，$y_n=S_{2n-1}$ に対して

† Automatic Integration of Rapidly Oscillatory Functions by TAKEMITSU HASEGAWA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Fukui University) and TATSUO TORII (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 福井大学工学部情報工学科

††† 名古屋大学工学部情報工学科

$$\begin{aligned} a_n &= n(2n+1)\xi^2 \\ b_n &= (2n+1)(2n-3)(8n^2-8n-\xi^2) \\ c_n &= (2n-3)(n-1)\xi^2 \\ d_n &= -4(2n+1)(2n-3)\sin\xi - 12\xi\cos\xi \end{aligned} \qquad (8)$$

である．ところで，C_{2n} と S_{2n-1} はそれぞれ３項漸化式(６)の最小解[4] になっているので，$|a_n|+|c_n| \geqq |b_n|$ を満足する n に対しては(６)の順方向の計算は安定であるが，$|a_n|+|c_n|<|b_n|$ を満たす n に対しては数値的不安定性が生ずる．これに対して Miller[5] は同次３項漸化式の場合に，十分大きい整数 $M(M>N)$ に対して $y_{M+1}=0$, $y_M=1$ と仮定し逆向きに漸化式を計算すると安定に最小解がえられることを示した．以上の手法を自動積分法に組み込むためには，次の２点を解決することが必要である．

（ｉ） 積分の近似値(４)の誤差推定をしながら要求精度 ε に対して展開項数 N を決定する．

（ii） ３項漸化式(６)を用いて $N/2$ 個の C_{2n} と S_{2n-1} を ε の精度で計算するための $M(\varepsilon)$ を決定する．

しかし，従来(ii)の問題が困難であったため直接この方法を自動積分に用いることはできなかった．

任意の N と ξ に対して ε の関数としての $M(\varepsilon)$ を決めることの困難を回避するため，Piessens ら[6] は次のような方法を提案した．まず適応型の手法を用いて積分区間を小区間に分割し，各小区間の積分に対してチェビシェフ級数展開による積分法(４)を $N=12$ と固定して用いる．展開項数 N を固定することにより，M の値をあらかじめ ξ のみに依存して十分大きくとっている．現在，Piessens らの方法は有限フーリエ積分(１)の最も能率的な自動積分法の一つと考えられているが，チェビシェフ展開に用いる標本点が等間隔でないため区間の分割を細かくしてゆくとき前段階の標本点での関数値を再利用できず，無駄な標本数(＝関数評価回数)が大きくなる欠点をもつ．また $f(x)$ が滑らかなほど，全区間での $f(x)$ のチェビシェフ級数の収束が速いという性質がこの方法では十分に生かされない．

本論文では，**第１にわれわれが最近提案した自動的に $M(\varepsilon)$ を決定して安定に最小解を求める算法[7] を用いて上記の $M(\varepsilon)$ を決定することの困難を克服する．** 有限 cosine 積分の近似値 I_c^N の誤差は $f(x)$ のチェビシェフ級数(３)の収束が十分速ければ，その終りの２項 $|A_N^N|, |A_{N-1}^N|$ および対応する重み係数 $|C_N|$, $|S_{N-1}|$ を用いて評価できる．展開係数 A_n^N は FFT を用いて能率的に計算される．上述の推定誤差が要求精度 ε を満足するまで項数 N を増してチェビシェフ級数の列を作る．**第２に ε に対して無駄な標本数を節減するため，従来の項数を倍々と増す FFT の代りにより緩やかに増す FFT[8] を用いる．** 以上２点の工夫により有限フーリエ積分(１)の能率的な自動積分法を作ることができる[9),10)]．数値実験の結果，$f(x)$ の滑らかさが増すほど本方法は Piessens らの方法[6] より効率が高いことが示される．

2. チェビシェフ級数展開と重み係数 C_n, S_n の計算

2.1 チェビシェフ級数展開

次数 N を $4, 6, 8, \cdots, 2^i, 1.5\times 2^i, 2^{2i}, \cdots$ と倍々より緩やかに増しながらチェビシェフ級数(３)の列を作る．$N=2^i$ と仮定する．Clenshaw-Curtis[2] の用いた標本点，すなわち $T_{N+1}(t)-T_{N-1}(t)=0$ の根，を $t_j=\cos \pi j/2^i (0\leqq j \leqq 2^i)$ とおく．チェビシェフ級数(３)が t_j 上で $F(t)$ の補間式となるように離散型フーリエ係数 A_n^N を決定する．

$$F(t)=\sum_{n=0}^{N}{}'' A_n^N T_n(t_j) \quad 0\leqq j \leqq N \qquad (9)$$

したがって

$$A_n^N=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N}{}'' F(t_j)T_n(t_j) \qquad (10)$$

次に式(10)の右辺が与えられたとして，$N/2$ 個の標本点

$$u_j=\cos\theta_j,\ \ \theta_j=4\pi(j+1/8)/N \quad 0\leqq j<N/2 \qquad (11)$$

すなわち $T_{N/2}(u_j)-\cos\pi/4=0$, を追加して $N+N/2$ 次のチェビシェフ展開 $P_{N+N/2}(t)$ を作る，

$$P_{N+N/2}(t)=\sum_{n=0}^{N}{}'' A_n^N T_n(t) + \sum_{n=1}^{N/2} B_n\{T_{N-n}(t)-T_{N+n}(t)\} \qquad (12)$$

補間係数の計算法および(12)の打切り誤差については文献8)を参照．さらに $T_{N/2}(t)+\cos\pi/4=0$ の $N/2$ 個の根を標本点として追加すると，

$$\begin{aligned} &T_{2N+1}(t)-T_{2N-1}(t) \\ &\quad =4\{T_{N+1}(t)-T_{N-1}(t)\}\{T_{N/2}(t)-\cos\pi/4\} \\ &\qquad \{T_{N/2}(t)+\cos\pi/4\} \end{aligned}$$

であるから倍の次数 $2N$ のチェビシェフ級数(３)がえられる．以上の手順を繰り返すことにより倍々より緩やかに標本数を増すチェビシェフ級数の列が作られてゆく．

2.2 重み係数 C_n, S_n の計算

以下では簡単のため C_{2n} の計算法のみ記述する．S_{2n-1} もまったく同様に求められるからである．いま $N/2+1$ 個（または $(N+N/2)/2+1$ 個）の $C_{2n}(0\leq n\leq N/2)$ を漸化式(6)から求めることを考える．整数 m を $b_n>a_n+c_n$ となる最小の n とする，すなわち $m=[\xi/2]$．すると $0\leq n\leq m$ なる n に対して $a_n+c_n>b_n>0$ であり，三つの初期値 C_0, C_2 および C_4

$$\begin{aligned}C_0&=2\sin\xi/\xi\\C_2&=C_0+8(\xi\cos\xi-\sin\xi)/\xi^3\\C_4&=16\{(4-24/\xi^2)\cos\xi/\xi^2\\&\quad+(1-12/\xi^2+24/\xi^4)\sin\xi/\xi\}-4C_2-3C_0\end{aligned}\tag{13}$$

を用いて漸化式(6)を順方向に安定に計算して C_0, $C_2, \cdots, C_{2m}$ をうることができる．ここで(6), (7)に $n=1$ を代入すると $c_1=0$ となるので，二つの初期値 C_0 と C_2 のみから(6)により C_4 を求めることができないことに注意する．もし $m<N/2$ ならば $m<n<N/2$ なる n に対しては $a_n+c_n<b_n$ となり，漸化式(6)を順方向に計算すると数値的不安定性が生ずる．これは次の理由による．

一般に3項漸化式(6)は二つの基本解 f_n, g_n と特解 h_n をもち，一般解は A, B を任意定数として

$$y_n=Af_n+Bg_n+h_n$$

と表される．f_n, g_n と h_n が

$$\lim_{n\to\infty}g_n/f_n=0$$

$$\lim_{n\to 0}h_n/f_n=0$$

を満たすとき，$y_n=Bg_n+h_n$ を(6)の最小解という．基本解 f_n, g_n の漸近的振舞いは $d_n=0$ とおいた同次漸化式(6)の係数 a_n, b_n, c_n を用いて Perron-Kreuser の定理[4] により明らかにされる．

［定理1］ α と β を実数とし

$$a_n/c_n\sim an^{\alpha},\quad b_n/c_n\sim bn^{\beta},\quad n\to\infty$$

とする．ここで $ab\neq 0$．さらに $\gamma=\alpha-\beta$ とおき $\beta>\gamma$ とすると

$$f_{n+1}/f_n\sim -bn^{\beta},\quad g_{n+1}/g_n\sim -(a/b)n^{\gamma},\quad n\to\infty$$

この定理より C_{2n} の係数(7)の場合，$\alpha=0, \beta=2$, $a=1, b=16/\xi^2$ であるから

$$f_{n+1}/f_n\sim -16n^2/\xi^2,\quad g_{n+1}/g_n\sim -\xi^2/(16n^2),\quad n\to\infty$$

をうる．すなわち

$$|f_n|\sim(4/\xi)^{2n}(n!)^2,\quad |g_n|\sim(\xi/4)^{2n}(n!)^{-2},\quad n\to\infty\tag{14}$$

となる．一方，特解 h_n は $a_n/b_n=O(n^{-2})$, $c_n/b_n=O(n^{-2})$ であるから

$$h_n\sim d_n/b_n\sim -\cos\xi/(2n^2),\quad n\to\infty\tag{15}$$

さて有限桁演算で漸化式(6)を順方向に計算してこの最小解 Bg_n+h_n を求めようとすると，f_n の影響で丸め誤差が急速に増大し数値的不安定性が生ずる．いま重み係数 C_{2n} は漸化式(6)の最小解になっている．

ところで，最小解は $n\to\infty$ で0に収束するから，M を十分大きい正の整数として初期値 $y_{M+1}=0, y_M=1$ とおき，漸化式を逆方向に計算すれば安定である (Miller の算法[5])．ここで従来 ε に対して $M(\varepsilon)$ を決定することが困難であった．以下では，われわれがすでに発表した $M(\varepsilon)$ を自動的に決定する方法[7] を本問題に適用する．漸化式(6)を順方向に安定に計算してえられた C_{2m} を用いて，(6)の $m+1$ 段階以降を次の連立方程式に書きかえる．

$$A^M\boldsymbol{y}^M=\boldsymbol{d}^M\tag{16}$$

ここで $M>N/2-m$（または $(N+N/2)/2-m$）として

$$\boldsymbol{y}^M=[y_1^M, y_2^M, \cdots, y_{M-1}^M]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{d}^M=[d_1-a_1C_{2m}, d_2, \cdots, d_{M-1}]^{\mathrm{T}}$$

$$A^M=\begin{bmatrix}b_1 & c_1 & & & & 0\\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \\ 0 & & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\ & & & a_{M-1} & b_{M-1}\end{bmatrix}\tag{17}$$

ただし(17)において $a_i(1\leq i<M)$ は(6)における a_{m+i} を意味する．さらに b_i, c_i, d_i も同様の意味に解釈する．A^M は対角優位 $0<a_i+c_i<b_i$ であることに注意する．式(16), (17)にわれわれの方法[7] を適用して $M(\varepsilon)$ を決定した後，(16)を具体的に解くことによりえられた $y_i^M(1\leq i\leq N/2-m)$ が要求精度 ε での $C_{2(m+i)}$ の近似値となる．

3. 積分の誤差推定

$f(x)$ の有限 cosine 積分において，$f(x)$ のチェビシェフ級数の次数が N または $N+N/2$ に応じて積分の近似値は I_c^N であるか，あるいは(12)を用いて

$$\begin{aligned}I_c^{N+N/2}=I_c^N&+\sum_{n=1}^{N/4}B_{2n}(C_{N-2n}-C_{N+2n})\cos\eta\\&+\sum_{n=1}^{N/4}B_{2n-1}(S_{N-2n+1}\\&-S_{N+2n-1})\sin\eta\end{aligned}\tag{18}$$

で与えられる．それらの打切り誤差評価について述べる．

N 次のチェビシェフ級数 $P_N(x)$ の打切り誤差は複

素積分表示により

$$F(x)-P_N(x)=\frac{T_{N+1}(x)-T_{N-1}(x)}{2\pi i}\times\oint_{C_\rho}\frac{F(z)dz}{(z-x)\{T_{N+1}(z)-T_{N-1}(z)\}} \tag{19}$$

と表される[11]. ここで複素平面の実軸上の2点 $-1, 1$ を焦点とする楕円

C_ρ ; $|z+\sqrt{z^2-1}|=\rho,\ \rho>1,$

の内部に $F(z)$ の極を含まないようにとる. 同様に

$$F(x)-P_{N+N/2}(x)=\frac{\{T_{N+1}(x)-T_{N-1}(x)\}\{T_{N/2}(x)-\cos\pi/4\}}{2\pi i}\times\oint_{C_\rho}\frac{F(z)dz}{(z-x)\{T_{N+1}(z)-T_{N-1}(z)\}\{T_{N/2}(z)-\cos\pi/4\}} \tag{20}$$

複素数 $z\notin[-1,1]$ に対して, 恒等式

$$\frac{1}{z-x}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\tilde{U}_n(z)T_n(x) \tag{21}$$

ここで,

$$\tilde{U}_n(z)=\pi/\{\sqrt{z^2-1}\,w^n\},\quad w=z+\sqrt{z^2-1} \tag{22}$$

を(19)に用いると

$$F(x)-P_N(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{}'V_n^N\{T_{N+1}(x)-T_{N-1}(x)\}T_n(x) \tag{23}$$

をうる, ここで(21), (23)において Σ' は初項のみ1/2倍して和をとることを意味し

$$V_n^N=\frac{1}{\pi^2 i}\oint_{C_\rho}\frac{\tilde{U}(z)F(z)dz}{T_{N+1}(z)-T_{N-1}(z)} \tag{24}$$

である. 同様に

$$F(x)-P_{N+N/2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{}'V_n^{N+N/2}\{T_{N+1}(x)-T_{N-1}(x)\}\times\{T_{N/2}(x)-\cos\pi/4\}T_n(x) \tag{25}$$

ここで

$$V_n^{N+N/2}=\frac{1}{\pi^2 i}\times\oint_{C_\rho}\frac{\tilde{U}_n(z)F(z)dz}{\{T_{N+1}(z)-T_{N-1}(z)\}\{T_{N/2}(z)-\cos\pi/4\}} \tag{26}$$

チェビシェフ多項式の積を和に変える周知の関係

$$T_k(x)T_l(x)=\{T_{k+l}(x)+T_{k-l}(x)\}/2 \tag{27}$$

を(23)の右辺に用い, C_{2n} の定義(5)を考慮すると

$$\left|\int_{-1}^{1}\{F(x)-P_N(x)\}\cos\xi x dx\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty}{}'|V_n^N|(|C_{N+n+1}|+|C_{|N+1-n|}| +|C_{n+N-1}|+|C_{|N-1-n|}|)/2 \tag{28}$$

同様に(25)から

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1}\{F(x)-P_{N+N/2}(x)\}\cos\xi x dx\right| &\leqq \sum_{n=0}^{\infty}{}'|V_n^{N+N/2}|\{(|C_{N+N/2+1+n}| \\ &+|C_{|N+N/2+1-n|}|+|C_{N/2+1+n}| \\ &+|C_{|N/2+1-n|}|+|C_{N+N/2-1+n}| \\ &+|C_{|N+N/2-1-n|}|+|C_{N/2-1+n}|+|C_{|N/2-1-n|}|)/4 \\ &+\cos\pi/4(|C_{N+1+n}|+|C_{|N+1-n|}| \\ &+|C_{N-1+n}|+|C_{|N-1-n|}|)/2\}\end{aligned} \tag{29}$$

さて, (28), (29)の右辺を評価するために, $|C_n|$, $|V_n^N|$, $|V_n^{N+N/2}|$ の評価が必要である. まず付録Aにより, $|C_n|$ は次のように評価できる.

$$\begin{aligned}&|C_n|\simeq 2(n+2)/\xi,\quad 0<n<0.8\xi\\&|C_n|\simeq 4\xi/(\pi n),\quad 0.8\xi\leqq n<1.5\xi\\&|C_n|\simeq 2/n^2,\quad 1.5\xi\leqq n\end{aligned} \tag{30}$$

次に $|V_n^N|$, $|V_n^{N+N/2}|$ の評価を行う. $F(z)$ が楕円 C_ρ の外側に J 個の単根 $z_j(j=1,2,\cdots,J)$ をもつ有理型関数と仮定する. (24)と(26)の右辺の複素積分を実行して

$$V_n^N=-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{J}\tilde{U}_n(z_j)\,\mathrm{Res}\,F(z_j)/\{T_{N+1}(z_j)-T_{N-1}(z_j)\} \tag{31}$$

$$V_n^{N+N/2}=-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{J}\tilde{U}_n(z_j)\,\mathrm{Res}\,F(z_j)/[\{T_{N+1}(z_j)-T_{N-1}(z_j)\}\times\{T_{N/2}(z_j)-\cos\pi/4\}] \tag{32}$$

ここで $\mathrm{Res}\,F(z_j)$ は z_j における $F(z)$ の留数である. したがって $r=\min_j|z_j+\sqrt{z_j^2-1}|(>1)$ とおくと ρ の上限は r となり, $|V_n^N|\cong 4r^{-(N+1+n)}$, $|V_n^{N+N/2}|\cong 4r^{-(N+N/2+1+n)}$. これを(30)と比較すると, n の関数として $|V_n^N|$ は指数関数的に $|C_n|$ は有理式の速さで0に収束するので, (28)の右辺を

$$|V_0^N|(|C_{N+1}|+|C_{N-1}|)\sum_{n=0}^{\infty}{}'r^{-n}=\frac{r+1}{2(r-1)}|V_0^N|(|C_{N+1}|+|C_{N-1}|) \tag{33}$$

で近似してもよいであろう. 次に $|V_0^N|$ の値を実際に計算される $|A_n^N|$ を用いて表そう. Elliott[11]は

$$A_n^N=\frac{2}{\pi i}\oint_{C_\rho}T_{N-n}(z)F(z)dz/\{T_{N+1}(z)-T_{N-1}(z)\} \tag{34}$$

を示した．右辺の複素積分を実行し(31)と比較すると $|V_0^N|\cong 4r|A_N^N|/(r^2-1)$ をうる．これを(33)に代入して，$|C_{N\pm1}|=|C_N|\{1+O(N^{-1})\}$を用いると

$$\left|\int_{-1}^{1}\{F(x)-P_N(x)\}\cos\xi x dx\right| \cong |A_N^N||C_N|4r/(r-1)^2 \quad (35)$$

実際には r は $\{A_k^N\}$ の漸近的振舞いから推定される．$N+N/2$ 次展開(29)の右辺も(33)と同様にして

$$\frac{r+1}{2(r-1)}|V_0^{N+N/2}|\{(|C_{N+N/2+1}|+|C_{N+N/2-1}| + |C_{N/2+1}|+|C_{N/2-1}|)/2 + \cos\pi/4(|C_{N+1}|+|C_{N-1}|)\} \quad (36)$$

ここで$|V_0^{N+N/2}|$を実際に計算される(12)のチェビシェフ展開係数 B_n を用いて評価しよう．付録Bより

$$B_n=\frac{-1}{\pi i}\times\oint_{C_\rho}\frac{T_{N/2-n}(z)F(z)dz}{\{T_{N+1}(z)-T_{N-1}(z)\}\{T_{N/2}(z)-\cos\pi/4\}},\quad 1\leqq n\leqq N/2 \quad (37)$$

ここで $n=N/2$ の場合のみ右辺を 1/2 倍する．上式の右辺の複素積分を実行して(32)と比較することにより $|V_0^{N+N/2}|\simeq 8|B_{N/2}|r/(r^2-1)$ をうる．これを(36)に代入して(35)をえた場合と同じ仮定を用いて

$$\left|\int_{-1}^{1}\{F(x)-P_{N+N/2}(x)\}\cos\xi x dx\right| \simeq\frac{4r}{(r-1)^2}|B_{N/2}|(|C_{N+N/2}|+|C_{N/2}|+\sqrt{2}|C_N|) \quad (38)$$

となる．さて$|S_n|$も$|C_n|$と同じ(30)の右辺で評価できるので，(4)，(35)と(38)より結局有限区間$[a,b]$上のフーリエ積分の打切り誤差は

$$|I-I_c^N|\simeq\frac{2r}{(r-1)^2}(b-a)\{|A_N^N||\cos\eta| + |A_{N-1}^N||\sin\eta|\}|C_N| \quad (39)$$

$$|I-I_c^{N+N/2}|\simeq\frac{2r}{(r-1)^2}(b-a)\{|B_{N/2}||\cos\eta| + |B_{N/2-1}||\sin\eta|\} \times(|C_{N+N/2}|+|C_{N/2}|+\sqrt{2}|C_N|) \quad (40)$$

で評価する．

自動積分法として本方法の計算手順は次のようである．初め次数 $N=8$ として FFT を用いて $A_n^N(n=0,1,\cdots,N)$ を計算し(30)と(39)により誤差推定を行う．収束しなければ $N+N/2$ 次の展開係数 $B_n(n=1,2,\cdots,N/2)$ を計算し(30)と(40)より誤差推定を行う．収束するまでNを2倍にして以上のことを繰り返す．収束した後，合わせて $N+1$ (または $N+N/2+1$) 個の C_n と S_n を2章の方法によって計算し(4)(または(18))から I_c の近似値を求めうる．I_s の場合も同様である．なお，I_c と I_s はほとんどいずれか一方のみの計算の手間で両方が同時にえられる．

さて，関数 $f(x)$ に対して一連の ω の値 $\omega_i(1\leqq i\leqq l)$での積分(1)の近似値の組を効率的にうるためには，次のように上記の手法を変更する．まず，(2)，(3)，(4)からいろいろな $\omega_i(1\leqq i\leqq l)$ に対して関数 $f(x)$ のチェビシェフ展開を共通に用いることができることに着目する．ところで，誤差評価(39)，(40)の右辺は$|C_n|$が ω の関数$|C_n(\omega)|$であるから ω に依存する．しかし(30)から$|C_n(\omega)|$が ω の変化に対して大きく変化しないことがわかるので，次のようにしてすべての $\omega_i(1\leqq i\leqq l)$ に共通の誤差評価を用いてもよいであろう．すなわち，誤差推定(39)の右辺の$|C_N|$を，各 ω_i に対して(30)の右辺で評価される値を$|C_N(\omega_i)|$に用いて，$\max_{1\leqq i\leqq l}|C_N(\omega_i)|$ でおきかえる．同様に(40)の右辺の$|C_{N/2}|$，$|C_{N+N/2}|$もおきかえる．さらに$|\cos\eta|$，$|\sin\eta|$もそれぞれ $\max_{1\leqq i\leqq l}|\cos\eta_i|$，$\max_{1\leqq i\leqq l}|\sin\eta_i|$を用いる．ここで $\eta_i=2\pi\beta\omega_i$．このように変更された誤差評価(39)，(40)を一連の $\omega_i(1\leqq i\leqq l)$ に対する積分の近似値の全体の収束判定に用いる．収束した後，各 ω_i に対して別々に2章の方法によって，$C_n(\omega_i)$，$S_n(\omega_i)$ を計算し(4)または(18)から一連の ω_i $(1\leqq i\leqq l)$ に対する I_c(または I_s)の近似値の組がえられる．この手法の効率は，関数 $f(x)$ の計算の手間が $C_n(\omega_i)$，$S_n(\omega_i)$ のそれより大きいほど高くなる．

4. 数値例

5通りのタイプの関数 $f(x)$ に対して数値実験を行って，本方法の性能を現在発表されている方法のなかで能率的な自動積分法である Piessens らの方法[6]と比較した．

1) $$\int_0^1 e^{ax}\begin{Bmatrix}\cos 2\pi\omega x\\ \sin 2\pi\omega x\end{Bmatrix}dx = \begin{cases}\{e^a(a\cos 2\pi\omega+2\pi\omega\sin 2\pi\omega)-a\}/\{a^2+(2\pi\omega)^2\}\\ \{e^a(a\sin 2\pi\omega-2\pi\omega\cos 2\pi\omega)+2\pi\omega\}/\{a^2+(2\pi\omega)^2\}\end{cases}$$

2) $$\int_{-1}^{1}\frac{2\pi\omega a}{x^2+a^2}\cos 2\pi\omega x dx$$

3a) $$\int_0^1\frac{\cos\pi x}{1-2a\cos\pi x+a^2}\cos\pi\omega x dx$$

表 1　積分 $\int_0^1 e^{ax}\begin{Bmatrix}\cos 2\pi\omega x\\ \sin 2\pi\omega x\end{Bmatrix}\alpha x$ に対する本方法と Piessens らの方法[6] との性能の比較

Table 1　Comparison of the performances of the present method and that by Piessens et al.[6] for $\int_0^1 e^{ax}\begin{Bmatrix}\cos 2\pi\omega x\\ \sin 2\pi\omega x\end{Bmatrix}dx$.

a	ω	$\varepsilon_r=10^{-6}$		$\varepsilon_r=10^{-10}$	
		本方法	Piessens	本方法	Piessens
4	$8+\sqrt{2}$	13	13	17	39
	$32+\sqrt{3}$	13	13	17	39
	$128+\sqrt{5}$	13	13	17	39
8	$8+\sqrt{2}$	17	39	25	91
	$32+\sqrt{3}$	17	39	25	117
	$128+\sqrt{5}$	17	39	25	91
16	$8+\sqrt{2}$	25	65	33	143
	$32+\sqrt{3}$	25	91	33	221
	$128+\sqrt{5}$	25	65	33	195

表中の数字は，それぞれ要求相対精度 $\varepsilon_r=10^{-6}, 10^{-10}$ を達成するために必要な標本数の値．
The values in the third column to the sixth indicate the numbers of sample points required to attain the requested tolerances $\varepsilon_r=10^{-6}$, 10^{-10}.

表 2　積分 $\int_{-1}^1 2\pi\omega a\cos 2\pi\omega x/(x^2+a^2)dx$ に対する本方法と Piessens らの方法との性能の比較

Table 2　Comparison of the performances of the present method and that by Piessens et al. for $\int_{-1}^1 2\pi\omega a\cos 2\pi\omega x/(x^2+a^2)dx$.

a	ω	$\varepsilon_a=10^{-6}$		$\varepsilon_a=10^{-10}$	
		本方法	Piessens	本方法	Piessens
1	16	25	39	33	117
	32	25	39	33	117
	64	25	39	33	91
0.25	16	97	195	129	229
	32	97	143	129	351
	64	97	143	129	351
0.125	16	193	195	257	351
	32	193	247	257	403
	64	193	221	257	481

$$=\frac{1+a^2}{1-a^2}\cdot\frac{a^{\omega-1}}{2}$$

3 b)　$$\int_0^1\frac{\sin\pi x}{1-2a\cos\pi x+a^2}\sin\pi\omega x dx$$

$$=\frac{a^{\omega-1}}{2}$$

4)　$$\int_0^1 x\cos 2\pi ax\sin 2\pi\omega x dx$$

$$=\begin{cases}\omega/\{2\pi(a^2-\omega^2)\}, & a\neq\omega\\ -1/(8\pi\omega), & a=\omega\end{cases}$$

ただし，a, ω ともに整数のとき上式の等号成立．

5)　$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cos 2\pi\omega x dx=J_1(2\pi\omega)/(4\omega)$$

ここで 5) の右辺の $J_1(x)$ は第 1 種ベッセル関数である．問題 1) の関数は滑らか型，2), 3), 4) および 5) はそれぞれピーク型，積分区間の外に極をもつ有理型，振動型および区間の端点に微係数の不連続点をもつ型である．各問題 1)～5) に対してパラメータ a の値を変えて，やさしい問題から困難な問題までテストした結果を**表 1～表 5** に示す．表 4 において括弧内の数字は要求精度 ε を満たすことに失敗したときの標本数である．表から微係数が不連続な型を除いたすべての型について本方法は Piessens らの方法[6] より効率がよいことがわかる．表 1 が示すように，本方法は整数ばかりでなく任意の実数の ω の値に対しても適用できる．関数 $f(x)$ が滑らか型か振動型である場合，本方法はとくに効率がよい．

さらに，前章の終りで述べた手法を問題 3 a) に適用して，$\varepsilon_a=10^{-10}$ で 100 個の $\omega_i=10+2i(1\leqq i\leqq 100)$ に対する近似値の組を求めた．このとき要した計算時間の，各 ω_i に対して別々に 100 回独立に積分値を計算するために要する時間との比率は約 1/3～1/4 であった．**表 3** (a) のパラメータ a の値に対応して必要な標本数は 65～193 あり，標本数が大きいほどこの比率は小さくなることが確かめられた．

5. 結論と討論

本論文において，有限フーリエ積分の自動積分法を示した．入力関数をチェビシェフ級数展開し，項別積分する方法を用いた．チェビシェフ展開係数を従来の 2 のべき乗で項数を増す FFT の代りにより緩やかに増す FFT を用いて計算することにより，要求精度に対し無駄な標本数を節減した．項別積分を漸化式の最小解を安定に求める算法により計算した．以上 2 点を考慮することにより従来の Piessens らの自動積分法[6] より能率的な積分法を作ることができた．本方法を他の特異積分（コーシーの主値積分，鋭いピーク型積分など）や不定積分の問題に適用することは今後の課題である．

本積分法は名古屋大学大型計算機センターにサブ

表 3(a) 積分 $\int_0^1 \cos \pi x \cos \pi\omega x/(1-2a \cos \pi x+a^2)dx$ に対する本方法と Piessen らの方法との性能の比較

Table 3(a) Comparison of the performances of the present method and that by Piessens et al. for $\int_0^1 \cos \pi x \cos \pi\omega x/(1-2a \cos \pi x+a^2)dx$.

a	ω	$\varepsilon_a=10^{-6}$		$\varepsilon_a=10^{-10}$	
		本方法	Piessens	本方法	Piessens
0.8	8	33	91	65	195
	16	49	91	65	169
	32	49	117	65	169
0.9	8	65	143	97	299
	16	65	117	97	247
	32	65	143	129	247
0.95	16	97	169	129	351
	32	129	169	129	325
	64	129	169	193	299
0.975	16	129	195	193	403
	32	129	195	193	403
	64	193	195	193	403

表 3(b) 積分 $\int_0^1 \sin \pi x \sin \pi\omega x/(1-2a \cos \pi x+a^2)dx$ に対する本方法と Piessens らの方法との性能の比較

Table 3(b) Comparison of the performances of the present method and that by Piessens et al. for $\int_0^1 \sin \pi x \sin \pi\omega x/(1-2a \cos \pi x+a^2)dx$.

a	ω	$\varepsilon_a=10^{-6}$		$\varepsilon_a=10^{-10}$	
		本方法	Piessens	本方法	Piessens
0.8	8	49	91	65	143
	16	49	91	65	143
	32	49	117	65	169
0.9	8	65	117	65	195
	16	65	117	97	195
	32	65	117	97	195
0.95	16	97	143	129	247
	32	97	143	129	247
	64	97	143	129	221
0.975	16	129	169	193	273
	32	129	169	193	299
	64	129	169	193	273

表 4 積分 $\int_0^1 x \cos 2\pi a x \sin 2\pi\omega x dx$ に対する本方法と Piessens らの方法との性能の比較

Table 4 Comparison of the performances of the present method and that by Piessens et al. for $\int_0^1 x \cos 2\pi a x \sin 2\pi\omega x dx$.

a	ω	$\varepsilon_a=10^{-6}$		$\varepsilon_a=10^{-10}$	
		本方法	Piessens	本方法	Piessens
8	32	49	377	65	403
	64	49	351	49	663
	128	49	195	49	533
16	32	97	533	97	819
	64	97	715	97	819
	128	97	533	97	1027
32	32	129	819	193	1027
	64	129	819	193	1027
	128	129	1027	193	(1027)

括弧内の数字は要求精度を達成することに失敗したときの標本数である.
The value in the parentheses indicates the number of sample points with which quadrature scheme failed to attain the requested tolerance.

表 5 積分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cos 2\pi\omega x dx$ に対する本方法と Piessens らの方法との性能の比較

Table 5 Comparison of the performances of the present method and that by Piessens et al. for $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cos 2\pi\omega x dx$.

ω	$\varepsilon_a=10^{-6}$		$\varepsilon_a=10^{-8}$	
	本 方 法	Piessens	本 方 法	Piessens
16	129	195	257	299
32	257	221	513	299
64	257	247	513	299

ルーチンとして登録された.

謝辞 日頃ご討論いただく名古屋大学二宮市三教授に感謝いたします.

参 考 文 献

1) Davis, P. J. and Rabinowitz, P.: *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New York (1975).
2) Clenshaw, C. W. and Curtis, A. R.: A Method for Numerical Integration on an Automatic Computer, *Numer. Math.*, Vol. 2, pp. 197-205 (1960).
3) Piessens, R. and Branders, M.: Numerical Solution of Integral Equations of Mathematical Physics, Using Chebyshev Polynomials, *J.*

Comput. Phys., Vol. 21, No. 2, pp. 178-196 (1976).
4) Gautschi, W.: Computational Aspects of Three-Term Recurrence Relations, *SIAM Rev.*, Vol. 9, No. 1, pp. 24-82 (1967).
5) British Association for the Advancement of Science: Mathematical Tables, *Bessel Functions*, Part II, Vol. 10, Cambridge University Press, Cambridge (1952).
6) Piessens, R. and Branders, M.: Computation of Oscillating Integrals, *J. Comput. App. Math.*, Vol. 1, No. 3, pp. 153-164 (1975).
7) 長谷川武光, 鳥居達生, 二宮市三: 3項漸化式の最小解に対する安定な算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 23, No. 6, pp. 583-590 (1982).
8) 鳥居達生, 長谷川武光: 標本点数を低倍率で漸増させる実関数の FFT, 情報処理学会論文誌, Vol. 24, No. 3, pp. 343-350 (1983).
9) 長谷川武光, 鳥居達生, 二宮市三: 有限フーリエ積分に対するクレンショー・カーチス型自動積分法, 情報処理学会第23回全国大会講演論文集, pp. 907-908 (1981).
10) 長谷川武光, 鳥居達生: 激しい振動積分 $\int_{-1}^{1} e^{i\omega t} f(t)dt$ の求積法, 京都大学数理解析研究所講究録 453, pp. 197-210 (1982).
11) Elliott, D.: Truncation Errors in Two Chebyshev Series Approximations, *Math. Comput.*, Vol. 19, pp. 234-248 (1965).

付　録　A

重み係数 C_n の評価(30)を導く．以下では n を偶数と仮定する．C_n の定義(5)に変数変換 $t=\cos\theta$ を行って

$$C_n=\int_0^\pi \cos(\xi\cos\theta)\cos n\theta\sin\theta d\theta$$
$$=\frac{\pi}{n}\Bigl[\int_0^{1/2}\cos\Bigl(\xi\cos\frac{\pi}{n}x\Bigr)\times\sin\frac{\pi}{n}x\cos\pi x dx$$
$$+\int_{-1/2}^{1/2}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\cos\Bigl\{\xi\cos\frac{\pi}{n}(j+x)\Bigr\}\times\sin\frac{\pi}{n}(j+x)\cos\pi x dx$$
$$-\int_{1/2}^{1}\cos\Bigl\{\xi\cos\frac{\pi}{n}(x-1)\Bigr\}\times\sin\frac{\pi}{n}(1-x)\cos\pi x dx \qquad (\mathrm{A.1})$$

さて $g(x)$ を区間 $E=[0,1]$ 上で C^2 級の関数とする．$h=1/n$ とおいて $g_j=g((j+\alpha)h)(-1/2\leqq\alpha\leqq1/2)$ と略記することにすれば

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j g_j=-(g_{1/2}+g_{n-1/2})/2-(h/2)^2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j g''(\xi_j)/2$$
$$\xi_j\in\Bigl[\Bigl(j-\frac{1}{2}+\alpha\Bigr)h,\ \Bigl(j+\frac{1}{2}+\alpha\Bigr)h\Bigr] \qquad (\mathrm{A.2})$$

が成り立つ．実際

$$g_j=(g_{j+1/2}+g_{j-1/2})/2-(h/2)^2g''(\xi_j)/2$$

から(A.2)が容易にえられる．

$$g(x)=\cos(\xi\cos\pi x)\sin\pi x \qquad (\mathrm{A.3})$$

とおいて(A.2)を(A.1)に用いると

$$C_n=\frac{\pi}{n}\Bigl[2\int_0^{1/2}g(hx)\cos\pi x dx-(1/2)\int_{-1/2}^{1/2}\Bigl\{g(h(x+1/2))+g(h(1/2-x))+\Bigl(\frac{h}{2}\Bigr)^2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j g''(\xi_j)\Bigr\}\cos\pi x dx\Bigr] \qquad (\mathrm{A.4})$$

さて E 上で連続な有界変動関数を $f(x)$ とおく．

［補助定理］　区間 $X=[a,b]\subset E=[0,1]$ に対して E 上の集合関数 $\Phi(X)$ を $\Phi(X)=f(b)-f(a)$ と定義する．上変動 V_f^+, 下変動 V_f^- を

$$V_f^+=\sup_{A\subset E}\Phi(A),\quad V_f^-=\inf_{A\subset E}\Phi(A)$$

とすると

$$\Bigl|\sum_{j=1}^{n}(-1)^j f(\zeta_j)\Bigr|\leqq\max(V_f^+,|V_f^-|)$$
$$\zeta_j\in\Bigl[\frac{j-1}{n},\ \frac{j}{n}\Bigr] \qquad (\mathrm{A.5})$$

が成り立つ．

補助定理の $f(x)$ として(A.3)の $g''(x)$ を用いると $\Bigl|\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j g''(\xi_j)\Bigr|$ は n に関して一様有界であることがわかる．したがって $n\to\infty$ のとき(A.3), (A.4)および(A.5)より

$$C_n=-2\cos\xi/n^2+O(1/n^3) \qquad (\mathrm{A.6})$$

これから(30)の第3式がえられる．

次に(30)の第2式を導く．C_n は(A.3)を用いて

$$C_n=\int_0^1\frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j g(h(j+x))\cos\pi x dx$$

とも表される．$V_g^+=|V_g^-|\leqq\max(2\xi/\pi,1)$ であるから上式の $g(x)$ に(A.5)を用いると

$$|C_n|\leqq\frac{2}{n}\max\Bigl(\frac{2\xi}{\pi},1\Bigr) \qquad (\mathrm{A.7})$$

さらに(30)の第1式を導こう．$\pi(m+1/2)/\xi<1<$

$\pi(m+3/2)/\xi$ を満足する正の整数 m に対して(5)より

$$C_n=2\Big[\int_0^\alpha \cos\xi t T_n(t)dt+\int_\beta^1 \cos\xi t T_n(t)dt+(\pi/\xi)\int_0^1\sum_{j=1}^m(-1)^j\cos\pi(x-1/2)\times T_n((j-1/2+x)\pi/\xi)dx\Big] \tag{A.8}$$

と表される．ここで $\alpha=\pi/(2\xi)$, $\beta=(m+1/2)\pi/\xi$.

(A.5)より

$$\left|\sum_{j=1}^m(-1)^j T_n((j-1/2+x)\pi/\xi)\right|\leqq n/2+1 \tag{A.9}$$

もし m が偶数なら右辺は $n/2$ でよい．(A.9)を(A.8)の右辺に用いると

$$|C_n|\leqq 2[2/\xi+2(n/2+1)/\xi]=2(n+2)/\xi \tag{A.10}$$

をうる．(A.7)と(A.10)の評価は任意の整数 $n(>0)$ と実数 $\xi(>0)$ に対して成り立つが，$0.8\xi\lesssim n$ に対して(A.7)の右辺が(A.10)より小さいので n の区間ごとに(30)のように評価する．また実際に $1.5\xi<n$ に対して(30)の第3式が十分に成り立つことが確かめられた．

付 録 B

式(12)の右辺のチェビシェフ展開係数 B_n の複素積分表示(37)を導く．チェビシェフ多項式の積を和に変える公式により

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' V_n T_m(x)T_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{}'(V_{n+m}+V_{|n-m|})T_n(x)/2 \tag{B.1}$$

を(25)に用いると

$$\begin{aligned}F(x)-P_{N+N/2}(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\{(V_{N+N/2+1+n}+V_{|N+N/2+1-n|}\\+V_{N/2+1+n}+V_{|N/2+1-n|}\\-V_{N+N/2-1+n}-V_{|N+N/2-1-n|}-V_{N/2-1+n}\\-V_{|N/2-1-n|})/2\\-\cos\pi/4(V_{N+1+n}+V_{|N+1-n|}\\-V_{N-1+n}-V_{|N-1-n|})\}T_n(x)\end{aligned} \tag{B.2}$$

ここで，今後 V_k は $V_k^{N+N/2}$ を表すことにする．さて $F(x)$ をチェビシェフ級数展開する．

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n T_n(x) \tag{B.3}$$

ここで展開係数 a_n は

$$a_n=\frac{1}{\pi^2 i}\oint_{C_\rho}\tilde{U}_n(z)F(z)dz \tag{B.4}$$

で与えられる[11]．(B.3), (B.4)と(26)を(B.2)に代入してまとめると

$$\begin{aligned}P_{N+N/2}(x)=\sum_{n=0}^{N}{}'' A_n^N T_n(x)+\sum_{n=0}^{N/2-1}{}'\{T_{N+N/2-n}(x)\\-T_{N/2+n}(x)\}\times\frac{1}{\pi i}\oint_{C_\rho}T_n(z)F(z)dz\\/[\{T_{N+1}(z)-T_{N-1}(z)\}\{T_{N/2}(z)-\cos\pi/4\}]\end{aligned} \tag{B.5}$$

となる．ここで A_n^N は(34)で与えられる．(B.5)を(12)と比較して(37)をうる．

(昭和58年4月11日受付)
(昭和58年7月19日採録)