Vol. 25 No. 5　　情報処理学会論文誌　　Sep. 1984

誤差関数とその周辺関数の数式処理と応用†

横尾英俊††　小枝祐司††　片桐理和††

誤差関数は工学や物理学において広く現われる関数で，熱伝導や流体力学の問題では現象の記述に中心的な役割を果たすことが多い．しかし，これらの現象を記述する微分方程式は機械的に解くことが可能であっても解析に繁雑な手間を要する場合が多く，そのような場合には数式処理システムの援用が期待できる．本論文では，このような場合に有効となる，誤差関数とそれに関連する関数向けの微分積分演算等の専用算法を提案する．これらの算法は LISP などのリスト演算に基礎を置くシステムの上では，簡単なリスト演算と四則のみの代数演算だけで実行でき，他の数式処理的な手続きを必要とせず簡明で高速である．したがって，大規模な数式処理システムを必ずしも前提とせずに，実用上有意味な計算をある程度行うことができる．本論文は，3章で述べるそのような問題の一つを具体的に解くために行った研究を数式処理という立場から述べたものである．

1. はじめに

数式処理システムの実用性がしだいに評価され，各方面での利用がようやく顕著になりつつある[1),2)]．本論文では，熱伝導[3)]や流体力学で重要な誤差関数を取り上げ，微分積分演算等の専用算法を提案する．

誤差関数は非初等関数であるが，比較的素直な性質を有し，既存の数式処理システムを用いても適当なプログラミングを行えば多くの解析的性質は処理可能であると考えられる．しかし，汎用の微分・積分演算機能等があるシステムでそれをそのまま用いたのでは，誤差関数の性質に比べあまりに一般的すぎ効率がいいとはいえない．

本論文では，まず2章でこのような意味での誤差関数の性質を明らかにするために，誤差関数とそれに関連する関数との集合に基本関数と一般形式という二つのクラスを定義し，その上での微分積分等の演算手続きを構成する．これらの演算は関数を規定するパラメータに対する簡単な手続きだけで実行できるので高速で，とくに一般に扱いにくい積分演算も単純な算法で完全に決定論的に行うことができる．これらで前提とする代数演算機能は四則だけであり，大型[4)]から小型までの数式処理システムに組み込むか，あるいはそれらの上で実行することが可能である．とくに，容量や速度の点でかなり制約の強いマイクロコンピュータ上のシステム[5)]でも実用上意味のある計算がある程度できると思われる．

3章では，2章で導入した機能だけで現実の微分方程式が解析できる例を示し，その有効性を確認する．

2. 基本演算

2.1 誤差関数と周辺関数の微積分

誤差関数の定義にはいくつかの流儀があるが，本論文では任意の正の実数aに対し，(2.1)式で定義されるものを誤差関数とよぶ．

$$\mathrm{erf}\,x = a\int_0^x \exp(-t^2)dt \tag{2.1}$$

次に，誤差関数に関連する関数を含むより一般的な関数を(2.2)式によって定義し，これを基本形式とよぶ．

$$\begin{aligned} &y(c, l, m, n\,;\,x) = c\exp(-lx^2)x^m(\mathrm{erf}\,x)^n, \\ &c = \text{定数}, \\ &l = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \\ &m, n = 0, 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.2)式は(2.1)式においてaの値をどのように定めても一般性を失わないので，記述の便宜上，本節から2.2節までは$a=1$とする．また，基本形式の線形結合を基本関数とよび，基本関数の集合をKで表す．そして，独立変数による微分を $'$ で表し，とくに断りのない場合の独立変数としてはxを仮定する．なお，(2.2)式を用いても独立変数単独で記述できないものは基本形式とはよばない．たとえば，後述の(2.5)式は基本形式ではない．

基本関数が一般的で重要である理由はKが微分演算に関し閉じているという点にあり，このことは(2.3)式によって容易に理解できる．

$$\begin{aligned} &y'(c, l, m, n\,;\,x) \\ &\quad = y(-2cl, l, m+1, n\,;\,x) + y(cm, l, m-1, n\,;\,x) \\ &\qquad + y(cn, l+1, m, n-1\,;\,x) \end{aligned} \tag{2.3}$$

† Symbolic Manipulation of the Error Function and Related Functions by Hidetoshi Yokoo, Yuji Koeda and Masakazu Katagiri (Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Yamagata University).

†† 山形大学工学部電気工学科

次に基本関数の不定積分を考える．Kは積分については閉じていないが，**基本形式の不定積分が基本関数**で表現可能かを判定し，可能な場合には不定積分の具体的な形を示す算法が(2.3)式を変形することによって得られる．それを次に再帰算法 integral として示す．

```
1: function integral (c, l, m, n; x);
2:   if c=0 then 0
3:   else if m=0∧l≠0 then
4:     if l=1 then y(c/(n+1), l−1, m, n+1; x)
5:     else c·INT (l, m, n; x)
6:   else if l=0 then
7:     y(c/(m+1), 0, m+1, n; x)
         −integral(cn/(m+1), 1, m+1, n−1; x)
8:   else y(−c/(2l), l, m−1, n; x)
         +integral(c(m−1)/(2l), l, m−2, n; x)
         +integral(cn/(2l), l+1, m−1, n−1; x)
9: end;
```

算法 integral は基本形式を規定するパラメータを引数として，その不定積分の一つを基本関数で返す．基本関数で表現できない場合は，算法の5行目によって $\mathrm{INT}(l, m, n;\ x)$ という値を返す．ここに INT とは(2.4)式で定義される構成子(constructor)である．

$$\mathrm{INT}(l, m, n;\ x)=\int_0^x y(1, l, m, n;\ t)dt. \tag{2.4}$$

基本形式に対し，(2.4)を積分形式とよぶ．積分形式では算法 integral からわかるように $m=0, l\neq 0, l\neq 1$ である．

構成子 INT は積分が基本関数で表現できないことを示すだけであって，積分不能という意味ではない．たとえば，

$$\int_0^x \exp(-2t^2)dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{erf}(\sqrt{2}x), \tag{2.5}$$

であるが，算法 integral では積分形式 INT (2, 0, 0; x) が返される．したがって，算法 integral は5行目を拡張することにより積分可能な基本関数のクラスを広げることができる．しかしそうした場合，積分の結果得られる式は基本関数ではないので，さらにそれも被積分関数として許容することになると際限なく算法を拡張しなければならなくなり見通しが悪くなる．また，算法 integral はある積分がK上で表現できない場合，積分形式への展開の算法を与えているので，積分がK上で表現可能な任意の基本関数に対し，たとえその各項の不定積分がK上で表現不可能であっても正しく積分を求めることができる．

(例1)

$$f_1(x)=-4\exp(-2x^2)x^2\,\mathrm{erf}\,x,$$

$$f_2(x)=\exp(-2x^2)\,\mathrm{erf}\,x$$

とすると，$f_1(x), f_2(x)$ の不定積分はK上にはない．ところが算法 integral によって，

$$\int f_1(x)dx=\exp(-2x^2)x\,\mathrm{erf}\,x+\frac{1}{6}\exp(-3x^2)-\mathrm{INT}(2, 0, 1;\ x),$$

$$\int f_2(x)dx=\mathrm{INT}(2, 0, 1;\ x),$$

と求まるので，$f_1(x)+f_2(x)$ の不定積分は

$$\int\{f_1(x)+f_2(x)\}dx$$

$$=\exp(-2x^2)x\,\mathrm{erf}\,x+\frac{1}{6}\exp(-3x^2)$$

と正しくK上で表現される．

以上の理由から，算法 integral は拡張せずに次節で述べる一般化の手法を用いる．

2.2 基本形式と積分形式から一般形式への拡張

基本形式と積分形式から成る式に対し加算と乗算を施した結果を一般的に扱うために次のような定義を行う．まず，積分形式の積

$$V=V_1^{m_1}V_2^{m_2}\cdot\cdots\cdot V_N^{m_N},$$

ただし，

$$V_i \text{ は積分形式,} \qquad 0\le m_i \quad i=1, \cdots, N, \qquad N\ge 1. \tag{2.6}$$

の作る集合をIで表し，

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \tag{2.7}$$

をVの積分因子数とよび i_V で表す．とくに $i_V\ge 1$ の場合，Vは真に積分形式を含むという．次に，

$$U=\sum_{V_i\in I} g_i V_i \quad g_i\in K, \tag{2.8}$$

のような元全体の集合をGで表し，Gの元を一般形式，一般形式の項のうち基本形式でも積分形式でもないものを積形式とよぶ．基本形式，積分形式そして積形式を単項とよび，基本形式の積分因子数を0と定義する．また，一般形式の各単項のうちの最大の積分因子数を一般形式自身の積分因子数という．

基本形式の微積分についてはすでに明らかであり，積分形式と積形式も微分についてはとくに考慮を必要としない．問題となるのは積分形式と積形式の積分であるが，単項の不定積分のG上での表現可能性に関して次の定理が成り立つ．

［定理1］

$$f(x)\in K,\ g(x)\in I\quad i_g\geq 1, \tag{2.9}$$

に対し，

$$\int f(x)g(x)dx\in G$$

であるためには，自明な例外を除いて，

$$\int f(x)dx\in K$$

でなければならない．ここで自明な例外とは，

$$F(x)=\int f(x)dx\notin K$$

および任意の定数λに対し $g(x)=\lambda\{F(x)\}^{i_g}$ と選ぶと，

$$\int f(x)g(x)dx=\frac{\lambda}{i_g+1}\{F(x)\}^{i_g+1}\in G$$

となる場合をいう．

（証明）

$\int f(x)g(x)dx$ の積分因子数を i とおくと，これがG上で表現可能ならば付録に示す補題により，自明な例外を除いて

$$i=i_g \tag{2.10}$$

でなければならない．一方

$$F(x)=\int f(x)dx \tag{2.11}$$

は基本関数か積分因子数が1の一般形式であるので，

$$\int f(x)g(x)dx\in G$$

ならば，

$$\int F(x)g'(x)dx=F(x)g(x)-\int f(x)g(x)dx \tag{2.12}$$

により，$\int F(x)g'(x)dx$ も一般形式である．ところが補題により $\int F(x)g'(x)dx$ の積分因子数がたかだか i_g であるのに対し，$F(x)$ が積分形式を含めば(2.10)式より(2.12)式の右辺の積分因子数は i_g+1 となり矛盾が生ずる．よって，

$$F(x)\in K$$

でなければならない．　□

定理1は真に積分形式を含む単項の不定積分のG上での表現可能性を判定するだけでなく，表現の算法をただちに与えるので重要である．すなわち，(2.9)のf,g に対し，

$$\int f(x)g(x)dx \tag{2.13}$$

を求める場合，まず定理1にいう自明な例外に当たるかどうかを調べたあと，(2.11)を求め，$F(x)\notin K$ ならば(2.13)式のG上での表現可能性は否定され，$F(x)\in K$ ならば，

$$\int f(x)g(x)dx=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)dx$$

という変形と定理1に基づく判定を再帰的に使うことで最終的な結果を得ることができる．なお明らかなように，この変形の後は，自明な例外が現われることはない．

以上で任意の単項の不定積分がG上で表現可能な場合のその構成手続きが明らかになった．とくに，3章で扱うような問題では，不定積分の最終結果には積分形式のうち，

$$\begin{aligned}\mathrm{INT}(l,0,0\,;\,x)&=\int_0^x\exp(-lx^2)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{l}}\,\mathrm{erf}(\sqrt{l}\,x),\\&\quad l=1,2,\cdots,\end{aligned} \tag{2.14}$$

という形のものしか現われず，この対応に基づく変形を最後に行えば，先に述べた算法 integral の拡張よりは，はるかに見通しよく不定積分が得られることになる．

（例2）

定理1および関係式(2.14)を使うことで，

$$\begin{aligned}&\int x^2\,\mathrm{erf}\,x\,\mathrm{erf}\sqrt{2}\,x\,dx\\&=\frac{1}{6}(x^2+1)\exp(-x^2)\,\mathrm{erf}\sqrt{2}\,x\\&\quad+\frac{1}{3}x^3\,\mathrm{erf}\,x\,\mathrm{erf}\sqrt{2}\,x\\&\quad+\frac{\sqrt{2}}{24}(2x^2+1)\exp(-2x^2)\,\mathrm{erf}\,x\\&\quad+\frac{\sqrt{2}}{24}x\exp(-3x^2)-\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\,\mathrm{erf}\sqrt{3}\,x\end{aligned}$$

が得られ，一方

$$\int x^2(\mathrm{erf}\,x)^2\,\mathrm{erf}\sqrt{2}\,x\,dx$$

は，

$$\begin{array}{ll}\exp(-lx^2) & l=0,\pm1,\pm2,\cdots,\\ x^m & m=0,1,2,\cdots,\\ (\mathrm{erf}\sqrt{k}\,x)^n & k,n=0,1,\cdots,\end{array}$$

では記述できないことがただちにわかる．

またさらに，基本形式よりも一般の場合，すなわち

$\exp(px^2)(\mathrm{erf}\,qx)^n$

という項を含むときは，p と q^2 が代数的に独立な場合を除いて，(2.14)と変数変換(2.16)とを組み合わせることで，(2.15)によって以上の枠組に帰着することができる．

$$\begin{aligned}&\exp(px^2)(\mathrm{erf}\,qx)^n\\&=\exp(kt^2)(\mathrm{erf}\sqrt{j}\,t)^n\\&=\gamma(1,k,0,0\,;\,t)\{\sqrt{j}\cdot\mathrm{INT}(j,0,0\,;\,t)\}^n,\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$x=\sqrt{\frac{k}{p}}\,t=\frac{\sqrt{j}}{q}t.\tag{2.16}$$

ここで，j, k は

$$\frac{p}{q^2}=\frac{k}{j},\quad j>0$$

を満たす互いに素な整数である．

2.3 定積分と極限操作

定積分は不定積分が得られればたんなる値の代入だけで済むので問題とはならない．とくに $x=0$ の場合，積分形式と積形式は，それらの定義から0になることがわかる．また，基本形式についてもその算出は容易である．

次に，正の無限大に対する極限操作を考える．

これまでは誤差関数を(2.1)式において $a=1$ として定義してきたが，これ以後は $a=2/\sqrt{\pi}$ の場合を考え，

$$\mathrm{erf}\,x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\exp(-t^2)dt\tag{2.17}$$

とする．こうすることで，

$$\mathrm{erf}\,\infty=1\tag{2.18}$$

が達成される．また，積分形式も(2.17)によって再定義するものとする．

まず $x\to\infty$ に対する極限値が有限確定値となる自明な場合を各形式に対し列挙する．

（1） 基本形式

$l>0$ のときに0．

$l=m=0$ のときに c．

（2） 積分形式

(2.14)式の場合に $\sqrt{\pi/l}/2$．

（3） 積形式

構成因子の基本形式，積分形式がすべて(1)，(2)の場合にそれぞれの積．

これ以外の一般形式については，各単項を構成する因子のうちで上記の自明な有限確定値を有するものについてその極限値でそれを置き換え，そこで再び式としての和をとると，次のいずれかになる．

（1） 極限値が有限確定値として求まる．

（2） 発散が確認できる．

（3） (1)，(2)以外の一般形式が残る．

次章の例では，(3.9)式で極限計算が必要になるが，そこでは積分形式として(2.14)式の形のものしか存在しないため，必ず上述の(1)の場合になる．したがって，ここでは(3)の場合についての立ち入った議論は行わない．

2.4 その他の関連関数

応用例においては誤差関数の繰返し積分が重要となる場合がある．ここで，

$$\mathrm{i}^n\,\mathrm{erf}\,x=\int\mathrm{i}^{n-1}\,\mathrm{erf}\,x\,dx\quad n=1,2,\cdots,\tag{2.19}$$

と定義する．ただし，

$$\mathrm{i}^0\,\mathrm{erf}\,x=\mathrm{erf}\,x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\exp(-t^2)dx\tag{2.20}$$

である．(2.19)式は不定積分によって定義したが，これより得られる漸化式

$$\mathrm{i}^n\,\mathrm{erf}\,x=\frac{1}{2n}(2x\mathrm{i}^{n-1}\,\mathrm{erf}\,x+\mathrm{i}^{n-2}\,\mathrm{erf}\,x),$$

$$n=1,2,\cdots,\tag{2.21}$$

および，

$$\mathrm{i}^{-1}\,\mathrm{erf}\,x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-x^2)$$

と(2.20)式とで $\mathrm{i}^n\,\mathrm{erf}\,x$ を定義し直し，最初のいくつかを書くと，

$$\mathrm{i}^1\,\mathrm{erf}\,x=x\,\mathrm{erf}\,x+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-x^2),$$

$$\mathrm{i}^2\,\mathrm{erf}\,x=\frac{1}{4}\left\{(2x^2+1)\,\mathrm{erf}\,x+\frac{2}{\sqrt{\pi}}x\exp(-x^2)\right\}$$

となる．以上より明らかなように，

$$\mathrm{i}^n\,\mathrm{erf}\,x\in K\quad n=-1,0,1,\cdots,$$

である．また，(2.21)式より $\phi_n(x)=\mathrm{i}^n\,\mathrm{erf}\,x$ は微分方程式

$$\frac{d^2f}{dx^2}+2x\frac{df}{dx}-2nf=0\tag{2.22}$$

を満たすことがわかる．(2.22)にはもう一つ独立な解として

$$\varphi_n(x)=\exp(-x^2)\frac{d^n}{dx^n}\exp x^2\tag{2.23}$$

が存在する．$\varphi_n(x)$ は x に関する n 次多項式で，$\lfloor n/2\rfloor$ で $n/2$ を越えない最大の整数を表すと，

$$\varphi_n(x)=\sum_{r=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}\tag{2.24}$$

である．

前節までに述べた演算機能に加え，$\phi_n(x)$, $\varphi_n(x)$ 等を組込み関数として有するシステムを製作することで微分方程式の求解などが可能になる．とくに，既存の代表的な数式処理システムは LISP に基礎を置く場合が多いが，そのような場合は基本形式をパラメータのリストで表現し，その他の形式についても適当なデータ構造を定義することで，すべての演算を四則演算とリスト操作だけに簡単に帰着することができる．

3. 微分方程式への応用

3.1 基　礎　式

一次元の熱伝導や C-R 分布定数線路など，多くの物理現象において次の拡散方程式が基礎方程式となる．

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.1}$$

ここで，u は t と x とを変数とする関数で，ν は拡散係数とよばれる定数である．

方程式(3.1)は次のような変数変換によって(3.4)に示す常微分方程式で表現できることが知られている．

$$\eta=\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}, \tag{3.2}$$

$$u(t,x)=t^i f_i(\eta)\quad i=0,1,\cdots, \tag{3.3}$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2}f_i(\eta)+2\eta\frac{d}{d\eta}f_i(\eta)-4if_i(\eta)=0, \quad i=0,1,\cdots, \tag{3.4}$$

方程式(3.4)は前節で導入した方程式(2.22)で $n=2i$ とした場合に対応し，すでに述べたように基本解はただちに求められる．

一方，多くのより現実的な問題では現象が(3.4)式のような斉次方程式で記述できることはむしろまれである．次節では，非斉次微分方程式の境界値問題を例にとり，前章で述べたシステムの有効性を確認する．

3.2 境界値問題の求解

ここで取り上げる例は次のような N をパラメータとして含む微分方程式の境界値問題[6]である．

$$\frac{d^3}{d\eta^3}f_i(\eta)+2\eta\frac{d^2}{d\eta^2}f_i(\eta)-4i\frac{d}{d\eta}f_i(\eta)=R_i(\eta), \tag{3.5}$$

$$i=0,1,2,$$

$$R_0(\eta)=0,$$

$$R_1(\eta)=-4\left\{1-\left(\frac{df_0(\eta)}{d\eta}\right)^2+f_0(\eta)\frac{d^2f_0(\eta)}{d\eta^2}\right\}-4N\left(1-\frac{df_0(\eta)}{d\eta}\right),$$

$$R_2(\eta)=-4\sum_{j=0}^{1}\left\{f_{1-j}(\eta)\frac{d^2f_j(\eta)}{d\eta^2}-\frac{df_{1-j}(\eta)}{d\eta}\frac{df_j(\eta)}{d\eta}\right\}+4N\frac{df_1(\eta)}{d\eta},$$

$$f_i(0)=\frac{df_i(0)}{d\eta}=0\quad i=0,1,2,$$

$$\lim_{\eta\to\infty}\frac{df_0(\eta)}{d\eta}=1,$$

$$\lim_{\eta\to\infty}\frac{df_1(\eta)}{d\eta}=\lim_{\eta\to\infty}\frac{df_2(\eta)}{d\eta}=0.$$

この境界値問題は電磁流体力学の境界層理論において得られたもので，N は磁界の影響を表す定数である．とくに原問題では，表面摩擦応力とよばれる量を算出するために $d^2f_i(0)/d\eta^2$ が必要である．

方程式(3.5)は $df_i(\eta)$ に関し2階の線形常微分方程式であり，前章で導入した $\phi_{2i}(\eta)$, $\varphi_{2i}(\eta)$ が対応する斉次方程式の基本解となる．ここで改めて

$$g_i(\eta)=\varphi_{2i}(\eta)=\exp(-\eta^2)\frac{d^{2i}}{d\eta^{2i}}\exp\eta^2, \tag{3.6}$$

$$h_i(\eta)=\phi_{2i}(\eta)=\mathrm{i}^{2i}\mathrm{erf}\,\eta \tag{3.7}$$

とおくと，ロンスキアンは

$$g_i(\eta)h_i'(\eta)-g_i'(\eta)h_i(\eta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-\eta^2)$$

であるので，(3.5)の解は α_i,β_i を任意定数として(3.8)式で記述できる．

$$\frac{df_i(\eta)}{d\eta}=\alpha_i g_i(\eta)+\beta_i h_i(\eta)-g_i(\eta)H_i(\eta)+h_i(\eta)G_i(\eta),$$

$$H_i(\eta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\eta R_i(t)h_i(t)\exp t^2dt, \tag{3.8}$$

$$G_i(\eta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\eta R_i(t)g_i(t)\exp t^2dt,$$

$$i=0,1,2.$$

境界条件を満たす解は(3.8)において，

$$\alpha_i=0\quad i=0,1,2,$$

$$\beta_0=1,$$

$$\beta_i=\lim_{\eta\to\infty}\{\gamma_iH_i(\eta)-G_i(\eta)\}\quad i=1,2, \tag{3.9}$$

$$\gamma_i=\lim_{\eta\to\infty}\frac{g_i(\eta)}{h_i(\eta)}=2^{2i}(2i)!\quad i=1,2,$$

とし，(3.10)式によって得ることができる．

$$f_i(\eta)=\int_0^\eta f_i'(t)dt\quad i=0,1,2. \tag{3.10}$$

以上の手続きを手計算によって実行すると，$i=0$ の場合は容易に解を得ることができるが，$i=1$ ではかなり困難になり，$i=2$ で事実上不可能になる．そこで前章

で述べたシステムを用いると，

$$\frac{d^2 f_1(0)}{d\eta^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(N+\frac{4}{3\pi}+1\right),$$

$$\frac{d^2 f_2(0)}{d\eta^2}=\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left\{-N^2+\left(\frac{11}{2}-\frac{376}{15\pi}\right)N-\frac{324}{5\sqrt{3}\pi}-\frac{256}{45\pi^2}+\frac{89}{5\pi}+\frac{11}{2}\right\}$$

等を得ることができた．微分方程式の解そのものは本論文の興味ではないのでここではいちいち示さないが，$i=1$ において得られた

$$\begin{aligned}\frac{d f_1(\eta)}{d\eta}=&-\left(1+\frac{2}{3\pi}\right)(2\eta^2+1)\\&+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3\pi}\right)\left\{(2\eta^2+1)\,\mathrm{erf}\,\eta\right.\\&\left.+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta\exp(-\eta^2)\right\}+\left(\eta^2-\frac{1}{2}\right)(\mathrm{erf}\,\eta)^2\\&+\frac{3}{\sqrt{\pi}}\eta\exp(-\eta^2)\,\mathrm{erf}\,\eta+\frac{2}{\pi}\exp(-2\eta^2)\\&-\frac{4}{3\pi}\exp(-\eta^2)+1\\&+2N\eta\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-\eta^2)+\eta\,\mathrm{erf}\,\eta-\eta\right\}\end{aligned}$$

は，パラメータNを含まない流体力学における類似の問題に対し Blasius[7] によって得られた解に矛盾しないことが確認できた．

本論文では $i=2$ までを対象としたが，i が3以上の場合も同様の方程式が存在し以上述べた方法によって解を得ることができる．ただし実際は，i の増加に伴い，求解の過程も解そのものも爆発的に大規模なものとなるので，求解可能な i の上限は当然のことながら利用するシステムの大きさに制限される．しかし，本論文で述べた方法は微分や積分演算に関する一般的な規則の上で解を求める場合に比べ，はるかに少ない記憶容量でしかも高速に解を得ることができる．

4. む す び

誤差関数とそれに関連して現われる関数だけを対象とする微分，積分そして極限操作等の演算算法を数式処理向けに構成した．とくに，積分形式とよぶ数式の表現方法を導入することで，対象範囲を一般形式として明確に定義することができ，しかもその上での演算手続きを簡潔でかなり一般性の高いものとして構成することができる．また，これらの演算体系はそれだけでほぼ閉じたものであり，この意味での有効性を例証するために現実に意味のある微分方程式の境界値問題を取り上げ，本論文で述べた手法だけで解析可能なことを示した．このような境界値問題の求解向けにシステムの実用性をより高めるためには，今後，次のような機能の追加あるいは結合が必要になろう．

（1） 本論文であげたような微分方程式の解は基本解と，指数関数を含む多項式を係数とする誤差関数の多項式との線形結合で記述できるので，解の規模が大きくなる場合には，この性質を利用して原問題をより小規模な問題の組合せに変換することができる．このとき，この変換を行うシステムが必要になる．

（2） 境界値問題や初期値問題では境界条件や初期条件に基づいて積分定数を決定しなければならないが，このとき一般には連立一次方程式を解かなければならない．したがって，そのためのシステムが必要になる．

謝辞 本論文のシステムはマイクロコンピュータ用数式処理システム muMATH/muSIMP-80* 上に試作した．試作に協力いただいた本学高橋良雄助教授に深謝する．

参 考 文 献

1) Ng, E. W. (ed.): *Symbolic and Algebraic Computation*, *Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science*, No. 72, Springer-Verlag, Berlin (1979).
2) Calmet, J. (ed.): *Computer Algebra*, *Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science*, No. 144, Springer-Verlag, Berlin (1982).
3) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.: *Conduction of Heat in Solids*, University Press, Oxford (1947).
4) Hearn, A. C.: REDUCE-2 User's Manual, University of Utah, UCP-19 (1973).
5) Rich, A. D. and Stoutemyer, D. R.: Capabilities of the mu-MATH-79 Computer Algebra System for the Intel-8080 Microprocessor, in Ng, E. W. (ed.), *Symbolic and Algebraic Computation*, pp. 241-248, Springer-Verlag, Berlin (1979).
6) Katagiri, M.: Unsteady Magnetohydrodynamic Flow at the Forward Stagnation Point, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 27, No. 6, pp. 1662-1668 (1969).
7) Blasius, H.: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Math. Phys.*, Vol. 56, No. 1, pp. 20-37 (1908).

* 米・Soft Warehouse 社の登録商標である．

付　録

[補題]　vを真に積分形式を含むIの元とし，その積分因子数をi_vで表す．このとき，任意の$u\in K$に対し

$$V=\int uvdx\in G, \qquad (\mathrm{A}.1)$$

ならば，定理1にいう自明な例外を除いて，

$$i_V=i_v$$

である．ここでi_VはVの積分因子数である．

(証明)　Vを構成する各形式のうち，積分因子数i_VのIの元の集合をI_0，積分因子数i_V-1のIの元の集合をI_1，積分因子数がi_V-2以下のIの元の集合をI_2で表すと，Vは基本関数u_i, u_j, u_kを係数として

$$V=\sum_{V_i\in I_0}u_iV_i+\sum_{V_j\in I_1}u_jV_j+\sum_{V_k\in I_2}u_kV_k \qquad (\mathrm{A}.2)$$

と表現できる．ここで，

$$W_1=\sum_{V_i\in I_0}u'_iV_i, \quad W_2=\sum_{V_i\in I_0}u_iV'_i,$$

$$W_3=(\sum_{V_j\in I_0}u_jV_j)'+(\sum_{V_k\in I_2}u_kV_k)'$$

とおくと，(A.1)，(A.2)より

$$uv=W_1+W_2+W_3 \qquad (\mathrm{A}.3)$$

となる．(A.3)式の左辺の積分因子数はi_vであり，右辺はi_V以下である．とくに，右辺の積分因子数がi_V-1以下となるのは，W_1を構成するu'_iがすべて0となる場合である．ところがその場合，積分形式の定義から(A.3)式の右辺においてW_2の項を消去しえる項はW_3には存在せず，しかも自明な例外を除いてはW_2に含まれるIの元が唯一つということはありえない．ところが左辺には唯一つのIの元vが含まれるので矛盾が生じる．したがって，

$$i_V=i_v$$

でなければならない．

(昭和59年1月13日受付)
(昭和59年3月6日採録)