6F-02

1ビット・セルラオートマトン上での最適時間一斉射撃アルゴリズムの設計

西村 順[†]　　曽我部 崇[†]　　梅尾 博司[††]

† 大阪電気通信大学 大学院 情報工学専攻

†† 大阪電気通信大学 情報工学部 情報工学科

概 要

n 個のセルからなるセル空間の同期を $2n-2$ ステップの最適時間で実現するセルラオートマトンは従来から数多く提案されている．これらのセルラオートマトンにおいて，隣接するセル間の 1 ステップ当たりの通信量は O(1) ビットであるが，セル間通信量は有限状態記述というオートマトンの定義には明示的に現れないし，セル間通信量に関する研究はこれまであまりなされていない．本稿では，1 ステップあたりのセル間通信量を 1 ビットに制限した計算モデル $\mathrm{CA}_{1\text{-bit}}$ を定義し，$\mathrm{CA}_{1\text{-bit}}$ 上で最適時間一斉射撃アルゴリズムを提案する．セルの内部状態数は 78 である．我々のアルゴリズムは，すでに正当性が示されている Waksman のアルゴリズム (セル間通信量は O(1) ビットである) をベースとしたもので，その正当性は明らかである．

1 はじめに

本稿では，隣接する 2 つのセル間の通信量を 1 ビットに制限したセルラオートマトン・モデル $\mathrm{CA}_{1\text{-bit}}$[8] 上で，$n$ 個のセルからなるセル空間の同期 (synchronization, セルラオートマトン上では同期化を一斉射撃 (firing squad synchronization) と呼ぶ) を $2n-2$ ステップの最適時間で実現できることを明らかにする．

2 Waksman のアルゴリズム

Waksman[1] の一斉射撃アルゴリズムでは，各セルは次の 16 個の内部状態からなる状態集合 D を持つ．すなわち，

$\mathrm{D}=\{\mathrm{Q}, \mathrm{T}, \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1,$
$\mathrm{A}_{000}, \mathrm{A}_{001}, \mathrm{A}_{010}, \mathrm{A}_{011}, \mathrm{A}_{100}, \mathrm{A}_{101}, \mathrm{A}_{110}, \mathrm{A}_{111}\}$.

Q は静止状態，T は射撃状態，P_0，P_1 は射撃準備状態，B_0，B_1 は波状態，R_0，R_1 はトリガー状態，$\mathrm{A}_{ijk}, i, j, k \in \{0, 1\}$ は状態 $\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1, \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ を生成するための制御状態を意味する．

図 1 は Waksman の一斉射撃アルゴリズムの時間空間図式である．図 1 において，時刻 t=0 におけるセル 1 を将軍セルと呼び G で表す．G は，$t=0$ 時より傾き $\frac{1}{1}$（セル／ステップ）の a 信号，傾き $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \ldots, \frac{1}{2^k-1}, \ldots$ の b 信号群 $\{\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4, \ldots, \mathrm{b}_k, \ldots\}$ を右向きに送出する．a 信号は，時刻 $t=n-1$ 時にセル n に到着し，将軍 G_1 を出現させる．G_1 も G と同様に a 信号および b 信号群を左向きに送出する．G_1 により送出された a 信号は，先に G により送出されている b 信号群と交差し，そこに将軍 $\mathrm{G}_2, \mathrm{G}_3, \ldots, \mathrm{G}_k$ を出現させる．各将軍 G_1，$\mathrm{G}_2, \mathrm{G}_3, \ldots, \mathrm{G}_k$ は，自分の左側に位置する部分セル列を G と同じ方法で同期させる．

Waksman のアルゴリズムでは，無限個の b 信号群 $\{\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3, \ldots, \mathrm{b}_k, \ldots\}$ の生成とセル空間上での二分割点 $\mathrm{G}_2, \mathrm{G}_3, \ldots, \mathrm{G}_k$ の探索，マーキングが重要である．以下では，これらの生成・探索手法をビット情報の観点から説明する．

A Design of Optimum-Time Firing Squad Synchronization Algorithm on 1-Bit Inter-Cell-Communication Cellular Automaton
Jun NISHIMURA[†], Takashi SOGABE[†], Hiroshi UMEO[††]
†Osaka Electro-Communication Univ., Graduate School of Engineering
††Osaka Electro-Communication Univ., Faculty of Information Science and Technology

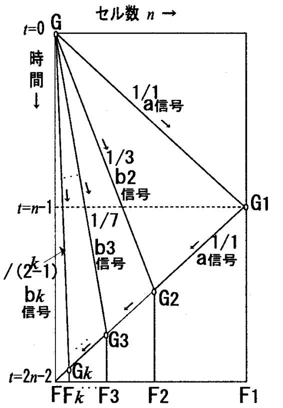

図 1 Waksman のアルゴリズム

・b 信号群の生成機構

傾き $\frac{1}{2^k-1}$ の b_k 信号は，状態 B_0，B_1 の 2 状態で表現され，1 つのセル上に 2^k-1 ステップづつ滞在しながら隣接セルに移動する．状態 B_0 は送出元の将軍から数えて偶数番目のセル上で，また状態 B_1 は奇数番目のセル上で b_k 信号を表現する．このように b_k 信号は，2 つの状態を交互にとることにより，傾き $\frac{1}{2^k-1}$ による位置情報のみならずセル空間のサイズに関する奇偶情報をも伝達している．

b_k 信号は，周期 2^k ステップの r 信号との交差がトリガーとなり隣接セルに移動する．その際，b_k 信号は，周期 2^k ステップの r 信号を 2 回に 1 回の割合で遮断する．これにより，後続の b_{k+1} 信号の傾きは $\frac{1}{2^{k+1}-1}$ となる．以上のようにして，b 信号群は帰納的に生成される．

・二分割点の探索，マーキング

状態 P_0，P_1 は，将軍状態を表す．将軍 $\mathrm{G}_k (k \geq 2)$ は，G_{k-1} により送出された a 信号と G により送出された b_k 信号の交差地点に出現する．この時，以下の (a)(b) の組み合わせから 4 通りのパターンが考えられる．

(a) 状態 $\mathrm{P}_i, i \in \{0, 1\}$ のセルの個数は 1 個または 2 個である．

(b) G_k を表す内部状態は，P_0，P_1 のいずれかである．

(a) は G_{k-1} を表す状態 $P_i, i \in \{0, 1\}$ により決定され，この状態が P_0 の時は 1 個，P_1 の時は 2 個となる．(b) は G_{k-1}-G_k 間のセル数の奇偶性により決定され，奇数の時は P_0，偶数の時は P_1 となる．

(a) の情報は，G_{k-1} により送出される a 信号に付与され，(b) の情報は a 信号が伝播する際，セル空間の奇偶性をチェックすることにより，G_k にそれぞれ 1 ビットの情報として伝えられる．このようにして，初期セル列上に将軍状態を配置して均等に細分割し，全てのセルが状態 $P_i, i \in \{0, 1\}$ へ遷移したときに射撃準備は完了する．図 2 は Waksman のアルゴリズムの実行結果である．

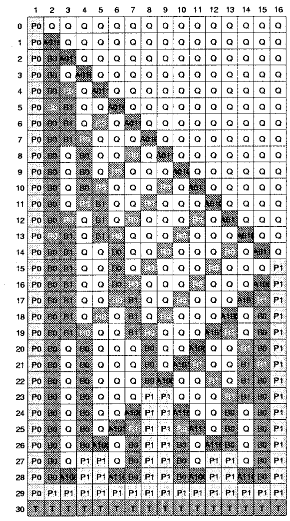

図 2　**Waksman のアルゴリズム (セル数 16)**

3　$\mathrm{CA_{1\text{-}bit}}$ 上のアルゴリズム

$\mathrm{CA_{1\text{-}bit}}$ 上での a 信号は，2 ビット以上の情報を同時に伝達できない．そのため，$\mathrm{CA_{1\text{-}bit}}$ 上では，b 信号群が状態 P_0, P_1 の生成に必要な 2 ビット情報を伝えている．図 3(左) は，Waksman のアルゴリズムにおいて右向きに進行する傾き $\frac{1}{2^k-1}$ の b_k 信号の一部である．b_k 信号は，状態 B_0，B_1 を交互に使用して，状態 P の添字を決める 1 ビット情報を伝達している．$\mathrm{CA_{1\text{-}bit}}$ 上の b_k 信号は，この情報に加えて，状態 P の個数を決める情報を伝達させるため，図 3(右) のように有限個の異なる内部状態で表現される 4 つのブロック (i)〜(iv) を逐次的に使用する．

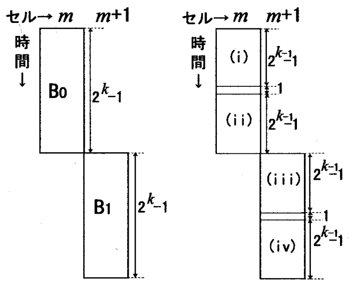

図 3　**b_k 信号の構造**

ブロック (i)〜(iv) は，それぞれ $2^{k-1}-1$ 個の状態列で表現され，各ブロックは r 信号と交差した時，次のブロックのひとつの状態に遷移する．ブロック (i) 上の状態で a 信号と交差した時，そこに状態 P_1 を 1 個生成する．ブロック (ii), (iii), (iv) 上の状態で，a 信号と交差した時，それぞれ P_1 を 2 個，P_0 を 1 個，P_1 を 2 個生成する．以上のように状態 P の 4 通りの生成は $\mathrm{CA_{1\text{-}bit}}$ 上でも実現できる (図 4)．図 4 から，$\mathrm{CA_{1\text{-}bit}}$ 上でも，b 信号群および各将軍状態が，図 2 と同じタイミングで生成されている様子が伺える．

以上の結果を次の補題，定理としてまとめる．

[補題 1] $\mathrm{CA_{1\text{-}bit}}$ 上で b 信号群 $\{b_2, b_3, b_4, \ldots\}$ を生成できる．必要な内部状態数は 35 である．

[補題 2] $\mathrm{CA_{1\text{-}bit}}$ 上で Waksman のアルゴリズムと同じタイミングで将軍 $G_1, G_2, \ldots, G_k$ を生成できる．

[定理] 任意の自然数 n に対して，n 個のセルからなるセル空間を $2n-2$ ステップで一斉射撃する $\mathrm{CA_{1\text{-}bit}}$ が存在する．必要な内部状態数は 78 である．

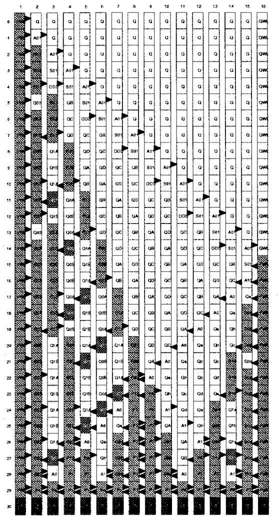

図 4 **セル数 16 の場合の 1 ビット一斉射撃の計算状況**

4　おわりに

本稿では，$\mathrm{CA_{1\text{-}bit}}$ 上で一斉射撃問題を考察し，セル間通信量を 1 ビットに制限したモデル上でも n 個のセルからなるセル空間の同期を $2n-2$ ステップの最適時間で実現できることを明らかにした．セルの内部状態数は 78 である．我々のアルゴリズムは，すでに正当性が示されている Waksman のアルゴリズムをベースとしたもので，その正当性は明らかである．さらに，シミュレータを用いて，n=2〜10000 まで最適時間で一斉射撃が正しくなされることを確認した．

参考文献

[1] A. Waksman, " An optimum solution to the firing squad synchronization problem", Information and Control, 9, pp.66-78, (1966).

[2] 後藤　英一, "一斉射撃の問題", 数理科学, 11 巻, 10 号, pp.42-46, (1973).

[3] J. Mazoyer, "On optimal solution to the firing squad synchronization problem", Theoretical Computer Science, 168, pp.367-404,(1996).

[4] E. F. Moore, "The firing squad synchronization problem", Sequential Machines(E. F. Moore), Selected Papers, Addison-Wesley Reading, MA., pp.213-214, (1964).

[5] M. Minsky, "Computation:Finite and infinite machines", Prentice Hall, pp.28-29, (1967).

[6] R. Balzer, "An 8-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem", Information and Control, 10, pp.22-42, (1967).

[7] 小林 孝次郎, " オートマトン理論とパズル−一斉射撃の問題", 数理科学, 11 月号増刊「パズル I」, pp.106-110, (1976).

[8] H. Umeo," A design of cellular algorithms for 1-bit inter-cell communications and related cellular algorithms", Proc. of MCU'98, Vol. 1, pp.210-227, (1998).

[9] 西村, 林, 梅尾,"1 ビット通信セルラ・オートマトン上での最適時間一斉射撃アルゴリズムの設計", 日本ソフトウェア科学会第 16 回大会論文集, pp. 120-123, (1999).