

シヨートノート

緩減少関数の数値フーリエ積分†

中 島 洋††

緩減少関数のフーリエ積分を数値的に求めることは見かけによらず困難な問題である。本論文では、この積分を効率よく(少ない標本点数で)求めることを目標とし、そのために次の方法を提案する。まず、cosine (sine) 関数の数周期分の有限区間で、被積分関数のチェビシェフ級数展開を行う。次に、その不定積分を求め、それをを用いて相続く cosine (sine) 関数のゼロ点間の積分値を項とする交代級数を作る。その交代級数は収束が非常に遅いので、収束の速いレビン変換を用いて、その収束を加速する。その結果、 $10^{-14}$  の精度の積分値をわずか数百点の標本点数で求めることができた。

1. ま え が き

緩減少関数  $f(x)$  とは、 $x$  が増加するにつれ、どんな指数関数よりもゆっくりゼロに収束する関数である。そのフーリエ積分は次のように定義される。

$$\int_a^\infty f(x)e^{-i\omega x} dx \quad (1)$$

また、(1)式の実部と虚部を次のようにおく。

$$I_c = \int_a^\infty f(x) \cos \omega x dx \quad (2)$$

$$I_s = \int_a^\infty f(x) \sin \omega x dx \quad (3)$$

本論文では、 $I_c$  の計算法に沿って述べる。

このフーリエ積分の困難さは、

- i) ゆっくり減少する関数の半無限積分
- ii) 振動積分

であることに起因する。たとえば、 $f(x)=1/\sqrt{x}$ 、 $\omega=1$ 、 $a=1$  として、 $I_c$  を積分区間の上限  $b$  が大きい次の有限積分

$$\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x dx \quad (4)$$

で近似したとき、 $b=10^5$  で有効桁は3桁程度、 $b=10^{10}$  で5桁程度しかなく、この積分を数値積分で求めたならば、標本点数は莫大なものとなる。

そこで、このようなフーリエ積分の積分値を求める従来の方法として、cosine 関数の相続くゼロ点間の個々の積分値を項とする交代級数を作り、その収束をオイラー変換を用いて加速するという方法<sup>1)</sup>がある。本

論文では、上述の方法よりも、さらに効率よく(1)式の積分値を計算する方法を提案する。

2. チェビシェフ・レビン法

ここで提案する方法は、チェビシェフ級数展開とレビン変換に基づくので、チェビシェフ・レビン法と名づける。チェビシェフ級数展開は、

- i) 収束が速い。
- ii) 項別積分が容易である。
- iii) 一様最良近似に近い。

という特長をもつ。

次にチェビシェフ・レビン法を説明する。cosine 積分  $I_c$  の積分区間は  $[a, \infty)$  であるが、図1のように適当な  $b$  で打ち切り、被積分関数  $f(x) \cos \omega x$  を有限区間  $[a, b]$  でチェビシェフ級数展開する。

$$f(x) \cos \omega x = \sum_{j=0}^m c_j T_j \left( \frac{2x - (b+a)}{b-a} \right) \quad (5)$$

ここで、 $T_j(x)$  は  $j$  次のチェビシェフ多項式、 $\{c_j\}$  は展開係数である。また、 $\Sigma'$  は初項だけ  $1/2$  倍して和をとることを意味する。このときの補間点(標本点)は次のように与えられる。

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi}{m} j \quad (6)$$

$$j=0, 1, \dots, m$$

チェビシェフ級数展開(5)の不定積分は解析的に求めることができ、これもチェビシェフ級数展開として表される。

$$\int f(x) \cos \omega x dx = \sum_{j=0}^{m+1} c'_j T_j \left( \frac{2x - (b+a)}{b-a} \right) \quad (7)$$

ここで、係数  $\{c'_j\}$  は  $\{c_j\}$  により次のように表される。

† Numerical Fourier Integration of Slowly Decreasing Function by HIROSHI NAKASIMA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学。現在、三洋電機(株)

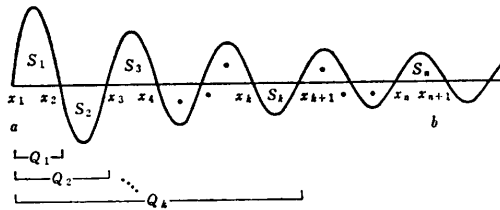


図 1 被積分関数と交代級数  
Fig. 1 Integrand and alternating series.

$$c'_j = \frac{b-a}{4j}(c_{j-1} - c_{j+1}), \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$c'_{m+1} = \frac{b-a}{4(m+1)}c_m \quad (8)$$

なお、係数  $c'_0$  は積分の任意定数である。次に不定積分(7)を用いて、求めるべき積分値に収束する交代級数を作ろう。  $\cos \omega x$  のゼロ点を  $x_j$  とおき、図1のように  $Q_k$  を  $x_1$  から  $x_{k+1}$  までの積分値とすれば、(7)式から次のように計算される。

$$Q_k = \left[ \sum_{j=0}^{m+1} c'_j T_j \left( \frac{2x - (b+a)}{b-a} \right) \right]_{x_1}^{x_{k+1}} \quad (9)$$

また、一山ごと ( $[x_k, x_{k+1}]$  ごと) の積分値  $S_k$  は、  

$$S_k = Q_k - Q_{k-1} \quad (10)$$
 で求められ、これにより交代級数  $Q_n$  が得られる。

$$Q_n = \sum_{k=1}^n S_k \quad (11)$$

この交代級数は収束が非常に遅いため、次章で述べるレビン変換で収束を加速する。このように、チェビシエフ・レビン法は複数個の山をまとめて扱うことにより標本点数を節約している。

### 3. レビン変換

加速法として、レビンの  $u$  変換<sup>2)-4)</sup>を用いることにした。この変換は各種の加速法と比較して、一般に収束が速く、汎用性が高いという特長<sup>3)</sup>をもつ。レビン変換は級数  $Q_l = \sum_{j=1}^l S_j$  に対して、次式で与えられる。

$$T_{k,n} = \frac{\Delta^k(n^{k-1}Q_n/R_n)}{\Delta^k(n^{k-1}/R_n)} \quad (12)$$

$$\left( \begin{matrix} n=1, 2, \dots, l-1 \\ k=1, 2, \dots, l-n \end{matrix} \right)$$

ただし、

$$R_n = nS_n \quad (u \text{ 変換}) \quad (13)$$

であり、 $\Delta^k$  は  $n$  についての  $k$  階前進差分を表す。ここでは、 $T_{k,1}$  ( $k=1, 2, \dots, l-1$ ) を加速数列として採用し、 $k$  を加速段数と呼ぶことにする。

次にこのレビン変換を求めるための実際の計算アルゴリズムを示す。(12)式の分子と分母をそれぞれ、

$$U_{k,n} = \frac{\Delta^k(n^{k-1}Q_n/R_n)}{(n+k)^k} \quad (14)$$

$$V_{k,n} = \frac{\Delta^k(n^{k-1}/R_n)}{(n+k)^k} \quad (15)$$

とおけば、 $U_{k,n}$  と  $V_{k,n}$  は次のような同じ形の漸化式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} U_{0,n} &= \frac{Q_n}{nR_n} \\ U_{k,n} &= U_{k-1,n+1} - \frac{n}{n+k} \left( \frac{n+k-1}{n+k} \right)^{k-1} U_{k-1,n} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} V_{0,n} &= \frac{1}{nR_n} \\ V_{k,n} &= V_{k-1,n+1} - \frac{n}{n+k} \left( \frac{n+k-1}{n+k} \right)^{k-1} V_{k-1,n} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left( \begin{matrix} n=1, 2, \dots, l-1 \\ k=1, 2, \dots, l-n \end{matrix} \right)$$

これより求めるレビン変換  $T_{k,1}$  は、

$$T_{k,1} = U_{k,1}/V_{k,1} \quad (18)$$

として得られる。

### 4. チェビシエフ・レビン法の自動化

チェビシエフ・レビン法を自動化するにあたって、上限  $b$  をどのように設定するかはむずかしい問題である。ここでは、要求精度  $\epsilon = 10^{-9}$  に対して、積分区間の下限  $a$  から  $q+2$  個分の山だけ右の位置を上限  $b$  とすることにした(ただし、下限  $a$  が cosine の関数のゼロ点でないときは、 $a$  より大きな、 $a$  にもっとも近いゼロ点から山を数えるものとする)。この設定は、交代級数のこの程度の項数に対して、レビン変換で加速すれば、積分値に収束することを期待しているわけで、もし収束しなければ、それ以後の数山を追加して加速を続ければよい。したがって、上限  $b$  の設定は標本点数に影響するだけで、精度にはほとんど影響しない。また、その収束判定は次のようにした。要求精度  $\epsilon$  が与えられたとき、レビン変換による加速数列が、

$$|T_{k,1} - T_{k-1,1}| < \epsilon, \quad k=2, 3, \dots, l-1 \quad (19)$$

を満足すれば収束したとみなす。これが満たされなければ、交代級数の項数  $l$  を増して計算を続行する。

### 5. 数値実験

チェビシエフ・レビン法を自動化したので、その数

表 1  $I_{c1} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cos x dx$  に対する数値実験

Table 1 Numerical results of  $I_{c1} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cos x dx$ .

要求絶対精度	AQCOSD		チェビシェフ・レビン法		
	絶対誤差	標本点数	絶対誤差	標本点数	加速段数
1.0D-02	0.31D-03	168	0.33D-03	17	2
1.0D-04	0.97D-05	208	0.15D-05	33	4
1.0D-06	0.12D-06	395	0.25D-08	65	6
1.0D-08	0.16D-08	505	0.30D-09	65	7
1.0D-10	0.18D-10	1029	0.18D-12	129	9
1.0D-12	0.20D-12	2221	0.49D-13	129	10
1.0D-14	0.20D-14	3830	0.16D-14	129	12

真値 = -0.33740392290097

表 2  $I_{c1} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cos 100x dx$  に対する数値実験

Table 2 Numerical results of  $I_{c1} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cos 100x dx$ .

要求絶対精度	AQCOSD		チェビシェフ・レビン法		
	絶対誤差	標本点数	絶対誤差	標本点数	加速段数
1.0D-02	0.14D-05	168	0.19D-09	17	2
1.0D-04	0.69D-08	180	0.12D-08	33	2
1.0D-06	0.38D-08	208	0.61D-09	33	3
1.0D-08	0.13D-09	230	0.61D-09	65	3
1.0D-10	0.51D-12	270	0.87D-11	65	7
1.0D-12	0.69D-14	309	0.16D-12	65	10
1.0D-14	0.70D-16	679	0.59D-15	65	14

真値 = 0.514882514261 × 10<sup>-1</sup>

表 3  $I_{c1} = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x dx$  に対する数値実験

Table 3 Numerical results of  $I_{c1} = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x dx$ .

要求絶対精度	AQCOSD		チェビシェフ・レビン法		
	絶対誤差	標本点数	絶対誤差	標本点数	加速段数
1.0D-02	0.35D-03	172	0.41D-03	17	2
1.0D-04	0.58D-05	217	0.18D-05	33	4
1.0D-06	0.13D-06	270	0.30D-08	65	6
1.0D-08	0.15D-08	506	0.33D-09	65	7
1.0D-10	0.18D-10	1027	0.29D-12	129	9
1.0D-12	0.21D-12	1737	0.57D-13	129	10
1.0D-14	0.26D-14	3193	0.86D-15	129	12

真値 = -0.55573433848504

値実験を示す。その結果を名古屋大学の数値計算用ライブラリーの登録ルーチン<sup>9)</sup> AQCOSD と比較する。このルーチンも同じ目的で作成されたもので、その方法は半無限区間  $[a, \infty)$  の積分を有限区間  $[a, \pi/\omega]$  に書き直し、交代級数として表される被積分関数の値

表 4  $I_{c2} = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos 100x dx$  に対する数値実験

Table 4 Numerical results of  $I_{c2} = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos 100x dx$ .

要求絶対精度	AQCOSD		チェビシェフ・レビン法		
	絶対誤差	標本点数	絶対誤差	標本点数	加速段数
1.0D-02	0.59D-06	168	0.14D-08	17	2
1.0D-04	0.59D-06	168	0.46D-09	33	2
1.0D-06	0.12D-08	203	0.24D-09	33	3
1.0D-08	0.60D-10	229	0.24D-09	65	3
1.0D-10	0.29D-12	259	0.12D-10	65	6
1.0D-12	0.21D-13	292	0.69D-13	65	10
1.0D-14	0.14D-15	649	0.75D-15	65	13

真値 = 0.510637676886 × 10<sup>-1</sup>

表 5  $I_{c3} = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \cos x dx$  に対する数値実験

Table 5 Numerical results of  $I_{c3} = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \cos x dx$ .

要求絶対精度	AQCOSD		チェビシェフ・レビン法		
	絶対誤差	標本点数	絶対誤差	標本点数	加速段数
1.0D-02	0.61D-04	168	0.20D-03	33	2
1.0D-04	0.14D-05	210	0.18D-05	65	4
1.0D-06	0.10D-07	399	0.34D-08	65	6
1.0D-08	0.36D-09	676	0.40D-09	129	7
1.0D-10	0.30D-11	1463	0.23D-12	129	9
1.0D-12	0.29D-13	2773	0.73D-13	257	10
1.0D-14	0.24D-15	4480	0.14D-15	257	12

真値 = -0.5041376045594 × 10<sup>-1</sup>

表 6  $I_{c3} = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \cos 100x dx$  に対する数値実験

Table 6 Numerical results of  $I_{c3} = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \cos 100x dx$ .

要求絶対精度	AQCOSD		チェビシェフ・レビン法		
	絶対誤差	標本点数	絶対誤差	標本点数	加速段数
1.0D-02	0.87D-07	168	0.92D-05	17	2
1.0D-04	0.11D-07	182	0.14D-05	33	3
1.0D-06	0.17D-10	204	0.13D-07	33	5
1.0D-08	0.54D-11	242	0.59D-09	65	7
1.0D-10	0.31D-10	257	0.69D-11	65	11
1.0D-12	0.39D-14	306	0.14D-12	65	13
1.0D-14	0.20D-15	709	0.14D-14	98	18

真値 = -0.10006012051 × 10<sup>-1</sup>

をオイラー変換で加速し、適応型ニュートン・コーツ 9点則で積分している。次の積分に対して、 $\omega=1$  および  $\omega=100$  の場合の結果を、表 1~6 に示す。

$$I_{c1} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cos \omega x dx \quad (20)$$

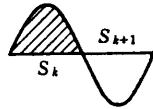


図 2 項  $S_k$  の決定  
Fig. 2 Determination of term  $S_k$ .

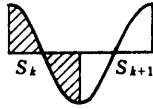


図 3 項  $S_k$  の決定  
Fig. 3 Determination of term  $S_k$ .

$$I_{c2} = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \omega x dx \quad (21)$$

$$I_{c3} = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \cos \omega x dx \quad (22)$$

実際には、半周期ごとの積分値  $S_k$  を図 2 のように求めるよりも、図 3 のように求めたほうがレビン変換の収束が速い。しかし高精度を要求した場合、桁落ちのため要求精度に達しない場合がある。表 1～5 は  $S_k$  を図 3 のようにして、表 6 は  $S_k$  を図 2 のようにして求めた場合の結果である。

## 6. む す び

数値実験の結果をまとめると次のようになる。

i) チェビシェフ・レビン法の標本点数は数十～数百点であり、オイラー変換を用いる AQCOSD と比較して 1/3～1/30 程度である。

ii) 角周波数  $\omega$  が大きいほうが有利である。

本方法は緩減少関数のフーリエ積分に対する自動積分として有効である。今後の課題として、

i) 上限  $b$  の合理的な設定（現状は多分に経験的である）。

ii) 誤差評価（収束判定）。

などがあげられる。また、本方法はフーリエ積分に限らず、たとえば、被積分関数がベッセル関数のように、正負に振動し、相続くゼロ点間の積分値の交代級数として表されるような積分に対しても適用することができる。

謝辞 本研究に関し、いろいろご助言いただいた二宮市三教授、鳥居達生助教授、吉田年雄助手、杉浦洋助手に深く感謝します。

## 参 考 文 献

- 1) Longman, I.M.: Note on a Method for Computing Infinite Integrals of Oscillatory Functions, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 52, No. 4, pp. 764-768 (1956).
- 2) Levin, D.: Development of Nonlinear Transformations for Improving Convergence of Sequences, *Int. J. Comput. Math. Sec. B.*, Vol. 3, pp. 371-388 (1973).
- 3) Smith, D.A. and Ford, W.F.: Acceleration of Linear and Logarithmic Convergence, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 16, No. 2, pp. 223-240 (1979).
- 4) Smith, D.A.: HURRY; An Acceleration Algorithm for Scalar Sequence and Series, *ACM Trans. Math. Softw.*, Vol. 9, No. 3, pp. 346-354 (1983).
- 5) 吉田年雄, 二宮市三: 振動する関数の半無限自動積分ルーチンの作成, 情報処理学会第 26 回全国大会講演論文集(Ⅲ), pp. 1253-1254 (1983).

(昭和 59 年 4 月 3 日受付)

(昭和 59 年 6 月 19 日採録)