コーシーの主値積分に対する自動積分法†

長谷川 武光†† 鳥居 達生†††

滑らかな関数 $f(x)$ に対する有限区間でのコーシーの主値積分 $I(c)=P\int_a^b f(x)/(x-c)dx$, $a<c<b$, の能率的な自動積分法を示す．関数 $f(x)$ が滑らかとすると，このチェビシェフ級数展開は収束が速い．そこで，極 c による特異性を除去するよう積分を変形した後，入力関数 $f(x)$ をチェビシェフ展開し項別積分する．このとき積分の誤差が極 c の位置に無関係な値で評価されるので，要求精度に対し一連の c の値に対する積分 $I(c)$ の組を同じ標本数で一度に求めることができる．また通常の項数を倍々と増す FFT の代りにより緩やかに増す FFT を用いてチェビシェフ展開を計算することにより，要求精度に対し無駄な標本数の節減を図った．数値実験の結果，本自動積分法は効率が高い方法であることが示される．

1. はじめに

与えられた関数 $f(x)$ に対する区間 $[-1,1]$ でのコーシーの主値積分

$$I=P\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{x-c}dx$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-1}^{c-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-c}dx+\int_{c+\varepsilon}^{1}\frac{f(x)}{x-c}dx\right\}$$
$$-1<c<1 \tag{1}$$

の近似値を求める問題は，その性質上通常の数値積分法では扱いにくい．任意の有限区間 $[a,b]$ での積分は変数変換により(1)に帰着する．要求絶対誤差 ε_a (または相対誤差 ε_r) に対して

$$|I-I_N|\leqq\varepsilon \tag{2}$$

ここで

$$\varepsilon=\max(\varepsilon_a,\ \varepsilon_r|I|)$$

を満足する近似値 I_N を計算する算法を自動積分法という．この方法では

(1) 標本点数を増しながら近似値の列 $\{I_N\}$ を作り，

(2) 適当な方法により誤差 $|I-I_N|$ の推定を行い，この推定誤差が(2)を満足したら停止する．

したがって，標本数固定のガウス型積分則はこの方法に組み込みにくい (積分(1)に対するガウス型公式は Longman[1] をはじめ多くの人により研究されている[2])．さて，できるだけ少ない標本点数 (=関数評価回数) で(2)を満足する方法が能率的な方法である．このためには，収束の速い積分則を用いて $\{I_N\}$ を計算するとともに，信頼性の高い誤差推定能力と標本点数を緩やかに増すことが要求される．また，一連の極 c の値に対して積分(1)が少ない手間で一度に計算されることも望ましい．換言すれば，積分則の精度は c と無関係であることが要求される．

関数 $f(x)$ が十分滑らかと仮定すると，このチェビシェフ展開

$$f(x)\cong\sum_{k=0}^{N}{}''a_k^N T_k(x) \tag{3}$$

は収束が速い．ここで，$T_k(x)=\cos k\theta$ ($x=\cos\theta$) は k 次チェビシェフ多項式，$\sum''$ は初項と末項のみ 1/2 倍して総和することを意味する．$N+1$ 次多項式 $\omega_{N+1}(x)$ を

$$\omega_{N+1}(x)=T_{N+1}(x)-T_{N-1}(x) \tag{4}$$

で定義すると，係数 a_k^N は $\omega_{N+1}(x)=0$ の根 $x_j=\cos\pi j/N$, $j=0,1,\cdots,N$, 上で(3)の右辺が $f(x)$ の補間式となるように決められる．

Chawla と Kumar[3] は近似(3)を(1)の $f(x)$ に代入し I の近似値 I_N

$$I_N=\sum_{k=0}^{N}{}''a_k^N w_k(c) \tag{5}$$

を得た．ここで，$w_k(c)=P\int_{-1}^{1}\{T_k(x)/(x-c)\}dx$ は k に関する3項漸化式によって簡単に計算される．ところが，この I_N の誤差 $|I-I_N|$ が極 c に依存するため同じ要求絶対誤差 ε_a では一連の c の値に対する積分(1)を一度には求められない．すなわち，標本数 N は要求精度 ε だけでなく c に依存するので $N=N(\varepsilon, c)$ である．この場合，各 c の値ごとに I_N を計算しなければならない．

† Automatic Quadrature for Cauchy Principal Value Integrals by TAKEMITSU HASEGAWA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Fukui University) and TATSUO TORII (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 福井大学工学部情報工学科
††† 名古屋大学工学部情報工学

さて積分(1)は

$$I=\int_{-1}^{1} g(x)dx+f(c)\ln\left(\frac{1-c}{1+c}\right) \tag{6}$$

ここで

$$g(x)=\{f(x)-f(c)\}/(x-c) \tag{7}$$

とも書かれる[4]. このとき, $g(x)$ は $x=c$ が特異点でなくなり滑らかとなるのでチェビシェフ展開できる. Kumar[5] は直接 $g(x)$ を(3)の右辺のようにチェビシェフ展開した. このとき I_N は

$$I_N=\sum_{j=0}^{N}{}'' A_j^N g(x_j)+f(c)\ln\left(\frac{1-c}{1+c}\right) \tag{8}$$

と表される. ここで補間点 x_j は $\omega_{N+1}(x_j)=0$ を満足する. また A_j^N は

$$A_j^N=\frac{4}{N}\sum_{k=0}^{N/2}{}'' T_{2k}(x_j)/(1-4k^2)$$

である. この方法では同じ標本点数で近似(5)より高精度が得られるが, $g(x_j)$ を $g(x_j)=\{f(x_j)-f(c)\}/(x_j-c)$ によって計算する際 x_j が c に近いとき数値的不安定性が生ずる欠点がある.

本方法では, $f(x)$ のチェビシェフ展開(3)を(7)の右辺に用いる. すると積分の近似値 I_N は

$$I_N=\int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{N}{}'' \frac{a_k^N\{T_k(x)-T_k(c)\}}{x-c}dx + f(c)\ln\left(\frac{1-c}{1+c}\right) \tag{9}$$

と表される. ここで

$$\sum_{k=0}^{N}{}'' \frac{a_k^N\{T_k(x)-T_k(c)\}}{x-c}=\sum_{k=0}^{N-1}{}'' d_k T_k(x) \tag{10}$$

とおき, この右辺を(9)に代入し項別積分すると

$$I_N=2\sum{}' d_{2k}/(1-4k^2)+f(c)\ln\left(\frac{1-c}{1+c}\right) \tag{11}$$

となる. ここで $\sum'$ は $k=0$ から $N/2-1$ まで初項のみ 1/2 倍して総和することを意味する. 係数 d_k は $d_{N+1}=d_N=0$ とおいて漸化式

$$2a_k^N=d_{k+1}-2cd_k+d_{k-1}$$
$$k=N, N-1, \cdots, 1 \tag{12}$$

を逆向きに計算することにより安定に求められる. この方法では前述の x_j が c に近いときの数値的不安定性が除かれる.

ところで, 積分則(11)は $N+1$ 個の標本点 x_j と極 c での合計 $N+2$ 個の関数値を用いながら, $f(x)$ が N 次以下の多項式に対して厳密である. すなわち, 前記の通常の補間型積分則より次数を1次犠牲にしている. しかし, このことにより上記の数値的不安定性の除去と同時に(11)の I_N の誤差 $|I-I_N|$ が c に依存しないようにできる((34), (36)参照). したがって, 与えられた要求絶対誤差 ε_a に対して一連の c の値に対する近似値を1回のチェビシェフ展開の手間で計算できる. またチェビシェフ展開係数 $a_k^N(k=0, 1, \cdots, N)$ は FFT を用いて能率的に計算される.

さらに本方法では, 自動積分法としての能率を高めるため

(i) 積分則(11)の誤差推定を誤差の複素積分表示と関数 $f(x)$ の解析性を仮定して精密に行い,

(ii) この推定誤差が(2)を満足するまで従来の項数 N を倍々と増す FFT の代りに, より緩やかに増す FFT[6] を用いてチェビシェフ展開(3)の列を作ることにより無駄な標本数を節約する.

Piessens らの方法[7]は現在最も能率的な自動積分法の一つであるが, 区分的にチェビシェフ多項式展開を利用した適応型手法を用いている. このため, 一連の極 c の値に対してはその度ごとに計算をしなければならない. また誤差推定能力もあまり高くない. 数値実験の結果, 関数 $f(x)$ が滑らかであるほど本方法は Piessens らの方法より効率が高いことが示される.

2. 倍々より緩やかに項数を増すチェビシェフ展開

次数 N を $2^n, 3\times 2^{n-1}(n=1, 2, \cdots)$ と増すチェビシェフ展開(3)の列の作り方を示す. $N=2^n$ と仮定する. (4)より $\omega_{N+1}(x)=0$ の根 $x_j=\cos\pi j/N(0\leqq j\leqq N)$ 上でチェビシェフ展開(3)が $f(x)$ の補間式となるように離散型フーリエ係数 a_k^N を決定する.

$$f(x_j)=\sum_{k=0}^{N}{}'' a_k^N T_k(x_j), \quad 0\leqq j\leqq N \tag{13}$$

したがって

$$a_k^N=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N}{}'' f(x_j)T_k(x_j) \tag{14}$$

つぎに, (14)の右辺が与えられたとして $N/2$ 個の標本点 u_j

$$u_j=\cos\theta_j, \quad \theta_j=4\pi(j+1/8)/N, \quad 0\leqq j<N/2 \tag{15}$$

すなわち $T_{N/2}(u_j)-\cos\pi/4=0$, を追加して $N+N/2$ 次チェビシェフ級数

$$p_{N+N/2}(x)=\sum_{k=0}^{N}{}'' a_k^N T_k(x) + \sum_{k=1}^{N/2} b_k\{T_{N-k}(x)-T_{N+k}(x)\} \tag{16}$$

を作る. 補間係数 b_k の計算法および(16)の打切り誤

差については文献 6) を参照. さらに $T_{N/2}(x)+\cos\pi/4=0$ の $N/2$ 個の根を標本点として追加すると

$$\omega_{2N+1}(x)=4\omega_{N+1}(x)\{T_{N/2}(x)-\cos\pi/4\}\times\{T_{N/2}(x)+\cos\pi/4\}$$

であるから倍の次数 $2N$ 次のチェビシェフ展開 (3) が得られる. 以上の手順を繰り返すことにより倍々より緩やかに標本数を増すチェビシェフ展開の列が作られてゆく.

3. 積分の誤差評価

$N=2^n$ と仮定する. $f(x)$ のチェビシェフ展開の次数が N または $N+N/2$ に応じて積分の近似値は (11) の I_N であるかあるいは (16) を用いて (9), (10) と同様の方法により

$$I_{N+N/2}=2\sum{}' d'_{2k}/(1-4k^2)+f(c)\ln\left(\frac{1-c}{1+c}\right) \tag{17}$$

で与えられる. Σ' は $k=0$ から $N/2+N/4-1$ まで初項のみ 1/2 倍して総和することを意味する. ここで係数 d'_k は $d'_{N+N/2+1}=d'_{N+N/2}=0$ とおいて漸化式

$$2A_k=d'_{k+1}-2cd'_k+d'_{k-1}$$
$$k=N+N/2,\ N+N/2-1,\cdots,1 \tag{18}$$

により安定に求められる. (18) の左辺の A_k は

$$A_k=\begin{cases}a_k^N, & 0\leqq k<N/2\\ a_k^N+b_{N-k}, & N/2\leqq k<N\\ a_N^N/2, & k=N\\ -b_{k-N}, & N<k\leqq N+N/2\end{cases}$$

である. この章では, これら I_N と $I_{N+N/2}$ の打切り誤差評価について述べる.

チェビシェフ補間式 (3) の誤差は複素積分表示を用いて

$$f(x)-\sum_{k=0}^{N}{}'' a_k^N T_k(x)=\frac{\omega_{N+1}(x)}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-x)\omega_{N+1}(z)} \tag{19}$$

と表される. ここで積分路 C_ρ は複素平面上の実軸上の 2 点, $-1, 1$ を焦点とする楕円

$$C_\rho:\ |z+\sqrt{z^2-1}|=\rho\quad \rho>1$$

であって, その内部に $f(z)$ の極を含まぬようにとる. 同様に

$$f(x)-p_{N+N/2}(x)=\frac{\omega_{N+1}(x)\{T_{N/2}(x)-\cos\pi/4\}}{2\pi i}\times\oint_{C_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-x)\omega_{N+1}(z)\{T_{N/2}(z)-\cos\pi/4\}} \tag{20}$$

(19) を (6), (7), (9) に用いると誤差 $I-I_N$ は

$$\begin{aligned}I-I_N=&P\int_{-1}^{1}dx\frac{\omega_{N+1}(x)}{x-c}\cdot\frac{1}{2\pi i}\times\oint_{C_\rho}\frac{f(z)}{(z-x)\omega_{N+1}(z)}dz\\&-P\int_{-1}^{1}dx\frac{\omega_{N+1}(c)}{x-c}\cdot\frac{1}{2\pi i}\times\oint_{C_\rho}\frac{f(z)}{(z-c)\omega_{N+1}(z)}dz\end{aligned} \tag{21}$$

となる. 複素数 $z\notin[-1,1]$ に対して恒等式

$$1/(z-x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\tilde{U}_n(z)T_n(x) \tag{22}$$

ただし

$$\begin{aligned}\tilde{U}_n(z)&=\int_{-1}^{1}\{T_n(x)/(z-x)\sqrt{1-x^2}\}dx\\&=\pi/(w^n\sqrt{z^2-1})\end{aligned} \tag{23}$$

$$w=z+\sqrt{z^2-1},\quad |w|>1$$

を (21) に用いると

$$I-I_N=\sum_{n=0}^{\infty}{}'V_n^N W_n^N \tag{24}$$

を得る. ここで

$$V_n^N=\frac{1}{\pi^2 i}\oint_{C_\rho}\{\tilde{U}_n(z)f(z)/\omega_{N+1}(z)\}dz \tag{25}$$

$$W_n^N=\int_{-1}^{1}[\{\omega_{N+1}(x)T_n(x)-\omega_{N+1}(c)T_n(c)\}/(x-c)]dx \tag{26}$$

である. 付録より W_n^N は N, n および極 c に無関係に $|W_n^N|<8$ が成り立つので (24) より

$$|I-I_N|<8\sum_{n=0}^{\infty}{}'|V_n^N| \tag{27}$$

となる. 同様にして (6), (7), (16), (17), (20) より

$$I-I_{N+N/2}=\sum_{n=0}^{\infty}{}'V_n^{N+N/2}\{(W_n^{N+N/2}+W_n^{N/2})/2-W_n^N/\sqrt{2}\}$$

ここで

$$V_n^{N+N/2}=\frac{1}{\pi^2 i}\oint_{C_\rho}\frac{\tilde{U}_n(z)f(z)}{[\omega_{N+1}(z)\{T_{N/2}(z)-\cos\pi/4\}]}dz \tag{28}$$

また, $W_n^{N+N/2}, W_n^{N/2}$ は (26) で定義される. したがって

$$|I-I_{N+N/2}|<(8+4\sqrt{2})\sum_{n=0}^{\infty}{}'|V_n^{N+N/2}| \tag{29}$$

簡単のため $f(z)$ が楕円 C_ρ の外側に J 個の 1 位の極 $z_j\ (j=1,2,\cdots,J)$ をもつ有理関数と仮定する. (25) の右辺の複素積分を実行すると

$$V_n^N=-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{J}\tilde{U}_n(z_j)\,\mathrm{Res}\,f(z_j)/\omega_{N+1}(z_j) \tag{30}$$

ここで $\mathrm{Res}\,f(z_j)$ は z_j における留数である．したがって，$r=\min_j|z_j+\sqrt{z_j^2-1}|(>1)$ とおくと ρ の上限は r となり $|V_n^N|\sim|V_0^N|r^{-n}=O(r^{-(N+1+n)})$．これを(27)に代入すると

$$|I-I_N|<8|V_0^N|\sum_{n=0}^{\infty}{}'r^{-n}=4|V_0^N|(r+1)/(r-1) \tag{31}$$

同様にして(28)より

$$|V_n^{N+N/2}|\sim|V_0^{N+N/2}|r^{-n}=O(r^{-(N+N/2+1+n)})$$

であるから(29)より

$$|I-I_{N+N/2}|<(4+2\sqrt{2})|V_0^{N+N/2}|(r+1)/(r-1) \tag{32}$$

つぎに，(31)，(32)の $|V_0^N|$，$|V_0^{N+N/2}|$ をそれぞれ実際に計算される離散チェビシェフ係数 a_n^N，b_nを用いて表そう．Elliott[8] は

$$a_n^N=\frac{2}{\pi i}\int_{C_\rho}\{T_{N-n}(z)f(z)/\omega_{N+1}(z)\}dz \tag{33}$$

を示した．右辺の複素積分を実行し(30)と比較すると $|V_0^N|\simeq 4|a_N^N|r/(r^2-1)$ を得る．これを(31)に代入すると漸近的誤差評価として

$$|I-I_N|<16|a_N^N|r/(r-1)^2 \tag{34}$$

実際には，r は $\{a_n^N\}$ の漸近的振舞いから推定され

表 1　積分 $P\int_{-1}^{1}[\exp\{a(x-1)\}/(x-c)]dx$ に対する本方法と Piessens らの方法[7]との性能の比較

Table 1　Comparison of the performances of the present method and that by Piessens et al.[7] for $P\int_{-1}^{1}[\exp\{a(x-1)\}/(x-c)]dx$.

a	c	$\varepsilon_a=10^{-6}$ 本方法 標本数	誤差	Piessens 標本数	誤差	$\varepsilon_a=10^{-10}$ 本方法 標本数	誤差	Piessens 標本数	誤差
4	0.2	18	1. E−10	25	2. E−15	26	2. E−15	105	3. E−13
	0.5	18	2. E−11	25	4. E−15	26	4. E−15	105	4. E−14
	0.95	18	6. E−11	25	1. E−14	26	2. E−14	105	2. E−13
8	0.2	26	9. E−13	105	7. E−13	26	9. E−13	145	7. E−13
	0.5	26	3. E−13	105	2. E−15	26	3. E−13	185	4. E−13
	0.95	26	1. E−12	65	4. E−15	26	1. E−12	145	2. E−13
16	0.2	34	7. E−13	105	7. E−13	34	7. E−13	185	7. E−13
	0.5	34	6. E−13	145	8. E−13	34	6. E−13	225	8. E−13
	0.95	34	2. E−14	105	6. E−16	34	2. E−14	185	1. E−13

表 2　積分 $P\int_{-1}^{1}\{(x^2+a^2)^{-1}/(x-c)\}dx$ に対する本方法と Piessens らの方法との性能の比較

Table 2　Comparison of the performances of the present method and that by Piessens et al. for $P\int_{-1}^{1}\{(x^2+a^2)^{-1}/(x-c)\}dx$.

a	c	$\varepsilon_a=10^{-6}$ 本方法 標本数	誤差	Piessens 標本数	誤差	$\varepsilon_a=10^{-10}$ 本方法 標本数	誤差	Piessens 標本数	誤差
1	0.2	26	8. E−10	65	4. E−13	34	6. E−13	145	4. E−13
	0.5	26	5. E−10	65	5. E−13	34	5. E−13	145	5. E−13
	0.95	26	2. E−9	65	5. E−13	34	1. E−13	105	7. E−13
$\frac{1}{4}$	0.2	98	1. E−9	225	2. E−11	130	7. E−13	365	3. E−12
	0.5	98	8. E−10	215	9. E−12	130	5. E−13	325	3. E−12
	0.95	98	1. E−9	165	1. E−11	130	1. E−13	235	2. E−12
$\frac{1}{8}$	0.2	194	3. E−9	335	6. E−12	258	1. E−12	505	1. E−11
	0.5	194	6. E−8	225	3. E−11	258	2. E−13	445	1. E−12
	0.95	194	1. E−9	255	5. E−12	258	5. E−13	325	1. E−11

る．これで実際に計算される量 a_n^N から(34)によって誤差 $|I-I_N|$ が推定される．一方，b_n は

$$b_n=\frac{-1}{\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{T_{N/2-n}(z)f(z)}{\omega_{N+1}(z)\{T_{N/2}(z)-\cos\pi/4\}}dz$$

$$1\leqq n\leqq N/2 \qquad (35)$$

と表される（文献9）参照）．ここで $n=N/2$ の場合のみ右辺を 1/2 倍する．この右辺の複素積分を実行することにより $|V_0^{N+N/2}|\cong 8|b_{N/2}|r/(r^2-1)$ を得る．これを(32)に代入すると

$$|I-I_{N+N/2}|<16(2+\sqrt{2})|b_{N/2}|r/(r-1)^2 \qquad (36)$$

となる．(34), (36)より I_N と $I_{N+N/2}$ の打切り誤差が評価される．

4. 数 値 例

5種類のタイプの関数 $f(x)$ に対して数値実験を行って本方法の性能を，現在発表されている方法のなかで能率的な自動積分法である Piessens らの方法[7]と比較した．

1) $P\int_{-1}^{1}\frac{\exp\{a(x-1)\}}{x-c}dx$

2) $P\int_{-1}^{1}(x^2+a^2)^{-1}/(x-c)dx$

3) $P\int_{0}^{1}\frac{\cos 2\pi ax}{x-c}dx$

表 3 積分 $P\int_0^1\{\cos(2\pi ax)/(x-c)\}dx$ に対する本方法と Piessens らの方法との性能の比較

Table 3 Comparison of the performances of the present method and that by Piessens et al. for $P\int_0^1\{\cos(2\pi ax)/(x-c)\}dx$.

a	c	$\varepsilon_a=10^{-6}$				$\varepsilon_a=10^{-10}$			
		本方法		Piessens		本方法		Piessens	
		標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差
8	0.6	50	2. E−10	325	2. E−11	66	1. E−13	495	4. E−12
	0.8	50	1. E−10	355	1. E−11	66	1. E−13	425	5. E−12
	0.95	50	3. E−11	305	3. E−12	66	2. E−13	505	4. E−12
16	0.6	98	6. E−13	555	2. E−11	98	6. E−13	875	2. E−13
	0.8	98	5. E−14	635	1. E−11	98	5. E−14	785	1. E−11
	0.95	98	2. E−13	595	2. E−11	98	2. E−14	975	2. E−12
32	0.6	194	1. E−16	1055	4. E−12	194	1. E−16	1015	3. E−12
	0.8	194	2. E−14	1205	5. E−12	194	2. E−14	1405	7. E−12
	0.95	194	1. E−13	1125	3. E−11	194	1. E−13	1595	8. E−13

表 4 積分 $P\int_0^1\{(1-a^2)/(1-2ax+a^2)/(x-c)\}dx$ に対する本方法と Piessens らの方法との性能の比較

Table 4 Comparison of the performances of the present method and that by Piessens et al. for $P\int_0^1\{(1-a^2)/(1-2ax+a^2)/(x-c)\}dx$.

a	c	$\varepsilon_a=10^{-6}$				$\varepsilon_a=10^{-10}$			
		本方法		Piessens		本方法		Piessens	
		標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差
0.8	0.15	98	4. E−9	195	7. E−13	130	3. E−12	305	3. E−13
	0.45	98	4. E−9	205	1. E−12	130	4. E−12	305	4. E−13
	0.95	98	4. E−8	305	2. E−12	130	1. E−11	385	2. E−12
0.9	0.15	194	4. E−8	255	5. E−13	258	1. E−11	365	3. E−13
	0.45	194	2. E−8	265	9. E−13	258	2. E−11	375	4. E−13
	0.95	194	9. E−8	335	2. E−12	258	1. E−10	445	5. E−13
0.95	0.15	386	6. E−9	315	3. E−13	770	1. E−14	425	2. E−13
	0.45	386	1. E−7	325	6. E−13	770	2. E−13	435	3. E−13
	0.95	386	5. E−7	395	2. E−12	770	8. E−13	505	6. E−13

表 5 積分 $P\int_0^1 \{\sqrt{1-x^2}/(x-c)\}dx$ に対する本方法と Piessens らの方法との性能の比較
括弧内の数値は収束判定を誤ったときの標本数

Table 5 Comparison of the performances of the present method and that by Piessens et al. for $P\int_0^1 \{\sqrt{1-x^2}/(x-c)\}dx$. The value in the parentheses indicates the number of sample points with which quadrature scheme failed to satisfy the required tolerance.

c	$\varepsilon_a=10^{-3}$				$\varepsilon_a=10^{-6}$			
	本方法		Piessens		本方法		Piessens	
	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差
0.6	130	1.E−4	(65)	2.E−3	1026	6.E−7	315	3.E−9
0.9	130	1.E−4	285	3.E−7	1026	6.E−6	405	4.E−9
0.95	130	1.E−4	295	5.E−7	1026	7.E−6	445	3.E−9

4) $P\int_0^1 \frac{1-a^2}{1-2ax+a^2}\cdot\frac{1}{x-c}dx$
$$=\frac{1-a^2}{1-2ac+a^2}\left\{\ln\left(\frac{1-c}{1+c}\right)-2\ln\left(\frac{1-a}{1+a}\right)\right\}$$
$0<a<1$

5) $P\int_0^1 \sqrt{1-x^2}/(x-c)dx$

問題 1) の関数は滑らか型, 2), 3), 4) および 5) はそれぞれピーク型, 振動型, 積分区間の外に極をもつ有理型および区間の端点に微係数の不連続点をもつ型である. 各問題 1)～4) のパラメータ a の値を変えてやさしい問題から困難な問題および問題 5) をテストした結果を**表 1～表 5** に示す. 表 5 の括弧内の数値は収束判定を誤ったときの標本数である. 表から微係数が不連続な型 5) を除いた残りのすべての型について本方法は, Piessens らの方法より効率が高いことがわかる. 本方法は滑らか型および振動型の関数 $f(x)$ に対してはとくに効率がよい. また本方法では推定誤差が極 c に依存しないので各 c の値に対して同じ標本点数となっている.

5. 結論と討論

本論文において, 有限区間のコーシーの主値積分の自動積分法を示した. 極 c による特異性を除去するよう積分を変形した後, 入力関数 $f(x)$ をチェビシェフ級数展開し項別積分する手法を用いた. 要求精度に対して無駄な標本数を節減するため, 従来の 2 のべき乗で項数を増す FFT の代りにより緩やかに増す FFT を用いてチェビシェフ展開を行った. 積分の誤差が極 c の位置に無関係な値で評価されるので, 要求絶対誤差 ε_a に対して一連の極 c の値の組に対する積分を同じ標本数で一度に求めることができる. Piessens らの自動積分法と比較し, 関数 $f(x)$ が滑らかであるほど本方法はより能率的な自動積分法であることが数値実験により示された.

本積分法は名古屋大学大型計算機センターにサブルーチンとして登録された.

謝辞 日頃ご討論いただく名古屋大学二宮市三教授に感謝いたします.

参 考 文 献

1) Longman, I. M.: On the Numerical Evaluation of Cauchy Principal Values of Integrals, *MTAC*, Vol. 12, No. 63, pp. 205-207 (1958).
2) Rabinowitz, P.: Gauss-Kronrod Integration Rules for Cauchy Principal Value Integrals, *Math. Comput.*, Vol. 41, No. 163, pp. 63-78 (1983).
3) Chawla, M. M. and Kumar, S.: Convergence of Quadrature for Cauchy Principal Value Integrals, *Computing*, Vol. 23, No. 1, pp. 67-72 (1979).
4) Davis, P. J. and Rabinowitz, P.: *Methods of Numerical Integration*, p. 148, Academic Press, New York (1975).
5) Kumar, S.: A Note on Quadrature Formulae for Cauchy Principal Value Integrals, *J. Inst. Math. Its Appl.*, Vol. 26, No. 4, pp. 447-451 (1980).
6) 鳥居達生, 長谷川武光: 標本点数を低倍率で漸増させる実関数の FFT, 情報処理学会論文誌, Vol. 24, No. 3, pp. 343-350 (1983).
7) Piessens, R., deDoncker, E., Überhuber, C. W. and Kahaner, D.: *QUADPACK, A Subroutine Package for Automatic Integration*, Springer-Verlag, Berlin (1983).
8) Elliott, D.: Truncation Errors in Two Chebyshev Series Approximations, *Math. Comput.*, Vol. 19, No. 90, pp. 234-248 (1965).

9) 長谷川武光，鳥居達生：激しい振動積分の自動積分法，情報処理学会論文誌，Vol. 25, No. 1, pp. 116-124 (1984).

付　録

式(26)の W_n^N が c に無関係に $|W_n^N|<8$ となることを示す．チェビシェフ多項式の積を和に変える公式

$$T_n(x)T_m(x)=\{T_{n+m}(x)+T_{|n-m|}(x)\}/2$$

を(26)の右辺に用い(4)を考慮すると

$$W_n^N=\frac{1}{2}P\int_{-1}^{1}[\{\omega_{N+n+1}(x)-\omega_{N+n+1}(c)\}/(x-c)]dx \pm\frac{1}{2}P\int_{-1}^{1}[\{\omega_{|N-n|+1}(x)-\omega_{|N-n|+1}(c)\}/(x-c)]dx \qquad (A.1)$$

となる．ここで $n=N$ のときは右辺第2項を無視する．また第2項の符号は $n\leqq N-1$ のとき正，$n\geqq N+1$ のとき負をとる．さて，第2種チェビシェフ多項式

$$U_n(x)=\sin(n+1)\theta/\sin\theta,\quad x=\cos\theta$$

を用いると恒等式

$$\frac{T_{n+1}(x)-T_{n+1}(c)}{x-c}=2\sum_{k=0}^{n}{}'U_{n-k}(c)T_k(x),\quad n\geqq 0 \qquad (A.2)$$

が成り立つ[8]．これと関係式 $U_n(x)-U_{n-2}(x)=2T_n(x)$ より (A.1) の右辺第1項は

$$\int_{-1}^{1}\left\{2\sum_{k=0}^{N+n-2}{}'\ T_{N+n-k}(c)T_k(x)+U_1(c)T_{N+n-1}(x)+U_0(c)T_{N+n}(x)\right\}dx \qquad (A.3)$$

となる．第2項も同様に得られる．チェビシェフ多項式の積分

$$\int_{-1}^{1}T_{2k}(x)dx=2/(1-4k^2),\quad \int_{-1}^{1}T_{2k+1}(x)dx=0$$

を (A.3) に用い，かつ

$$\left|2\sum_{k=0}^{m}{}'T_{2m-2k}(c)/(1-4k^2)\right|\leqq 2-1/(2m+1)$$

を考慮すると

$$|W_{2n}^N|\leqq 8-\left(\frac{1}{N+2n-1}+\frac{1}{N+2n+1}+\frac{1}{|N-2n|-1}+\frac{1}{|N-2n|+1}\right)<8,$$

$\left|\frac{N}{2}-n\right|\geqq 1$ のとき

$$|W_{2n+1}^N|\leqq 8-\left(\frac{1-|c|}{N+2n-1}+\frac{|c|}{N+2n+1}+\frac{1-|c|}{|N-2n-1|-2}+\frac{|c|}{|N-2n-1|}\right)<8,$$

$n\geqq N/2+1$ または $n\leqq N/2-2$ のとき

一方

$$|W_N^N|\leqq 4-\left(\frac{1}{2N-1}+\frac{1}{2N+1}\right)<4$$

$$|W_{N\pm1}^N|\leqq 4+4|c|-2\left(\frac{1-|c|}{2N-2\pm1}+\frac{1}{2N\pm1}\right)<8$$

したがって，任意の $n\,(\geqq 0)$ に対して $|W_n^N|<8$ が成り立つ．

(昭和59年1月25日受付)
(昭和59年4月17日採録)