Vol. 25 No. 3 情報処理学会論文誌 May 1984

# Horn 集合の決定性反証によって計算可能な数論的関数†

松 尾 文 碩††

Horn 集合は，その反証の手続き的解釈によりプログラミング言語として機能する．しかし，反証は非決定性手順によってつくられるため，計算結果の一意性が必ずしも保証されない．本論文では，決定性手順でつくられる反証によって計算可能な数論的関数のクラスは，原始帰納的関数を含み十分大きいが，部分帰納的関数のクラスは包含しないことを示した．

## 1. まえがき

Horn 集合 (Horn set) は，たかだか1個の正リテラル (positive literal) しかもたない節 (clause) の集合である．Kowalski[4] は，導出推論系 (resolution inference system) による Horn 集合の反証 (refutation) を手続き的に解釈することにより，Horn 集合がプログラミング言語として機能することを示した．反証をつくる過程は，本質的に非決定性の手順であり，充足不可能な (unsatisfiable) Horn 集合には，複数個の反証が存在する．したがって，Horn 集合の反証に基づく計算機構は非決定性をもち，反証によって計算結果が異なる可能性がある．この計算機構の完全性は，これまで Hill[2], Tärnlund[7),8], Andreka と Nemeti[1], および Šebelík と Štěpánek[6] によって論じられた．しかし，反証作成過程の非決定性と結果の非一意性との関係については，十分に明らかにされていなかった．本論文では，決定性手順でつくられる Horn 集合の反証によって計算可能な数論的関数のクラスは，原始帰納的関数を含み，十分大きいことを示す．しかし，このクラスは，部分帰納的関数のクラスを包含しない．

## 2. Horn 集合計算可能性

まず，Horn 集合反証系 M で使用する第1階言語 (first-order language) を定める．定数は，下記のように無限個存在する．

$c_0, c_1, c_2, c_3, \cdots$

関数記号に関しては，定数以外の記号は使用しない．述語記号は無限にある．これらは，$P, Q, R, S, F, G, H$ で表し，必要なときは添字をつける．二つの2引数述語記号 $P$ と $S$ については，あとで述べるように公理がある．P を $m$ 引数述語記号，$t_1, \cdots, t_m$ を項 (term) とすると，$P(t_1, \cdots, t_m)$ の形の表現を原子論理式またはアトム (atom) とよぶ．項は，当然ここでは変数か定数に限られる．変数は，$x, y, z, u, v, w$ で表し，必要なときは添字をつける．いま，$A_1, \cdots, A_m, A_n$, B をアトムとすると，下記の(1)と(2)の表現を Horn 節 (Horn clause) とよぶ．

$A_1, \cdots, A_m \rightarrow B$, ここで，$m \geq 0$. (1)

$A_1, \cdots, A_n \rightarrow$, ここで，$n \geq 0$. (2)

(1)の Horn 節を正規 (regular) であるといい，$m=0$ のとき，この節を正節 (positive clause) とよぶ．(2)において，$n>0$ のとき，この節を負節 (negative clause) とよび，$n=0$ のとき空節 (empty clause) という．

M の公理は，つぎの(3)と(4)に示す可算無限個の正節である．

$\rightarrow P(c_m, c_{m-1})$, ここで，$m>0$. (3)

$\rightarrow S(c_n, c_{n+1})$, ここで，$n \geq 0$. (4)

M は，2個の推論規則をもつ．A, B をアトム；$\Delta, \Gamma, \Lambda$ をアトムの有限系列または空系列；$\eta, \sigma$ を代入 (substitution)；$A\sigma$, $\Delta\sigma$ などは表現 A, $\Delta$ などへの $\sigma$ の代入結果とする．推論の前提を横線の上に並べ，推論結果を線の下に示すと，推論規則はつぎのように表される．

[R 規則]

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Delta, B, \Lambda \rightarrow}{\Gamma\eta\sigma, \Delta\sigma, \Lambda\sigma \rightarrow}$$

ここで，$\eta$ は A と B が共通の変数をもたないようにするための改名代入 (renaming substitution[5])；$\sigma$ は $A\eta$ と B の mgu (most general unifier).

[S 規則]

$$\frac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma\sigma \rightarrow}$$

† Number Theoretic Functions Calculated by Deterministic Refutation of Horn Sets by FUMIHIRO MATSUO (Computer Center, Kyushu University).

†† 九州大学大型計算機センター

ここで，$\sigma$ は変数に定数の代入を指示する1個の代入要素のみからなる．

$\Theta, \Theta_i (1 \leq i \leq n)$ をアトムの有限系列または空系列とし，$\boldsymbol{S}$ を正規節の集合とすると，$\boldsymbol{S}$ による負節 $\Theta \rightarrow$ の反証とは，つぎのような節の有限系列のことである．

$$\Theta_1 \rightarrow, \Theta_2 \rightarrow, \cdots, \Theta_n \rightarrow \quad (5)$$

ここで，$\Theta_1 = \Theta$, $\Theta_n$ は空系列，$\Theta_i \rightarrow (1 < i \leq n)$ は，$\boldsymbol{S}$ の要素または公理と $\Theta_{i-1} \rightarrow$ からの推論結果である．$\Theta \rightarrow$ の $\boldsymbol{S}$ による反証が存在するとき，

$$\boldsymbol{S} \vdash \Theta$$

とかく．以下では，正規節の有限集合を正規集合とよぶ．

［定義 1］ $m$ 引数の数論的関数 $f$ が Horn 集合計算可能というのは，$m+1$ 引数の述語記号 F と正規集合 $\boldsymbol{S}$ が存在し，すべての自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_m, b$ について，

$$f(a_1, \cdots, a_m) = b \Leftrightarrow$$
$$\boldsymbol{S} \vdash \mathrm{F}(c_{a_1}, \cdots, c_{a_m}, y) \text{ かつ}$$
その反証において $y$ には $c_b$ が代入される． (6)

ここで，⇔は両辺が必要十分であることを示す．

以下では，$c_n$（$n$ は自然数）を $n$ とかくことにする．

まず，部分帰納的関数は Horn 集合計算可能であることを示す．この結果は，最初に Tärnlund[7] によって証明された．彼が示したのは，万能チューリング機械の動作が Horn 集合によって表現されるということである．本論文の計算可能性の定義に最も近いのは，Šebelík と Štěpánek[6] による定義である．これは，(6)の右辺を

$$\boldsymbol{S} \vdash \mathrm{F}(c_{a_1}, \cdots, c_{a_m}, c_b)$$

としたものである*．

最初に原始帰納的関数について証明する．

［定理 1］ 原始帰納的関数は Horn 集合計算可能である．

（証明） 証明は，原始帰納的関数の定義についての帰納法によって行う．

(i) 関数 $f$ が $\lambda x_1 \cdots x_m [n]$ である場合：正規集合 $\{\rightarrow F(x_1, \cdots, x_m, n)\}$ と述語記号 $F$ によって $f$ が Horn 集合計算可能であることを示すことができる．

(ii) 関数 $f$ が $\lambda x[x+1]$ である場合：正規集合 $\{S(x, y) \rightarrow F(x, y)\}$ と述語記号 $F$ によって証明することができる．

(iii) 関数 $f$ が $\lambda x_1 \cdots x_m [x_i]$ である場合：正規集合 $\{\rightarrow F(x_1, \cdots, x_m, x_i)\}$ と述語記号 $F$ によって証明可能である．

(iv) 関数 $f$ が $\lambda x_1 \cdots x_m [h(g_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, g_k(x_1, \cdots, x_m))]$ である場合：帰納法の仮定から $g_1, \cdots, g_k$ は Horn 集合計算可能であるので，それぞれについてそれらを Horn 集合計算可能とするための正規集合 $\boldsymbol{S}_{g_1}, \cdots, \boldsymbol{S}_{g_k}, \boldsymbol{S}_h$ と述語記号 $G_1, \cdots, G_k, H$ が存在する．いま簡単のため，$\boldsymbol{S}_{g_1}, \cdots, \boldsymbol{S}_{g_k}, \boldsymbol{S}_h$ において，それぞれの間には $S$ と $P$ 以外には共通の述語記号はないものとすると，つぎの $\boldsymbol{S}_f$ と $F$ によって $f$ が Horn 集合計算可能であることを示すことができる．ここで，$F$ は $\boldsymbol{S}_{g_1}, \cdots, \boldsymbol{S}_{g_k}, \boldsymbol{S}_h$ のなかには現れない記号とする．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_f = \{&G_1(x_1, \cdots, x_m, y_1), \cdots, G_k(x_1, \cdots, x_m, y_k),\\ &H(y_1, \cdots, y_k, y) \rightarrow F(x_1, \cdots, x_m, y)\}\\ &\cup \boldsymbol{S}_{g_1} \cup \cdots \cup \boldsymbol{S}_{g_k} \cup \boldsymbol{S}_h.\end{aligned}$$

(6)の⇒部分，すなわち $y$ に正しい関数値が代入される反証の存在を示すことは容易である．(6)の⇐部分，すなわち $y$ に代入される値の一意性を示すためには，帰納法の各段階において定理が成立することを証明するだけでは不十分であり，つぎの(a)を示す必要がある．

(a) 定理の原始帰納的関数 $f(a_1, \cdots, a_m)$ の値 $b$ を求めるための正規集合 $\boldsymbol{S}$ と述語記号 F があるとき，もし $\boldsymbol{S}$ による $\mathrm{F}(x_1, \cdots, x_m, y) \rightarrow$ の反証が存在し，かつその反証では $x_i$ $(1 \leq i \leq m)$ に定数が代入されるとすればそれは $a_i$ であるとき，その反証において $y$ には $b$ が代入される．

(i)，(ii)，(iii)の関数 $f$ に対する正規集合と述語記号について(a)が成立することは容易に示すことができる．(iv)の $\boldsymbol{S}_h$ と $H$ が(a)の性質をもつならば，これと帰納法の仮定により(iv)の⇐部分を証明することができる．また，$\boldsymbol{S}_{g_1}$ と $G_1, \cdots, \boldsymbol{S}_{g_k}$ と $G_k$，$\boldsymbol{S}_h$ と $H$ が(a)の性質をもつならば，明らかに $\boldsymbol{S}_f$ と $F$ も性質(a)をもつ．

(v) $f$ がつぎの式を満たす一意的な関数である場合，

$$\begin{cases} f(0, x_2, \cdots, x_k) = g(x_2, \cdots, x_k), \\ f(z+1, x_2, \cdots, x_k) \\ \quad = h(z, f(z, x_2, \cdots, x_k), x_2, \cdots, x_k): \end{cases}$$

---

* 文献6)の定義には，たぶん誤って $c_b$ に当たる部分が抜けている．1980年の夏にハンガリーで開かれた International Logic Programming Workshop における彼らの論文では，本文のような定義である．

帰納法の仮定から $g, h$ を Horn 集合計算可能とする正規集合 $\boldsymbol{S}_g, \boldsymbol{S}_h$ と述語記号 $G, H$ が存在し，それらは性質(a)をもつ．(iv)と同様，$\boldsymbol{S}_g$ と $\boldsymbol{S}_h$ は $S$ と $P$ 以外に共通の述語記号をもたないとする．いま，$\boldsymbol{S}_f$ を $\boldsymbol{S}_g \cup \boldsymbol{S}_h$ につぎの二つの Horn 節を加えた正規集合とする．

$$H(w, u, x_2, \cdots, x_k, y),\ F(w, x_2, \cdots, x_k, u),\ P(z, w) \to F(z, x_2, \cdots, x_k, y). \quad (7)$$

$$G(x_2, \cdots, x_k, y) \to F(0, x_2, \cdots, x_k, y). \quad (8)$$

この $\boldsymbol{S}_f$ と $F$ により，$f$ が Horn 集合計算可能であることを示すことができる．$\boldsymbol{S}_f$ と $F$ が性質(a)をもつことは明らかである．(証了)

［定理 2］ 部分帰納的関数は Horn 集合計算可能である．

(証明) 定理2を証明するためには，$g$ を任意の $m+1$ 引数の Horn 集合計算可能な全域関数とするとき，つぎの(9)によって定義される関数 $f$ が Horn 集合計算可能であることを示せばよい．

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \mu y[g(x_1, \cdots, x_m, y) = 0]. \quad (9)$$

ここでは，$f$ の定義として(9)式のかわりにつぎの(10)を用いる．

$$\begin{cases} h(x_1, \cdots, x_m, y) = \prod_{s<y} g(x_1, \cdots, x_m, s), \\ q(z+1, 0, y) = y, \\ f(x_1, \cdots, x_m) \\ \quad = q(h(x_1, \cdots, x_m, y), h(x_1, \cdots, x_m, y+1), y). \end{cases} \quad (10)$$

ここで，$u=0$ または $v>0$ のとき $q(u, v, y)$ は定義されない．

(10)式の意味については文献3)の §57 を参照されたい．さて，$g$ を Horn 集合計算可能とする正規集合を $\boldsymbol{S}_g$ とすると，(10)の関数 $h$ を Horn 集合計算可能とする正規集合 $\boldsymbol{S}_h$ と述語記号 $H$ は，定理1の証明中に示した正規集合から正規集合をつくる操作によって $\boldsymbol{S}_g$ から得られる．$\boldsymbol{S}_h$ につぎの二つの Horn 節を加えた正規集合を $\boldsymbol{S}_f$ とする．

$$Q(u, v, y, y), H(x_1, \cdots, x_m, y, u),\ H(x_1, \cdots, x_m, w, v),\ S(y, w) \to F(x_1, \cdots, x_m, y). \quad (11)$$

$$P(w, z) \to Q(w, 0, y, y). \quad (12)$$

ここで，$\boldsymbol{S}_g$ には述語記号 $F$ と $Q$ は現れないものとする．この $\boldsymbol{S}_f$ と $F$ によって(10)の $f$ は Horn 集合計算可能であることを示すことができる．まず，$f(a_1, \cdots, a_m) = b$ のとき，$F(a_1, \cdots, a_m, y) \to$ で始まる反証で $y$ に $b$ が代入されるものの存在を示すことは容易である．これは，最初に S 規則によって $y$ に $b$ を代入し，そのあと R 規則を繰り返し適用することによって得られる．また，$f(a_1, \cdots, a_m)$ が定義されないとき，$F(a_1, \cdots, a_m, y) \to$ で始まる反証は存在しないことも容易にわかる．反証が存在するとき，$y$ に代入される定数の一意性については，反証が存在するのは(11)において $u \neq 0$ でかつ $v=0$ の場合だけであることからわかる．(証了)

## 3. 決定性反証による Horn 集合計算可能性

この章では，反証をつくる過程が決定性をもつとき，すなわち後戻りすることなしに推論を繰り返すことによって空節に到達する場合，この反証によって Horn 集合計算可能な関数について論じる．

［定義 2］ 正規集合が決定性をもつというのは，その集合に属するすべての節がつぎの(i)，(ii)を満たしているときである．

(i) 最後の引数が変数であるアトムが節の左辺に2個以上ある場合，それらアトムの最後の引数である変数は，すべて異なっている．

(ii) $m+1$ 引数の述語記号 F を右辺の述語記号とする節が $n\ (n>1)$ 個正規集合内に存在する場合，F の最初の $m$ 引数に代入されるすべての定数 $a_1, \cdots, a_m$ に対して，1個の節を除く $n-1$ 個の節についてはつぎの(ii-a)と(ii-b)のいずれかが成立する．

(ii-a) ある $i\ (1 \leq i \leq m)$ が存在して，節の右辺の $i$ 番目の引数 $\mathrm{t}_i$ は定数であり，かつ $\mathrm{t}_i \neq a_i$.

(ii-b) ある $j\ (1 \leq j \leq m)$ が存在して，節の右辺の $j$ 番目の引数 $\mathrm{t}_j$ は変数であり，かつ左辺のアトムのうち $P$ を述語記号とするものを並べ変えることにより，

$$P(\mathrm{t}_j, \mathrm{x}_1),\ P(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2), \cdots, P(\mathrm{x}_{p-1}, \mathrm{x}_p)$$

である鎖が存在し，$a_j < p$. ここで，$\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_p$ は変数である．

最後の引数以外のすべての引数が定数であるアトムを完全引数アトムということにする．

［定義 3］ Horn 集合計算可能関数が決定性反証によって計算可能というのは，定義1において $\boldsymbol{S}$ は決定性をもち，かつ $y$ に $b$ が代入される反証には負節から完全引数アトムを消去する R 規則のみを適用することによってつくられるものが存在するときである．

［補題］ 決定性反証によって計算可能な関数の反証をつくる過程において負節に2個以上の完全引数アトムが現れた場合，R 規則の対象としてそのうちのどれ

を選ぶかは，反証がつくれるかどうかということ，および反証によって求まる関数の値に影響を与えない．

（証明） 定義2の(ⅰ)から，これらの完全引数アトムのもつ変数はすべて異なることを示すことができる．したがって，そのうちの一つを消去するR規則の推論結果において，他の完全引数アトムは前提における形のままで残る． （証了）

補題から，決定性反証によって計算可能な関数に対する反証は，負節から完全引数アトムを消去するようなR規則の適用を繰り返すことによって作成可能であることがわかる．このとき，R規則の前提となりうる正規節は，定義2の(ⅱ)，および公理の形式からたかだか1個である．完全引数アトムの引数からこの正規節をみつける手順は，明らかに帰納的 (recursive) である．したがって，決定性反証によって計算可能な関数の場合は，後戻りすることなしに反証をつくる手順が存在する．この手順で完全引数アトムは負節において最も左に位置するもの（最左完全引数アトム）を選択するようにすれば，この場合の“決定性反証”とは，(5)においてすべての $\Theta_i \rightarrow (1 \leq i < n)$ の最左完全引数アトムがR規則によって消去されるものを意味することになる．

つぎに決定性反証と原始帰納的関数との関係を示す．

［定理 3］ 原始帰納的関数は，決定性反証によって計算可能である．

（証明） 定理1の証明において，原始帰納的関数が Horn 集合計算可能であることを示すために用いた正規集合は，すべて決定性をもつ．関数値を求める反証には，負節から完全引数アトムを消去するR規則の適用によってつくられるものが存在することは，原始帰納的関数の定義についての帰納法によって示すことができる． （証了）

決定性反証によって計算可能な関数のクラスは，原始帰納的関数のクラスを真に包含していることがつぎの定理からわかる．

［定理 4］ つぎの(13)式で定義される Ackermann 関数 $f$ は，決定性反証によって計算可能である．

$$\begin{cases} f(z+1, x+1, y)=f(z, f(z+1, x, y), y), \\ f(z+2, 0, y)=1, \\ f(1, 0, y)=0, \\ f(0, x+1, y)=f(0, x, y)+1, \\ f(0, 0, y)=y. \end{cases} \qquad (13)$$

（証明） (13)で示される Ackermann 関数は，つぎの5個の節からなる決定性をもつ正規集合と述語記号 $F$ によって Horn 集合計算可能であり，決定性反証によって計算可能である．

$$F(z, v, y, u),\ F(t, x, y, v),\ P(s, x),\ P(t, z) \rightarrow F(t, s, y, u);$$
$$P(s, z),\ P(t, s) \rightarrow F(t, 0, y, 1);$$
$$\rightarrow F(1, 0, y, 0);$$
$$F(0, x, y, u),\ P(s, x),\ S(u, t) \rightarrow F(0, s, y, t);$$
$$\rightarrow F(0, 0, y, y).$$

（証了）

しかし，決定性反証によって計算可能な関数のクラスは，部分帰納的関数のクラスを包含しない．

［定理 5］ 決定性反証によって計算可能ではない部分帰納的関数が存在する．

（証明） $m$ 引数部分帰納的関数 $f(x_1, \cdots, x_m)$ が決定性反証によって計算可能な $m+1$ 引数全域関数 $g$ から

$$f(x_1, \cdots, x_m)=\mu y[g(x_1, \cdots, x_m, y)=0]$$

によって定義されているとする．$\mu$ 演算は，$g$ が計算可能であるとき，その計算手順を利用して条件 $g(a_1, \cdots, a_m, y)=0$ を満たす最小の自然数を見つける操作である（文献 3）の §63)ので，$g$ を決定性反証によって計算可能とする正規集合と述語記号を $\boldsymbol{S}_g$, $G$ とすると，$f$ を Horn 集合計算可能にするための正規集合 $\boldsymbol{S}_f$ は，

$$\boldsymbol{S}_f=\boldsymbol{S}_g \cup \boldsymbol{S}_\mu$$

で表される．$\boldsymbol{S}_\mu$ は，$\mu$ 演算を実行するための正規集合である．また，$\mu$ 演算の性格から $\boldsymbol{S}_g$ と $\boldsymbol{S}_\mu$ は $G$ と $P$, $S$ 以外には共通の述語記号はないとしてもよい．いま，$f$ が決定性反証によって計算可能であると仮定すると，任意の自然数 $a_1, \cdots, a_m$, $b$ に対して $f(a_1, \cdots, a_m)=b$ のときは，定義3に示されたような反証が存在し，この反証には $G$ が必ず出現する．$G$ が最初に出現する負節は，

$$\cdots, G(a_1, \cdots, a_m, y, 0), \cdots \rightarrow \qquad (14)$$

のような形をしている．例外は，$\boldsymbol{S}_g$ が

$$\cdots \rightarrow G(x_1, \cdots, x_m, y, y)$$

のような節を含む場合で，このときは(14)において $y$ に0を代入したものが現れる．このときの関数 $f$ は $\lambda x_1 \cdots x_m[0]$ である．この場合を除けば，(14)に示されたアトムがR規則の対象となるのは，他のアトムによって $y$ に定数が代入されたあとである．ここで，

この定数は $b$ でなければならない．そうでないならば，反証が存在しないか，あるいは $f$ が Horn 集合計算可能ではないことになる．ところで，この代入のために消去されるアトムの述語記号は，$S_\mu$ に現れるものでなければならない．なぜなら，$S_\mu$ に現れない述語記号が反証に現れるのは，(14)に示されたアトムが消去されたあとである．このことは，$S_g$ に無関係に $f$ を決定性反証によって計算可能とする正規集合が存在することを意味する．しかし，これは最初に述べた $\mu$ 演算子の意味に反する．　(証了)

## 4. 反証系における優先則

3章で，反証系に後戻りを生じさせる要因は，$\mu$ 演算にあることを述べた．ただし，関数値がわかっている場合は，後戻りなしに反証をつくることができる．(9)式で定義された関数 $f$ がある自然数 $a_1, \cdots, a_m$ に対して

$$f(a_1, \cdots, a_m)=b$$

であるとき，定理2の証明で述べたように，まず

$$F(a_1, \cdots, a_m, y)\rightarrow$$

に S 規則を適用して $y$ に $b$ を代入すれば，このあとは完全引数アトムを R 規則によって消去することを繰り返すことによって反証をつくることができる．

しかし，定理2の証明に示した $S_f$ では，R 規則だけで反証をつくることができない．つまり，S 規則によって正しい関数値を代入したときのみ反証が存在するため，この値をみつけるためには S 規則によって適当な値を代入して R 規則による推論を反復し，これが継続できなくなると後戻りをして再び S 規則によって別の値を代入するといった過程を繰り返さなければならない．こうなる理由は，定義1では反証のつくり方に制限を設けず，反証が存在するときには常に正しい関数値が得られることを要求しているためである．

いま，推論規則の適用の方法に制限を設け，任意の自然数 $a_1, \cdots, a_m$ に対し，$F(a_1, \cdots, a_m, y)\rightarrow$ からこの方式により最初に空節に到達したとき，$y$ に最後に代入される定数 $b$ によって，$f(a_1, \cdots, a_m)$ の値 $b$ を“計算”したことにすれば，この計算では S 規則は不要である．この方式は，下記のように R 規則の適用に当たって，前提となる正規節の選択にいくつかの可能性があるとき，あらかじめ定めた優先順位に従って選択し，縦型 (depth-first) 探索方式の後戻りを行うものである．

[推論方式 D]

(i) 正規集合の節には，あらかじめ順位をつける．この順位は公理にもつける．公理は正規集合の節より順位が高い．公理間の順位は，(3)の形のものは(4)の形のものより高く，また第1引数の添字の値が小さいほど順位が高い．

(ii) 推論規則は R 規則に限る．

(iii) 推論の前提である負節から消去の対象とするアトムは，完全引数アトムに限る．

(iv) 推論の前提として選択する正規節は，候補となりうる正規節のうち最も順位の高いものである．候補になりうる正規節とは，(ii)を可能とするもののうち，いま推論の前提としている負節に対しては一方の前提として選択されたことがない正規節である．

(v) 推論が続行できなくなったとき，後戻りして再び推論の前提として選ばれる負節は，それに対して候補となりうる正規節が存在するもののうち，推論の過程で最も遅く出現した負節である．

さて，決定性反証によって Horn 集合計算可能な関数の場合は，正規集合の節の間にどのような順位をつけようとも，方式 D によって“計算可能”であること，すなわち必ず空節に到達し，正しい関数値を得ることができることは明らかである．いま，(9)式で定義された関数 $f$ に対する正規集合 $S_f$ は，定理2の証明中の $S_g$ につぎの3個の節を加えたものとする．

$$H(x_1, \cdots, x_m, 0, y)\rightarrow F(x_1, \cdots, x_m, y). \quad (15)$$

$$H(x_1, \cdots, x_m, v, y),\ S(u, v)$$
$$\rightarrow H(x_1, \cdots, x_m, u, y). \quad (16)$$

$$G(x_1, \cdots, x_m, y, 0)\rightarrow H(x_1, \cdots, x_m, y, y). \quad (17)$$

ここで，$F$ と $H$ は $S_g$ には現れないものとする．$S_f$ における節の順位は，(17)が最も高く，(16)，(15)の順で低くなる．$S_g$ の節は，すべて(15)より順位が低いものとする．もし，$g$ が $S_g$ と $G$ によって方式 D で“計算可能”であるならば，$f$ は $S_f$ と $F$ によって方式 D で“計算可能”である．ここでは，これを証明するかわりに例示するだけにとどめる．いま，$m=1$ の場合を考えることにし，$f(5)=2$ であるとする．この場合の推論過程を負節の系列で示せば，つぎのようになる．

$$
\begin{array}{r}
F(5, y)\to, \\
H(5, 0, y)\to, \\
G(5, 0, 0)\to, \\
\vdots \\
\langle\text{後戻り}\rangle \\
H(5, v, y),\ S(0, v)\to, \\
H(5, 1, y)\to, \\
G(5, 1, 0)\to, \\
\vdots \\
\langle\text{後戻り}\rangle \\
H(5, v, y),\ S(1, v)\to, \\
H(5, 2, y)\to, \\
G(5, 2, 0)\to, \\
\vdots \\
\to
\end{array}
$$

ここで，$y$ には最後に 2 が代入されていることがわかるであろう．

正規節(16)と(17)の間の順位は，推論過程においてできるだけ早く $G$ を述語記号とするアトムが負節に出現するように決めている．このアトムの消去は，(16)と(17)には無関係であるため，(16)と(17)による推論を行う部分は，このアトムが消去できるかどうかを一種の判定として使っている．したがって，判定として利用するということでは，この $G$ のアトムの消去が複数回の推論によって行われるか，1 回の推論で行われるかは問題ではない．1 回の推論によって消去されるとみなすことは，$G$ についてはあたかも公理と同じように正基礎節 (positive ground clause) の集合があるとみなすことである．そのため，(16)と(17)に対して定めた順位は，1 段の先読みによる単一優先戦略 (unit preference strategy[5]) であるとみることもできる．

## 5. む す び

本論文では，決定性手順でつくられる Horn 集合の反証によって計算可能な数論的関数のクラスは，原始帰納的関数のクラスを包含しそれよりも大きいが，部分帰納的関数のクラスは包含しないことを示した．しかも，決定性手順の反証では計算可能でない関数については，導出演算 (resolution operation) だけでは反証をつくることができず，代入演算 (substitution operation) が必要である．これは，推論規則の適用に制限を設けず，しかもすべての反証について解の一意性を要求したことによって生じたのであり，推論の方法を固定し，この方法によって最初に完了した推論により関数値を求めることにすれば代入演算は不要である．

本論文における反証系の定式化は，実際の Horn 集合の反証手続きに近いため，ここでの考察は Horn 集合反証器の設計に多くの示唆を与えるものと考えられる．

## 参 考 文 献


1) Andreka, H. and Nemeti, I.: The Generalized Completeness of Horn Predicate-Logic as a Programming Language, D. A. I. Res. Rep., No. 21, Dept. of Artificial Intelligence, Univ. of Edinburgh (1976).
2) Hill, R.: LUSH Resolution and its Completeness, DCL memo 78, Dept. of Artificial Intelligence, Univ. of Edinburgh (1974).
3) Kleene, S. C.: *Introduction to Metamathematics*, p. 550, D. Van Nostrand, Princeton, N. J. (1952).
4) Kowalski, R.: Predicate Logic as Programming Language, *Information Processing 74*, pp. 569–574, North-Holland, Amsterdam (1974).
5) Loveland, D. W.: *Automated Theorem Proving: A Logical Basis*, p. 405, North-Holland, Amsterdam (1978).
6) Šebelík, J. and Štěpánek, P.: Horn Clause Programs for Recursive Functions, in Clark, K. L. and Tärnlund, S.-Å. (eds.), *Logic Programming*, pp. 325–340, Academic Press, London (1982).
7) Tärnlund, S.-Å.: Logic Information Processing, TRITA-1034, Dept. of Computer Science, Royal Institute of Technology, Stockholm (1975).
8) Tärnlund, S.-Å.: Horn Clause Computability, *BIT*, Vol. 17, No. 2, pp. 215–226 (1977).


(昭和58年 5 月20日受付)
(昭和58年11月15日採録)