

第1種不完全複素楕円積分の全域かつ一様近似†

久原 秀夫^{††} 鳥居 達生^{†††} 杉 浦 洋^{†††}

第1種不完全複素楕円積分を上昇(複素) Landen 変換を用いて全域かつ一様近似する算法を提示する。本論文のおもな内容は次の三つである。1) 不完全楕円積分の定積分表示。2) Landen 変換の Riemann 面の構成。Landen 変換により積分区間上の対数特異点を区間から離し、端点の代数特異点を解消する。3) Gauss-Chebyshev 積分則の適用とその誤差解析。計算例は、本方法が第1種不完全複素楕円積分の算法として有効であることを示している。

1. ま え が き

よく知られているように、楕円積分の標準形は

$$F(z, k) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (1.1)$$

$$E(z, k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} dz \quad (1.2)$$

$$\Pi(z, n, k) = \int_0^z \frac{dz}{(1-nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (1.3)$$

の3種類に分かれ、それぞれ第1, 2, 3種不完全楕円積分という。正数 $k < 1$ を母数, 定数 n をパラメータとよぶ。

楕円積分, 楕円関数の研究の歴史は古い。1976年の時点で、それらの理論および数値計算法に関する文献が安藤の著書にまとめられている¹⁾。実楕円積分については、すでに確立された算法があり、数表およびプログラムも作成されている²⁾⁻⁴⁾。第1種楕円積分の場合、母数 k の大小によって上昇 (ascending) Landen 変換あるいは下降 (descending) Landen 変換が用いられる。従来、Landen 変換は、母数を変えるための積分変数の変換として考えられてきたが、われわれは、これを複素積分の変数変換として第1種複素楕円積分に適用する。

複素楕円積分の数値計算法は竹内端三の半世紀前の著書⁵⁾にあるべき級数展開のほかにはないようである。このべき級数展開は原点近傍で収束は速い。収束半径は $1/k$ であるが、これより小さい円 (半径 $1/\sqrt{k}$) 内

で求めれば十分であることが示されている。この方法においては、母数 k は複素数でもよいので、算法としてなお捨てがたい魅力をもっている。

われわれは、上昇 Landen 変換を用いて複素平面全体において、第1種不完全複素楕円積分を一様近似する方法を示す。導出の根拠は、次の3点にある。

まず、不完全複素楕円積分の定積分表示を Cauchy の積分公式から導く。つぎに、その数値積分を容易にするため不完全楕円積分の積分変数の変換として、われわれは上昇 Landen 変換を用いる。この変換の Riemann 面の構造を明らかにすることにより、被積分関数の特異点の移動を知ることができる。すなわち最初の変換で積分区間の端点における被積分関数の代数的特異点を解消できる。変換後、定積分表示すれば積分区間が短くなり、被積分関数は区間の両端において再び代数的特異点を持ち、積分区間から離れたところに対数特異点をもつ。第2回以降の変換で積分区間をさらに短くするとともに積分区間と対数特異点との距離を大きくする。Gauss-Chebyshev 積分則を用いるならば最後に残った積分区間の両端の代数特異点を消去できる。最後に、この積分則を適用したときの誤差評価を行う。

楕円積分を全域かつ一様近似する方法の最初の着想は久原である⁶⁾。これは楕円積分を静電場的に解釈し電荷重畳法 (代用電荷法ともいう) で求める方法である。

2. 不完全楕円積分の定積分表示

第1種不完全楕円積分の被積分関数

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (2.1)$$

に対応する Riemann 面は、2枚の分葉 Π_1, Π_2 からなる。 Π_1 上の $z=0$ で $f(0)=1$ とする。分岐点 ± 1 ,

† Uniform Approximation of Incomplete Elliptic Integral of the First Kind on the Extended Complex Plane by HIDEO KUHARA (Department of Information and Electronics Engineering, Yatsushiro National College of Technology), TATSUO TORII and HIROSHI SUGIURA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 八代工業高等専門学校情報電子工学科

††† 名古屋大学工学部情報工学科

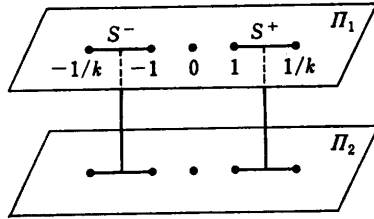


図 1 楕円積分の被積分関数の Riemann 面
Fig. 1 Riemann surface of integrand of elliptic integral.

±1/k を結ぶ二つのスリット

$$S^+ = [1, 1/k], S^- = [-1/k, -1]$$

の下岸の点は, Π_1 に属さず Π_2 の上岸に属するものとする (図 1).

さて, z -平面上の任意の二点 z_0, z_1 をスリットと交わらない滑らかな曲線 C で結ぶ. まず, C は Π_1 上であって Π_1 上のスリットを囲まないものとする.

曲線上の積分

$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz \quad (2.2)$$

をスリット上の定積分として表示できることを示す.

被積分関数は, 分岐点を除き全平面で正則であり, 無限遠点の近傍で $f(z) = O(z^{-2})$ である. そこで, 二つのスリット S^+, S^- を, それぞれ単一閉曲線 C^+, C^- で囲み, 外部に対して Cauchy の積分公式を用いると

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

となる. これを (2.2) に代入し, 積分順序を変更すれば

$$F(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(\zeta) \log \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z_1} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(\zeta) \log \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z_1} d\zeta$$

ここで, 閉曲線 C^+, C^- を, スリット S^+, S^- に近づける. さらに $z_0 = 0, z_1 = z$ とおけば, 上式は

$$F(z) = F(z, k) = \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \frac{\log \frac{x+z}{x-z}}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} dx, \quad (2.3)$$

と定積分表示される. スリットの上岸, 下岸で $f(z)$ は, 純虚数で符号が異なることを用いた. 対数関数のスリットは $(-\infty, -1), (1, \infty)$ である.

母数 k に対して, $k' = \sqrt{1-k^2}$ を補母数という. また, (1.1) において $F(1, k), F(1, k')$ を完全楕円積分といい, それぞれ $K(=K(k)), K'(=K(k'))$ で表す.

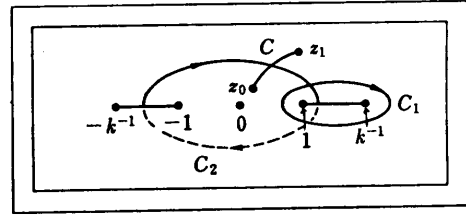


図 2 Riemann 面上の積分路
Fig. 2 Contours on Riemann surface.

閉曲線 C_1 が一つのスリットを一周するとする. C_1 に沿って時計回りに 1 周積分すれば, 積分値は, $2iK'$ となる. したがって原点から一つのスリットを 1 周して点 z まで積分すれば, 楕円積分 (1.1) に $2iK'$ が追加されることになる. 分葉 Π_1, Π_2 を通る閉曲線 C_2 上の積分は $4K$ である (図 2). これらの事実は楕円関数の二重周期の存在を意味する.

3. Landen 変換

楕円積分の母数 k が 0 または 1 のとき, その積分は初等的となる. 実楕円積分を求める場合, 母数の大小に応じて上昇 Landen 変換, 下降 Landen 変換を繰り返し, 漸近的に初等的な積分に帰着させる方法が用いられる²⁾. この実楕積分の方法を複素楕円積分に適用した例は見いだされない. 実 Landen 変換を解析接続により複素平面に拡張すればよいわけであるが, そのためには Landen 変換の Riemann 面を把握する必要がある.

Landen 変換は母数の異なる二つの楕円積分を結びつける一つの変数変換として知られている. すなわち母数 h, k の二つの楕円積分 $F(z, h), F(w, k)$ において, 母数の間に

$$h = \frac{1-k'}{1+k'} \quad (3.1)$$

$$\text{あるいは } k = \frac{2\sqrt{h}}{1+h}$$

の関係があるとき, 変数変換

$$z = (1+k')w \sqrt{\frac{1-w^2}{1-k^2w^2}} \quad (3.2)$$

を行えば

$$F(z, h) = \frac{2}{1+h} \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = \frac{2}{1+h} F(w, k) \quad (3.3)$$

が成り立つ.

変換 (3.2) を Landen 変換という⁷⁾. 母数の関係

(3.1)より明らかに $k > h$. すなわち変換後母数は大きくなる. このように母数が大きくなる変換を上昇 Landen 変換, 逆向きを下降 Landen 変換という. 前者の場合, 変換(3.2)を w に関する方程式と考え, w を z の 1 価関数として陽に表さなければならない.

以後上昇 Landen 変換だけを取り扱う.

周知のように Joukowski 変換 $w=(z+z^{-1})/2$ は, z -平面上の単位円を w -平面のスリット $[-1, 1]$ に写す. 簡単のため, この変換を $w=J(z)$ で表す.

Landen 変換は, z^2 および w^2 -平面の Joukowski 変換とみることもできる. なぜならば, それは

$$z^2 = \frac{(1+k'^2) + 2k'}{(1-k')^2 + (1-k')^2} J\left(\frac{k^2 w^2 - 1}{k'}\right), \quad (3.4)$$

と書けるからである. 明らかに z^2 -平面の実軸上の線分 $[1, (1+k')^2/(1-k')^2]$ は, w^2 -平面の中心, k^{-2} 半径 k'/k^2 の円に写る.

さて, 上昇 Landen 変換の場合, z を与え, 一意に w を定めなければならない. Landen 変換(3.2)は, w に関し 4 次の代数方程式となるので, z および w -平面に適当に分葉を考え Landen 変換が単葉となるようその Riemann 面を構成することにする.

Landen 変換の Joukowski 表現(3.4)から z -平面の 4 点 $\pm 1, \pm(1+k')/(1-k')$ は分岐点である. w -平面の分岐点は, (3.2)より $\pm 1, \pm 1/k$ である. z -平面に

4 枚の分葉 $\Pi_{j,z}, 0 \leq j \leq 3, w$ -平面に 2 枚の分葉 $\Pi_{j,w}, 0 \leq j \leq 1$ を考える. 分葉 $\Pi_{j,z}$ 上のスリットを

$$S_{j,z}^+ = [1, 1/k_0], \quad S_{j,z}^- = [-1/k_0, -1] \\ k_0 = \frac{1-k'}{1+k'} \quad (3.5)$$

とする. 添字 z, w は, 誤解のおそれがなければ以後略すことにする.

分葉 Π_j を右半平面 Π_j^+ と左半平面 Π_j^- に分ける. すなわち $\Pi_j = \Pi_j^+ \cup \Pi_j^-$. ここで Π_j^+ は, $\text{Re } z \geq 0$ より負の虚軸を除いた部分, Π_j^- は, $\text{Re } z \leq 0$ より非負の虚軸を除いた領域である. そして各分葉のスリットを次のように連結する.

$$S_0^+ = S_1^+, \quad S_1^- = S_2^- \\ S_2^+ = S_3^+, \quad S_3^- = S_0^-$$

後の都合上, スリット S_0^+ の端点 $1, 1/k_0$ を P, Q で表す. 例によって添字は以後しばしば省略する.

スリットの連結 $S_0^+ = S_1^+$ は, S_0^+ の下岸と S_1^+ の上岸, S_0^+ の上岸と S_1^+ の下岸をそれぞれ糊付することを意味する. スリットの連結に伴い各分葉 Π_j の左右の半平面が, 次の順序

$$\Pi_0^+ \Pi_1^+ \Pi_1^- \Pi_2^- \Pi_2^+ \Pi_3^+ \Pi_3^- \Pi_0^-$$

で連結され一巡する (図 3 の z -平面).

つぎに Landen 変換を基本的な写像 (平方, Joukowski 変換, 開平) に分解し各写像の過程を追跡す

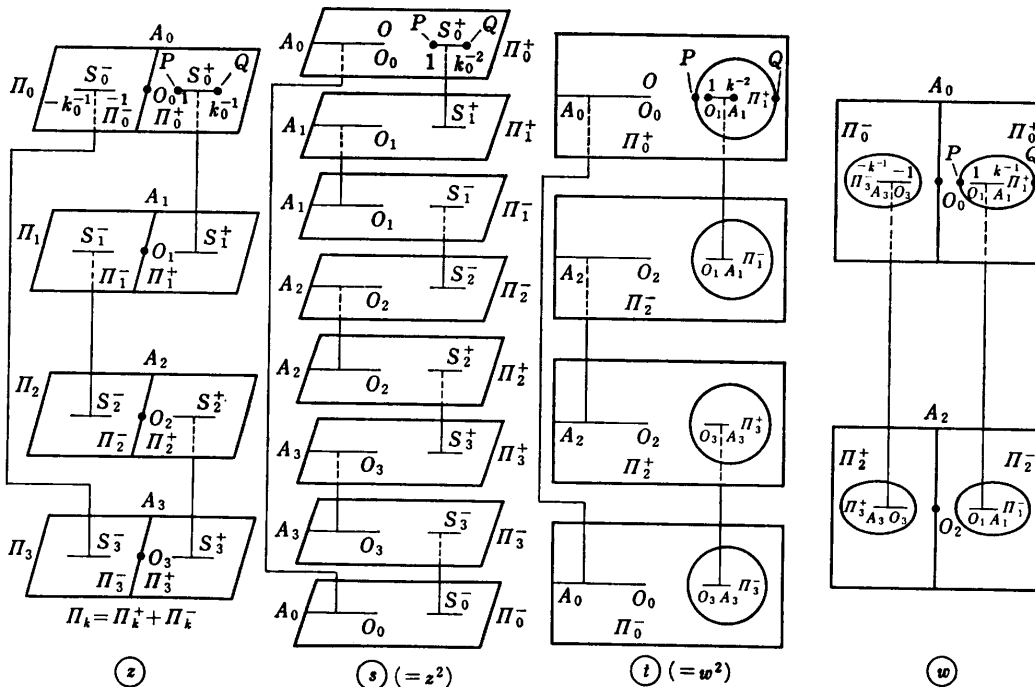


図 3 Landen 変換の Riemann 面
Fig. 3 Riemann surface of Landen transformation.

る(図3).

平方 $z \rightarrow z^2$ により, z -平面の各半平面は $s(=z^2)$ -平面の1枚の分葉に対応するので s -平面の分葉は全部で8枚となる. z -平面の虚軸は s -平面の負の実軸に対応する. 図3において異なる面上の対応する点とスリットを, その対応を明確にするため同じ記号で表した.

$s(=z^2)$ -平面から $t(=w^2)$ -平面への変換は Joukowski 変換 (3.4) であるから, s -平面の2枚の分葉 $\Pi_{0,+}, \Pi_{1,+}$ は, t -平面の1枚の分葉 ($\Pi_{0,+} \cup \Pi_{1,+}$) に対応する. $\Pi_{1,+}$ は, t -平面の円 $S_{0,+}^*$ の内部であり, 他方の $\Pi_{0,+}$ は円の外部となる. t -平面の円 $S_{0,+}^*$ は, s -平面のスリット $S_{0,+}^*$ の像である. s -平面において上下の位置関係にある負の実軸 O_0A_0 と O_1A_1 は, t -平面において負の実軸 O_0A_0 と円 $S_{0,+}^*$ 内のスリット O_1A_1 に写る.

スリット O_1A_1 は, 円 $S_{0,+}^*$ に関し半直線 O_0A_0 と鏡像になっている. t -平面の4枚の分葉の連結の様子は図3に示されている.

最後の段階の写像は開平 $t(=w^2) \rightarrow w$ である.

開平によって, t -平面の2枚の分葉が w -平面の1枚の分葉になるので, 結局 w -平面は2枚の分葉からなる. t -平面の円 $S_{0,+}^*$ は, \sqrt{t} により卵形線 $S_{0,+}^*$ に変形される. t -平面の負の実軸で交差する2枚の分葉は, w -平面では虚軸上で接続された1枚の分葉に写る.

以上の各段階の変換は, 分岐点を除きすべての点で1対1であるから Landen 変換は, z -平面の各分葉上で単葉関数となる. いま, 上昇 Landen 変換であるから w -平面の一分葉に対し単葉となる z -平面の領域だけ考えればよい.

例 1. 代表的な点の対応

$O_0: w=0, z=0 \in \Pi_0$

$A_0: w=\infty, z=\infty \in \Pi_0$

$O_1: w=1, z=0 \in \Pi_1$

$A_1: w=k^{-1}, z=\infty \in \Pi_1$

$P: w=\frac{1}{\sqrt{1+k'}}, z=1 \in \Pi_0$

$Q: w=\frac{1}{\sqrt{1-k}}, z=k_0^{-1} \in \Pi_0$

これらの点に関連して, 楕円積分 $F(z, k_0)$ の実部一定の等高線と Landen 変換によって写る w -平面の等高線 (例, $S_{0,+}^*, O_0A_0, O_1A_1$ など) と同じ記号で表している.

例 2. 代表的な値をとる等高線

$$\operatorname{Re} F(z, k_0) = \begin{cases} K_0, z \in S_{0,+}^* \subset \Pi_0 \\ -K_0, z \in S_{0,-}^* \subset \Pi_0 \\ 0, z \in \Pi_0 \text{ の虚軸} \\ 2K_0, z \in \Pi_1 \text{ の虚軸} \\ -2K_0, z \in \Pi_3 \text{ の虚軸} \end{cases}$$

ただし, $K_0 = K(k_0)$ である.

Landen 変換を数値計算するために, その Riemann 面の分岐を与えておこう.

平方根 \sqrt{z} は, $z=re^{i\theta}, r \geq 0, -\pi < \theta \leq \pi$ で定義されているものとする. これは FORTRAN の平方根 CSQRT の都合に合わせてある.

w -平面の1枚の分葉に1対1に対応する z -平面の領域は, 分葉 Π_0 と, それと連なる半平面 Π_1, Π_3 である. ここでの上昇 Landen 変換は, (3.5)式で定まる k_0 と

$$\eta = \frac{z^2 - k_0^2}{z^2 - 1} \tag{3.6}$$

を用いて

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{1 + \frac{k'}{k^2} \frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}}}{k^2 + \frac{k'}{k^2} \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}}}, z \in \Pi_0^+ \\ w &= \sqrt{\frac{1 + \frac{k'}{k^2} \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}}{k^2 + \frac{k'}{k^2} \frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}}}}, z \in \Pi_1^+ \end{aligned} \tag{3.7}$$

と表される. z の左半平面 Π_0^-, Π_3^- における w の値は, 右半平面 Π_0^+, Π_1^+ における上式の w の符号を変えたものになる.

Landen 変換の分岐の表示は, 他にも考えられるが, 上式は機械的な開平の使用に都合のよい表現となっている.

4. Landen 変換の反復と Gauss-Chebyshev 積分則

z -平面で定義された母数 k の楕円積分に対し上昇 Landen 変換を次のように繰り返す.

初期条件を

$z_0 = z, k_0 = k$

と設定し, 漸化式

$$k_{n+1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n} \tag{4.1}$$

$$(1+k_{n+1}^2)^2 \frac{z_{n+1}^2(1-z_{n+1}^2)}{1-k_{n+1}^2 z_{n+1}^2} = z_n^2 \tag{4.2}$$

$n=0, 1, 2, \dots$

によって $\{k_{n+1}\}, \{z_{n+1}\}$ を求める. 実際には漸化式 (4.2) の最終段階を除き, 一般には z_{n+1}^2 に関して解けばよい.

本章の母数 k_0, k_1 は, 前章の k_0, k に相当する。
 n 回繰り返した後, 母数 $k (= k_0)$ の楕円積分は, 母数 k_n の楕円積分と次のように関係づけられる^{7), 8)}.

$$\int_0^{z_0} \frac{dx_0}{\sqrt{(1-x_0^2)(1-k_0^2 x_0^2)}} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+k_j} \right) \cdot \int_0^{z_n} \frac{dx_n}{\sqrt{(1-x_n^2)(1-k_n^2 x_n^2)}} \quad (4.3)$$

x_0 -平面の無限遠点は, x_n -平面のそれに写るので

$$\prod_{j=0}^{n-1} \frac{2}{1+k_j} = \frac{K'_0}{K'_n} \quad (4.4)$$

が成り立つ。ただし, $K'_l = K(k'_l), l=0, 1, 2, \dots, n$.

楕円積分の定積分表示 (2.3) に基づき, 不定積分 (4.3) を書き換えると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k_0} \frac{1}{\sqrt{(x_0^2-1)(1-k_0^2 x_0^2)}} \cdot \log \frac{x_0+z_0}{x_0-z_0} dx_0 \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{K'_0}{K'_n} \int_1^{1/k_n} \frac{1}{\sqrt{(x_n^2-1)(1-k_n^2 x_n^2)}} \\ & \quad \times \log \frac{x_n+z_n}{x_n-z_n} dx_n \end{aligned} \quad (4.5)$$

となる。

Landen 変換の反復により x_0 -平面のスリット $[1, 1/k_0]$ は, x_n -平面スリット $[1, 1/k_n]$ を囲む卵形線に写るので左辺の被積分関数の対数特異点が, たとえスリット上にあっても x_n -平面では対数特異点は卵形線上にあるので, x_n -平面のスリットから離れることになる。1回目の Landen 変換はスリットの端点の代数的特異点を消去するだけでなくスリット上の対数特異点を積分路 (変換後のスリット) から離す効果を発揮している。このように変数変換により積分路から特異点を離すことができるならば, その数値積分は一般にやさしくなる。スリットや円弧を境界とする Laplace 方程式の境界値問題を特異点を消去して代用電荷の手法で解く方法も同じ考え方に立脚している⁹⁾。

スリット上の定積分 (4.5) において端点の位数 1 の代数的特異点は, Gauss-Chebyshev 則を用いれば消去できるので, 数値積分の精度に影響する主要な特異点は, 前述の x_n -平面の卵形線上にある対数特異点だけとなる。

そこで, x_0 -平面のスリット $[1, 1/k_0]$ が n 回の Landen 変換を経て, x_n -平面のいかなる曲線 L_n (暗黙のうちにスリット $[1, 1/k_n]$ を囲む卵形線と仮定したが) に写るか考えることにする。

一般に母数 k の楕円積分 $F(z, k)$ の実部一定の等高線の特徴を明らかにする。いま, u, v を z の実数値関

数として $F(z, k) = u + iv$ とおけば, 楕円関数の二重周期性より $0 \leq u \leq K, 0 \leq v \leq K'$ と制限してよい。正数 $c \leq K$ を任意定数とする等高線

$$L = \{z; \operatorname{Re} F(z, k) = c\}$$

あるいは $z = \operatorname{sn}(c + iv)$, (v は補助変数)

は, $z = x + iy$ とするとき x, y の 4 次曲線である (文献 7), p. 42 の演習問題)。しかも $X = x^2, Y = y^2$ とおけば曲線 L は X, Y の 2 次曲線であることが指摘されている (文献 1), p. 82)。

われわれは, 機械的な数式処理 (二つの 2 次式の終結式を REDUCE で計算) により, 曲線 L の表示式として X, Y に関する放物線

$$A(X+Y)^2 + B(X+Y) + C(X-Y) + D = 0$$

$$A = am(a-1)(am-1)$$

$$B = \frac{1}{2}(a^2m - 2a + 1)(am(2-a) - 1)$$

$$C = -\frac{1}{2}(a^2m - 1)^2$$

$$D = a(a-1)(am-1) \quad (4.6)$$

ただし $m = k^2, a = \operatorname{sn}^2(c, k)$

を得た。ここで, $0 < c < K$ ならば, $0 < a < 1$ であるから, 係数の符号はつねに

$$A > 0, C < 0, D > 0 \quad (4.7)$$

となる。係数 B だけは正負いずれの値もとりうる。

ついでながら $F(z, k)$ の虚数部一定の等高線も (X, Y) 平面の 2 次曲線である。

放物線 (4.6) が X 軸と交わる点は, 2 点

$$P_x = \operatorname{sn}^2(c, k), \quad Q_x = \left(\frac{1}{k \operatorname{sn}(c, k)} \right)^2 \quad (4.8)$$

だけである。しかも, これら 2 点における接線の勾配は, それぞれ正, 負である。

以上の事実に基づき楕円積分の実部一定の等高線は卵形線となることが示される。

したがって, 与えられた x_0 -平面のスリット $[1, 1/k_0]$ は, n 回 Landen 変換をほどこした後, x_n -平面の卵形線

$$L_n: z_n = \operatorname{sn}(c_n + iv, k_n)$$

$$c_n = \frac{K_0 K'_n}{K'_0}, \quad (4.9)$$

に写る。これが実軸と交わる点は, (4.8) よりただちに

$$P_n = \operatorname{sn}(c_n, k_n), \quad Q_n = \frac{1}{k_n \operatorname{sn}(c_n, k_n)} \quad (4.10)$$

である。

卵形線 L_n を内側と外側から最良近似する共焦点楕円を求める。ここで楕円の焦点は $1, 1/k_n$ とする。

これら2点を焦点とする楕円の族は

$$f(z, k_n) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k_n z)}}$$

とおくことにより

$$E: \operatorname{Re} f(z, k_n) = c \tag{4.11}$$

ただし c は任意定数

と書けることに注意する。いうまでもなく $c=0$ ならば楕円は原点を通り、

$$c = c_1 = \frac{1}{\sqrt{k_n}} \log \frac{1 + \sqrt{k_n}}{1 - \sqrt{k_n}}$$

ならば、 E はスリット $[1, 1/k_n]$ に縮退する。

楕円の長軸方向の主軸は実軸であるが、実軸上の任意の1点 $x \in [0, 1]$ を頂点とする楕円(4.11)の他方の頂点は $(1-x) + k_n^{-1} > k_n^{-1}$ であるから、(4.11)の任意定数は、2通りに書けて

$$c = f(x, k_n) = \operatorname{Re} f(1-x+k_n^{-1}, k_n)$$

である。したがって、 $1, 1/k_n$ を焦点とし点 P_n を通る楕円を E_n 、点 Q_n を通る楕円を F_n とすれば、これらは

$$E_n: \operatorname{Re} f(z, k_n) = f(\operatorname{sn}(c_n, k_n), k_n) \tag{4.12}$$

$$F_n: \operatorname{Re} f(z, k_n) = \operatorname{Re} f(1/(k_n \operatorname{sn}(c_n, k_n)), k_n) \tag{4.13}$$

と表される。この二つの楕円は卵形線 L_n を内側と外側から狭む。しかも楕円の族(4.11)で卵形線 L_n を内側と外側から評価する限り、楕円 E_n, F_n は最良である(図4)。

証明：楕円および卵形線は実軸に関して対称だから考える領域を z -平面の第1象限に限定してよい。 E_n 上の任意の1点 ζ を通る卵形線

$$L: \operatorname{Re} F(z, k_n) = \operatorname{Re} F(\zeta, k_n)$$

の ζ における法線ベクトルは $\overline{F'(\zeta, k_n)}$ となる。卵形線 L_n を $F(z, k_n)$ の実部一定の等高線とみると、 z がスリット $[1, 1/k_n]$ に近づくほど高度は高くなり、その最大値はスリット上で K_n をとる。これは法線ベクトルが内向きであることを意味する。同様に楕円 E_n の点 ζ における法線ベクトル $f'(\zeta, k_n)$ も内向きとなる。二つの法線ベクトルのなす角を楕円のそれから測って θ とすれば

$$\begin{aligned} \theta &= \arg \overline{F'(\zeta, k_n)} - \arg f'(\zeta, k_n) \\ &= \frac{1}{2} \{ \arg(1+\zeta) + \arg(1+k_n \zeta) \} \end{aligned}$$

となるから、角 θ は $0 < \theta < \pi/2$ で評価できる(図5)。

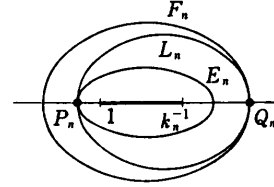


図4 二つの共焦点楕円に接する卵形線 L_n
Fig. 4 Oval inscribed and circumscribed by two confocal centered ellipses.

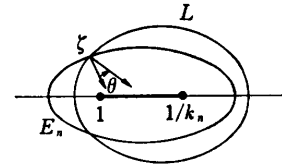


図5 卵形線と楕円の交点における法線ベクトルの交角
Fig. 5 Angle of two normal vectors at the intersection of oval and ellipse.

したがって点 ζ が E_n に沿って正の向きに動けば、点 ζ を通る卵形線 L の高度は低くなる。 L と E_n が接する場合は、 $L=L_n$ のときであって L_n と E_n の接点は楕円の方の頂点 P_n である。ゆえに E_n を囲む最小の卵形線は L_n となる。

同様に考えて楕円 F_n に接する最大の卵形線は再び L_n であり、接点は Q_n となる。(証明終)

さて、定積分(4.5)に Gauss-Chebyshev 則を用いるならば、積分区間の代数的特異点は解消されるのでこの積分則の精度は、被積分関数の残りの特異点によって支配される。それらの特異点が積分区間 $[1, 1/k_n]$ から離れるほど精度はよくなる。被積分関数は、分岐点 $1, 1/k_n$ を除き卵形線 L_n のなかで正則であるから、Gauss-Chebyshev 則の精度は、 L_n に内接する楕円 E_n の大きさによって支配される。

x_n -平面のスリット $[1, 1/k_n]$ を w -平面の単位円に写す Joukowski 変換

$$x_n = \frac{1}{4} (k_n^{-1} - 1)(w + w^{-1}) + \frac{1}{2} (1 + k_n^{-1})$$

によって楕円 E_n は、 w -平面の原点を中心として半径

$$\rho_n = \frac{\sqrt{\xi} + 1}{\sqrt{\xi} - 1} \tag{4.14}$$

$$\text{ただし } \xi = \frac{k_n^{-1} - \operatorname{sn}(c_n, k_n)}{1 - \operatorname{sn}(c_n, k_n)}$$

の円に写る。卵形線 L_n に外接する楕円 F_n に対応する w -平面の同心円の半径は

表 1 卵形線の特徴づけ
Table 1 Characterization of oval.

n	m	m'	P_n	Q_n	ρ_n	σ_n
0	1.562500Q-02	9.843750Q-01	1.00Q+00	6.40Q+01	1.00Q+00	1.00Q+00
1	3.9506173Q-01	6.0493827Q-01	7.50Q-01	2.12Q+00	3.40Q+00	5.40Q+00
2	9.4797296Q-01	5.2027036Q-02	6.21Q-01	1.66Q+00	5.80Q+01	9.48Q+01
3	9.9982160Q-01	1.7839688Q-04	6.12Q-01	1.63Q+00	1.74Q+04	2.84Q+04
4	1.0000000Q+00	1.9894454Q-09	6.12Q-01	1.63Q+00	1.56Q+09	2.55Q+09
5	1.0000000Q+00	2.4736832Q-19	6.12Q-01	1.63Q+00	1.25Q+19	2.05Q+19
0	5.0000000Q-01	5.0000000Q-01	1.00Q+00	2.00Q+00	1.00Q+00	1.00Q+00
1	9.7056275Q-01	2.9437252Q-02	9.24Q-01	1.10Q+00	2.22Q+01	2.42Q+01
2	9.9994420Q-01	5.5795921Q-05	9.17Q-01	1.09Q+00	1.19Q+04	1.30Q+04
3	1.0000000Q+00	1.9458491Q-10	9.17Q-01	1.09Q+00	3.41Q+09	3.71Q+09
4	1.0000000Q+00	2.3664554Q-21	9.17Q-01	1.09Q+00	2.80Q+20	3.05Q+20
0	9.8437500Q-01	1.5625000Q-02	1.00Q+00	1.02Q+00	1.00Q+00	1.00Q+00
1	9.9998450Q-01	1.5500512Q-05	9.98Q-01	1.00Q+00	1.02Q+03	1.02Q+03
2	1.0000000Q+00	1.5016849Q-11	9.98Q-01	1.00Q+00	1.05Q+09	1.05Q+09
3	1.0000000Q+00	1.4094109Q-23	9.98Q-01	1.00Q+00	1.12Q+21	1.12Q+21

$m=k^2, m'=1-m$

$$\sigma_n = \frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}} \tag{4.15}$$

ただし

$$\eta = \frac{1 - \operatorname{sn}(c_n, k_n)}{1 - k_n \operatorname{sn}(c_n, k_n)}$$

となる。

Landen 変換を繰り返すことによる母数と卵形線の変化をみよう。便宜上 $m=k^2, m'=1-m$ とおき、卵形線の頂点 P_n, Q_n と、それに内接あるいは外接する楕円を定める定数 (4.14) ρ_n と (4.15) σ_n を卵形線の特徴づけるものとして表 1 に示す。

点 P_n, Q_n の極限は、sn 関数の母数に関する漸近表示より

$$P_n = \tanh\left(\frac{\pi \cdot K_0}{2 \cdot K'_0}\right) \tag{4.16}$$

$$Q_n = \coth\left(\frac{\pi \cdot K_0}{2 \cdot K'_0}\right)$$

となる (文献 2), p. 574)。卵形線 L_n の極限 L_∞ は中心が P_∞ と Q_∞ の中点で、直径が 2 点の距離 $|Q_\infty - P_\infty|$ に等しい円になる。卵形線 L_n およびスリット $[1, 1/k_n]$ の収束の振舞いを図 6 に示す。

以上で楕円積分に対し Gauss-Chebyshev 則を適用するための前提条件の解析を終わり、算法の最終段階である数値積分則そのものについて述べよう。

定積分 (4.5) に対し N 点 Gauss-Chebyshev 則を用いると

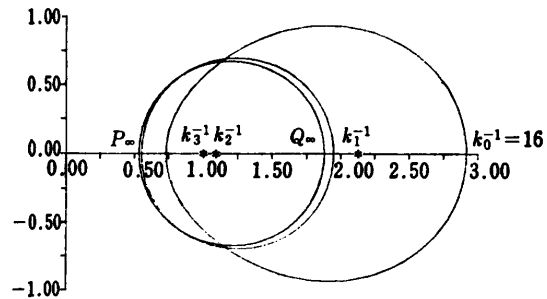


図 6 卵形線の円への収束
Fig. 6 Convergence of sequence of ovals to a circle.

$$F(z_0, k_0)$$

$$= \frac{K'_0}{K'_n} \cdot \frac{1}{N \sqrt{k_n}} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\log \frac{\xi_j + z_n}{\xi_j - z_n}}{\sqrt{(\xi_j + 1)(1 + k_n \xi_j)}} + \Delta'_N \tag{4.17}$$

$$\text{ただし } \xi_j = \frac{k_n^{-1} - 1}{2} \cos \frac{\pi}{N} \left(j + \frac{1}{2} \right) + \frac{k_n^{-1} + 1}{2}$$

となる。 Δ'_N は、積分の打ち切り誤差である。

Landen 変換を繰り返し z_n の極限值を z_∞ (この存在は楕円積分の存在からいえる) とする。母数 k_n の極限值は 1 であるので、積分区間の長さは 0 となり、標本数 N は 1 でよい。これより

$$F(z_0, k_0) = \frac{K'_0}{\pi} \log \frac{1 + z_\infty}{1 - z_\infty} \tag{4.18}$$

が得られる。ここで K'_n の極限值が $\pi/2$ であることを用いている。

したがって z -平面において, 上式右辺の実部一定の等高線は有名なアポロニウスの円群となる.

Gauss-Chebyshev 則の誤差解析を行う.

定積分 (4.5) において, 積分区間は端点の代数特異点だけを強調して, (4.5) の右辺を

$$\int_1^{1/k_n} \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(1-k_n^2x^2)}} \log \frac{x+z_n}{x-z_n} dx = \int_1^{1/k_n} \frac{g(x)}{\sqrt{(x-1)(k_n^{-1}-x)}} dx$$

と書き換える. ただし積分の係数は無視した.

一次変換

$$x = \frac{1}{2}(k_n^{-1}-1)t + \frac{1}{2}(k_n^{-1}+1)$$

により x 軸の区間 $[1, 1/k_n]$ を t 軸の $[-1, 1]$ に移し, 標準区間の N 点 Gauss-Chebyshev 則を考える.

Gauss 則の誤差解析により, N 点則の誤差は

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{U_N(\zeta)}{T_N(\zeta)} g(x(\zeta)) d\zeta \quad (4.19)$$

c : t -平面で $g(x(t))$ の正則領域内で $[-1, 1]$

を囲む任意の単一閉曲線

$T_N(\zeta)$: N 次の第一種 Chebyshev 多項式

$U_N(\zeta)$: $T_N(\zeta)$ に伴う第二種 Chebyshev 関数と表される.

t -平面の積分路 C をあらためて C_1 , 対応する x -平面の曲線を C_x とすれば, C_x が楕円 E_n に接近するほど上の誤差評価は精密となる. $g(x)$ の特異点は, 分岐点 $-1, -1/k_n$ と代数特異点 $\pm z_n$ だけである. いま, 右半平面だけ考えているので C_x に近い特異点は z_n だけとなる. しかも z_n が卵形線 L_n の実軸上の点 P_n をとるとき, 曲線 C_x と z_n の距離は最小となる. したがって, このとき上の誤差は最大となる.

周回積分 (4.19) の値は, 被積分関数の点 P_n の近傍の振舞いによって支配されることになる. その鞍点は P_n の近傍で楕円 E_n の内側にある.

以上のことを考慮すると, $g(x)$ は, z_n の近傍で

$$g(x) \approx -\frac{\log(x-z_n)}{\sqrt{k_n(1+x)(1+k_nx)}}$$

$$z_n = \operatorname{sn}(c_n, k_n)$$

と表される. さらに k_n が 1 に近ければ, 周回積分 (4.19) の近似値は $\pi/(N(1+z_n)\rho_n^{2N})$ となる.

結局, 求める楕円積分 (4.5) を n 回 Landen 変換をほどし, N 点 Gauss-Chebyshev 則で計算したとき, その打ち切り誤差は

$$\Delta_N^* \approx \frac{2}{\pi} \cdot \frac{K'_0}{N} \cdot \frac{\rho_n^{-2N}}{1 + \operatorname{sn}(c_n, k_n)} \quad (4.20)$$

となる. ここで, $\rho_n, P_n (= \operatorname{sn}(c_n, k_n))$ は, 表 1 に示されている.

この誤差評価は, 与えられた母数 $k (= k_0)$ だけに依存し z に無関係である. すなわち, 本方法は複素楕円積分に対する全域かつ一様近似になっている.

誤差 Δ_N^* の母数 k_0 に対する依存性は sn 関数の母数に関する漸近表示と, $\{k_n\}$ が 2 次収束する事実に基づき解析できるが, この点については次章の数値例が参考になるであろう.

最後に計算法の要約を示そう. まず母数 k と積分上端 z が与えられたとき, 初期条件 $z_0 = z, k_0 = k$ を設定する. 上昇 Landen 変換 (4.1), (4.2) を繰り返すと (4.3) が得られる. (4.4) の関係を用いて (4.3) を定積分表示すると (4.5) となるが, これに N 点 Gauss-Chebyshev 積分則を適用すると (4.17) のようになる. これによって求める楕円積分が得られる. Landen 変換を繰り返せば母数 k_n は十分 1 に近くなり (4.18) に示すように積分則の標本数 N は 1 でよい.

5. 数 値 例

本方法の精度を確かめるために, 算法の原理が異なる別法の計算結果と比較し誤差を求める. 別法としては, べき級数展開の方法⁵⁾ (倍精度であるが部分的に 4 倍精度) を用い, これを基準として誤差を測る. また実際の計算誤差と事前誤差評価とを比較する.

誤差をしらべる領域を $[0, 1]$ 区間とスリット $[1, 1/k]$ と z -平面の第 1 象限の三つに分ける.

(1) 区間 $[0, 1]$ を 100 等分し, 各分点上の絶対誤差の最大値を e_1 とする.

(2) 同様に区間 $[1, 1/k]$ を 200 等分して e_2 とする.

(3) 第 1 象限 $z = re^{i\theta}$ に, 標本点を

$$r = 8^l, \quad l = -22, -21, \dots, 0, 1, \dots, 22$$

$$\theta = \frac{m\pi}{100}, \quad m = 0, 1, \dots, 50$$

にとり e_3 とする.

事前誤差評価は Δ_N^* で表す. 倍精度演算を用いる.

浮動小数点演算の下では, 元来相対精度をしらべるべきであろうが, 実用的に問題になる母数の範囲 $k \leq 1-10^{-10}$ のとき, 関数値は, たかだか

$$|F(z, k)| \leq \sqrt{K^2 + K'^2} < \text{約 } 15$$

となり, さして大きくならない. したがって便宜上絶対誤差でしらべることにした.

母数 k (実は k^2) と Landen 変換の回数 n , Gauss-

Chebyshev 則の標本数 N が、楕円積分の計算精度にどのように影響するかを表 2 に示した。

領域ごとの最大誤差 e_1, e_2, e_3 のなかで、スリット境界上の誤差 e_2 が最も大きい。この結果は、楕円積分 $F(x, k)$ の解析性から当然である。また事前誤差評価 Δ_N^* (4.20) も実際の誤差の傾向を表している。

一定の精度を得るために n, N のさまざまな組合せがあるが、方法の簡潔さからいって $N=1$ としたほうがよい。 $k^2=1/64$ の例に即していえば、Landen 変換 4 回、1 点 Gauss-Chebyshev 則で 10^{-15} の精度が得られることになる。

6. 結 論

上昇 Landen 変換を用いて第 1 種不完全複素楕円積分を全域かつ一様近似する方法を示した。計算法は次の 3 点に基づいて得られたものである。

- 1) 不完全楕円積分の定積分表示。
- 2) 楕円積分の積分変数の変換に用いる Landen 変換の Riemann 面の解析。
- 3) Gauss-Chebyshev 則の適用とその誤差解析。

おわりに数値計算によって本方法の有効性を確かめた。

謝辞 本研究は著者の一人久原が文部省内地研究員として、名古屋大学工学部情報工学科に滞在中になされたものである。この機会を与えていただいた二宮市三教授に厚くお礼申し上げる。

参 考 文 献

- 1) 安藤四郎：楕円積分・楕円関数入門，日新出版 (1978)。
- 2) Abramowitz, M. and Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Pub., Inc., New York (1972)。
- 3) 二宮市三：第 1 種及び第 2 種不完全楕円積分，ライブラリー・プログラム利用の手引 (数値計算編)，名古屋大学大型計算機センター (1982)。
- 4) 林 桂一，森口繁一：高等函数表 (第 2 版)，岩波書店 (1967)。

表 2 3 領域の最大絶対誤差とその事前誤差評価

Table 2 Maximum absolute errors in three ranges and their a priori error estimation.

k^2	n	N	e_1	e_2	e_3	Δ_N^*	
1/64	1	1	1.25D-01	1.25D-01	1.25D-01	1.10D-01	
		2	5.68D-03	5.68D-03	5.68D-03	4.74D-03	
		3	3.19D-04	3.19D-04	3.19D-04	2.74D-04	
		4	2.04D-05	2.04D-05	2.04D-05	1.78D-05	
		5	1.40D-06	1.40D-06	1.40D-06	1.23D-06	
		6	1.01D-07	1.01D-07	1.01D-07	8.90D-08	
	2	1	4.41D-04	4.41D-04	4.41D-04	4.05D-04	
		2	6.59D-08	6.59D-08	6.59D-08	6.02D-08	
		3	1.26D-11	1.26D-11	1.26D-11	1.19D-11	
		4	2.66D-15	2.66D-15	2.66D-15	2.65D-15	
		3	1	4.92D-09	4.92D-09	4.92D-09	4.54D-09
		3	2	4.44D-16	1.33D-15	7.02D-16	7.52D-18
1/2	1	1	1.30D-03	1.30D-03	1.30D-03	1.25D-03	
		2	1.29D-06	1.29D-06	1.29D-06	1.27D-06	
		3	1.74D-09	1.74D-09	1.74D-09	1.72D-09	
		4	2.64D-12	2.64D-12	2.64D-12	2.61D-12	
		5	4.44D-15	4.44D-15	4.44D-15	4.25D-15	
		2	1	4.55D-09	4.55D-09	4.55D-09	4.36D-09
	2	2	7.49D-16	8.01D-16	9.12D-16	1.55D-17	
	3	1	7.63D-16	8.01D-16	9.12D-16	5.31D-20	
	63/64	1	1	4.88D-07	4.88D-07	4.88D-07	4.88D-07
2			2.36D-13	2.37D-13	2.36D-13	2.37D-13	
2			1.55D-15	1.42D-15	1.38D-15	4.58D-19	

- 5) 竹内端三：楕円函数論，岩波書店 (1936)。
- 6) 久原秀夫：複素楕円積分の静電場的意味と対数関数による大域的近似法，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-82-1 (1982)。
- 7) 竹内端三：函数論 (新版)，下巻，裳華房 (1967)。
- 8) Byrd, P.F. and Friedman, M.D.: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer-Verlag, Berlin (1954)。
- 9) 村島定行，久原秀夫：Riemann 面上のグリーン関数の重ね合せによる二次元ラプラス方程式の近似解法，情報処理，Vol. 21, No. 5, pp. 455-467 (1980)。
- 10) 森 正武：数値解析と複素関数論，筑摩書房 (1975)。

(昭和 58 年 10 月 5 日受付)

(昭和 59 年 2 月 14 日採録)