

第1種不完全複素楕円積分の全域かつ一様近似 (II)[†]

久原秀夫^{††} 鳥居達生^{†††} 杉浦 洋^{†††}

下降 Gauss 変換を用いて第1種不完全複素楕円積分 $F(z, k)$ を求める数値計算法を提案する。本方法は母数 k が小さい場合に適しているが、 z に関しては全域かつ一様近似になっている。事前誤差評価と計算例によって本方法が楕円積分の高精度計算に有効であることを示す。

1. まえがき

実母数の第1種不完全複素楕円積分

$$F(z, k) = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (1.1)$$

によって、2次元 Laplace 方程式の境界値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x, y) = u(z)$$

境界条件, スリット $[1, k^{-1}]$ 上で $u(z) = K$

スリット $[-k^{-1}, -1]$ 上で $u(z) = -K$

が解ける。ここで K は、第1種完全楕円積分で

$$K = K(k) = F(1, k)$$

である。 $F(z, k)$ の実部が解 $u(x, y) = u(z)$ を与える。われわれは、母数 k が大きい場合上昇 Landen 変換によって不定積分 (1.1) を求める方法について述べた¹⁾。母数 k が小さい場合、適当な変数変換 (たとえば Jacobi 変換) により母数 k を補母数 k' に転換できるので、理論的には、上昇 Landen 変換だけで、任意の実母数と複素数 z に対して楕円積分 (1.1) の計算は可能といえる。

本論文では、母数 k が小さい場合、上述のような予備的な変換を用いず直接積分 (1.1) を計算する方法について述べる。これは、2次元 Laplace 方程式を境界条件

スリット $[-1, 1]$ 上で $u(z) = 0$

スリット $[1, \infty], [-\infty, -1]$ 上で、 $u(z) = K'$

の下で解くことに対応する。ここで $K' = K(k')$ 。

解 $u(z)$ は、不定積分

$$\tilde{F}(z, k) = \int_{+0i}^z \frac{dt}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} \quad (1.2)$$

の実部にほかならない。これは、第1種楕円積分 $F(z, k)$ に純虚数 $(-i)$ を掛けた形になっている。求める楕円積分の領域は、第1象限に限定してよい。ここでは、 $\tilde{F}(z, k) = (-i)F(z, k)$ が成立するので、(1.1) の代わりに (1.2) を考察の対象とし、楕円積分 (1.1) と区別する意味で、引用符を付け (1.2) を“楕円積分”とよぶことにする。

前論文と同様、不定積分 (1.2) の数値積分は静電場解析の手法である代用電荷法の観点から得られたものであることを断わっておこう^{1), 2)}。

さて、第1種実楕円積分

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

の算法として数学公式 I (p. 145) に4通りの変数変換が記されている³⁾。その最後に無名で変換

$$\sin \psi = \frac{(1+k) \sin \varphi}{1+k \sin^2 \varphi}$$

があげられている。他方 Byrd の著書 (pp. 39~40) によれば、この変換に Gauss の名が与えられている⁴⁾。

われわれは、これを複素平面に拡張するため、 $z = \sin \varphi$, $w = \sin \psi$ とおき Gauss 変換

$$w = \frac{(1+k)z}{1+kz^2} \quad (1.3)$$

を用いる。“楕円積分” (1.2) の置換積分として、以後この変換を用いることにする。

Gauss 変換 (1.3) は、有名な Joukowski 変換

$$w = J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (1.4)$$

を借りて表現することによりその意味が明確となる。

この逆関数の Riemann 面は2枚であるが、 z -平面の単位円の外部 (内部) を w -平面の1枚 (他方の1枚) に対応させる。見掛け上 $J(z) = J(1/z)$ であるが、

[†] Uniform Approximation of Incomplete Elliptic Integral of the First Kind on the Extended Complex Plane (II) by HIDEO KUHARA (Department of Information and Electronics Engineering, Yatsushiro National College of Technology), TATSUO TORII and HIROSHI SUGIURA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Nagoya University).

^{††} 八代工業高等専門学校情報電子工学科

^{†††} 名古屋大学工学部情報工学科

z と w の対応を Riemann 面で考えるならば, 両者の違い ($J(z) \neq J(1/z)$) は明らかとなる. ここに敢えて記号 $J(z)$ を導入する意味がある. Riemann 面上で z と w は 1 対 1 対応であるから, $J(z)$ の逆変換は,

$$z = J^{-1}(w) = \frac{1 + \sqrt{\frac{w-1}{w+1}}}{1 - \sqrt{\frac{w-1}{w+1}}} \quad (1.5)$$

によって定まる. ただし複素数の平方根は正の実軸上で正の値をとる分枝とする.

Joukowski 変換 $w = J(z)$ は, $[-1, 1]$ にカットを入れた w -平面を z -平面の単位円の外部に写すが, このことを端的にスリット $[-1, 1]$ を円に開くとよぶ.

w -平面の点 1 から実軸上を経て無限遠点と -1 までカット (以後 $[1, \infty, -1]$ と書く) を入れ, 残りの領域を z -平面の単位円の内部に写す変換は $w = 1/J(z^{-1})$ で表される. このことは無限長スリット $[1, \infty, -1]$ を単位円に開くといえよう. この用語を用いるならば, Gauss 変換 (1.3) は

$$w = \frac{J\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{J\left(\frac{1}{\sqrt{k}z}\right)} \quad (1.6)$$

と書けるから, 便宜上

$$h = \frac{1}{J\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)} \quad (1.7)$$

とおけば, (1.6) は無限長スリット $[h^{-1}, \infty, -h^{-1}]$ を半径 $1/\sqrt{k}$ の円に開くことになる.

母数 h の “楕円積分”

$$\tilde{F}(w, h) = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(w^2-1)(1-h^2w^2)}}$$

に対し, 変数変換 (1.6) をほどこせば,

$$\tilde{F}(w, h) = (1+k)\tilde{F}(z, k) \quad (1.8)$$

が成り立つ.

母数 h の定義 (1.7) より $h > k$ となるので, 上式を w -平面から z -平面への移行とみれば, それは母数に関して下降 Gauss 変換となる. したがって, (1.7) を k について解けば

$$k = \frac{1}{[J^{-1}(h^{-1})]^2} = \frac{1-h'}{1+h'}$$

となる. ここで h' は h の補母数.

当面の目的は, $\tilde{F}(z, k)$ を求めることであるから, これを $\tilde{F}(w, h)$ と考え下降 Gauss 変換を繰り返して適用してみよう. すなわち,

初期値 $k_0 = k, z_0 = z$

$$\text{漸化式 } k_{n+1} = \frac{1-k'_n}{1+k'_n}$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{k_{n+1}} J^{-1}\left(\frac{1}{k_n z_n}\right)} \quad (1.9)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

ここで, Gauss 変換における漸化関係 (1.8) を n 回用いると

$$\tilde{F}(z, k) = \tilde{F}(z_0, k_0) = \prod_{j=1}^n (1+k_j) \tilde{F}(z_n, k_n) \quad (1.10)$$

とくに $z_0 = 1$ とおけば, 点 1 は Gauss 変換によって不変だから

$$\prod_{j=1}^n (1+k_j) = \frac{K_0}{K_n}$$

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1+k_j) = \frac{2}{\pi} K_0 \quad (1.11)$$

ただし $K_n = K(k_n), n \geq 0$

上の二つの関係式 (1.10), (1.11) は不完全および完全楕円積分についてよく知られたことである.

母数 k_n は, その作り方から単調減少で 0 に 2 次収束する. 明らかに $\tilde{F}(z_n, k_n)$ は初等積分に退化するので (1.10) において, n を十分大きくとれば, 目的の “楕円積分” $\tilde{F}(z, k)$ の近似が得られるであろう.

以上のことから母数 k は 0 に十分近いと仮定してよい. そのときの “楕円積分” を求めるために Gauss 変換の後に 1 回だけスリット $[-1, 1]$ を単位円に開く Joukowski 変換を用いる. これによって不完全楕円積分の定積分表示に対し Gauss-Chebyshev 則を適用する前提条件が整うことになるのである.

2. 定積分表示

z -平面上のカット $[-1, 1], [k^{-1}, \infty, -k^{-1}]$ を除く任意の点 z_0 から z_1 までの複素積分

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} \quad (2.1)$$

をカットの上岸の定積分として表そう.

z_0 と z_1 を結ぶ積分路がスリット $[-1, 1]$ あるいは $[k^{-1}, \infty, -k^{-1}]$ を回るとき積分 (2.1) に多価性が現れる. これを避けるため原点から負の虚軸に沿って z -平面を切る. ここで (2.1) の被積分関数は 1 価正則であるから Cauchy の積分表示によって, それは

$$\frac{1}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}$$

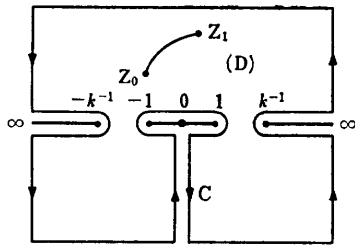


図1 スリットに沿った積分路
Fig. 1 Contour.

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{(\zeta-z)\sqrt{(\zeta^2-1)(1-k^2\zeta^2)}} \quad (2.2)$$

と書ける。積分路 C は、図1に示すように z-平面のカットに沿って1周する単純閉曲線である。点 z_0, z_1 は、その内部 D 上の任意の点である。z_0 と z_1 を結ぶ D 上の曲線に沿って (2.2) を辺々積分する。積分順序の変更は許されるので

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \log \frac{\zeta-z_0}{\zeta-z_1} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(1-k^2\zeta^2)}} \quad (2.3)$$

となる。D 上で対数関数の1価性を保つため z_0, z_1 を結ぶ D 上の曲線に沿ってカットを入れる。右辺の被積分関数は、無限遠点近傍で O(\zeta^{-2}) である。積分路 C を図1のように無限遠点および各スリットに近づける。負の虚軸上の往復の積分は打ち消されるが、スリット [-1, 1], [k^{-1}, \infty, -k^{-1}] の上岸、下岸では被積分関数の符号が反転するので、結局、二つのスリットの上岸だけの積分

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \log \frac{x-z_0}{x-z_1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{1}{\pi} \int_{|x| \geq k^{-1}} \log \frac{x-z_0}{x-z_1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}$$

となる。左辺において z_0 を原点 (+0i) に近づけると、その極限値は \tilde{F}(z_1, k) となる。このとき右辺第1項は原点が対数特異点の広義積分である。積分の上限 z_1 を z と省略記法を用いると不定積分表示であった“楕円積分” \tilde{F}(z, k) の定積分表示

$$\tilde{F}(z, k) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \log \frac{x}{x-z} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{1}{\pi} \int_{|x| \geq k^{-1}} \log \frac{x}{x-z} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} \quad (2.4)$$

が得られる。

被積分関数の特異点は全部で6点ある。すなわち \pm 1, \pm 1/k が1位の分岐点で、0およびzが対数特異点である。いま、Gauss-Chebyshev 則を用いるならば、端点の1位の分岐点の特異性は解消できる。下降 Gauss 変換を反復すれば、母数 k は十分小さいとして一般性を失わない。このとき実質的に影響が残る特異点は0とzとみなせる。これを積分区間から真に離す必要がある。

そこで、再び“楕円積分”の不定積分表示

$$\tilde{F}(w, h) = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(w^2-1)(1-h^2w^2)}}$$

について考える。ここで変数変換 w=J(z) を行ってみよう。計算により

$$\tilde{F}(w, h) = \frac{2}{h} \int_i^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-k)(k^{-1}-z^2)}} \quad (2.5)$$

$$w=J(z), \quad h^{-1}=J(k^{-1/z})$$

が導かれる。w-平面の原点は z-平面の i に対応している。この定積分表示は、(2.3), (2.4) の場合と同様にして

$$\tilde{F}(w, h) = -\frac{2}{\pi h} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \log \frac{x-i}{x-z} \frac{dx}{\sqrt{(k-x^2)(k^{-1}-x^2)}} + \frac{2}{\pi h} \int_{|x| \geq 1/\sqrt{k}} \log \frac{x-i}{x-z} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-k)(x^2-k^{-1})}} \quad (2.6)$$

となる。積分区間は二つに分かれているが、一方の積分変数 x を 1/x と変換すれば一つにまとめられる。

さらに被積分関数の根号内の関数が偶関数であることに注意すれば、\tilde{F}(w, h) は、有限区間 [0, \sqrt{k}] あるいは半無限区間 [1/\sqrt{k}, \infty] の実積分として表される。

$$\tilde{F}(w, h) = \frac{2}{\pi h} \int_0^{\sqrt{k}} \log \frac{x^2-x^2}{1-x^2x^2} \frac{dx}{\sqrt{(k-x^2)(k^{-1}-x^2)}} = \frac{2}{\pi h} \int_{1/\sqrt{k}}^{\infty} \log \frac{1-x^2x^2}{x^2-x^2} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-k)(x^2-k^{-1})}} \quad (2.7)$$

被積分関数は偶関数であるから、便宜上、積分区間を原点对称に、すなわち [-\sqrt{k}, \sqrt{k}] にとる。被積分関数の特異点は全部で8個ある。1位の代数分岐点は \pm \sqrt{k}, \pm 1/\sqrt{k}, 対数特異点が \pm z, \pm 1/z である。下降 Gauss 変換の反復と後処理としての

Joukowski 変換によって積分区間から対数特異点をつねに離すことができる。この点を次章で明らかにする。

3. 下降 Gauss 変換

“楕円積分” $\tilde{F}(z, k)$ の不定積分表示において, $z_0 = z, k_0 = k$ と初期値を設定し下降 Gauss 変換を n 回ほどこした後, Joukowski 変換を1回行えば, (2.5) より

$$\tilde{F}(z_n, k_n) = \frac{2}{k_n} \int_i^t \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - k_{n+1})(k_{n+1}^{-1} - t^2)}} \quad (3.1)$$

$$z_n = J(t)$$

が成り立つ。Gauss 変換による母数の変化と Joukowski 変換によるそれとは等しいので, 最後の母数 k_{n+1} も (1.9) で生成される考えてよい。上式が計算できるならば (1.10) により求める $\tilde{F}(z_0, k_0)$ が得られることになる。

そこで, 与えられた z_0 -平面 (カットを除く) が, 最終的な t -平面のいかなる領域に写像されるか考えることにする。

われわれは, $\tilde{F}(z, k)$ の全域かつ一様近似を目標としているので, z -平面全体を考えるが, 楕円積分の評価だけならば半径 $1/\sqrt{k}$ の円内だけ対象にすればよいことを注意しておこう。

z_0 -平面からスリット $[1/k_0, \infty, -1/k_0]$ を除いた領域を D_0 とする。換言すれば D_0 の境界が, この半無限長スリットである。 D_0 の境界をあらためて L_0 とすれば, それは

$$L_0; \operatorname{Re} \tilde{F}(z_0, k_0) = \operatorname{Re} \tilde{F}(k_0^{-1}, k_0) \quad (3.2)$$

と $\tilde{F}(z_0, k_0)$ の実部一定の等高線として表される。右辺は完全楕円積分 $K'_0 = K(k'_0)$ である。

n 回の Gauss 変換による D_0 の像を D_n とすれば, その境界 L_n は, $\tilde{F}(z_0, k_0)$ と $\tilde{F}(z_n, k_n)$ の関係 (1.10) と (3.2) より

$$L_n; \operatorname{Re} \tilde{F}(z_n, k_n) = \frac{K'_0 \cdot K_n}{K_0} \quad (3.3)$$

となる。

D_0 は非有界領域であるが, $D_n, n \geq 1$ は, つねに有界である。とくに $n=1$ のときは, Gauss 変換の定義により D_1 は, 半径 $1/\sqrt{k_1}$ の円となる。 D_n の境界 L_n は, 4次の代数曲線となることを付録に記す。

曲線の列 $\{L_n\}$ の収束の速さとその極限を示す。

母数 k_n の生成規則から漸近的に, k_n は

$$k_{n+1} \simeq \frac{1}{4} k_n^2 \simeq O\left(\left(\frac{k_0}{4}\right)^{2^{n+1}}\right) \quad (3.4)$$

と表され 0 に 2 次収束する。

閉領域 \bar{D}_0 上の任意の一点 z_0 を初期値として下降 Gauss 変換によって生成される点列を $\{z_n\}$ とする。生成の規則自体から, それらは

$$z_n = \frac{(1+k_{n+1})z_{n+1}}{1+k_{n+1}z_{n+1}^2} \quad (3.5)$$

にしたがう。これより

$$z_{n+1} - z_n = \frac{k_{n+1}z_{n+1}(z_{n+1}^2 - 1)}{1+k_{n+1}z_{n+1}^2} \quad (3.6)$$

が導かれる。 z_{n+1} は有界閉領域 \bar{D}_{n+1} の 1 点であり, k_n は 0 に 2 次収束するので, $\{z_n\}$ も 2 次収束することになる。変換 (3.5) は, $\{k_n\}$ の収束に伴い恒等写像に接近する。

曲線列 $\{L_n\}$ は, 2 次収束するので, その極限を L_∞ とする。 L_n の定義 (3.3) において, 両辺の極限をとれば

$$L_\infty; \operatorname{Re} \tilde{F}(z_\infty, 0) = \frac{\pi}{2} \frac{K'_0}{K_0}$$

すなわち

$$L_\infty; \operatorname{Re} \int_0^{z_\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)}} = \frac{\pi}{2} \frac{K'_0}{K_0} \quad (3.7)$$

となる。これは, 2 点 1, -1 を焦点とする楕円であって, その長軸, 短軸の長さの半分は, それぞれ

$$\cosh \frac{\pi K'_0}{2K_0}, \quad \sinh \frac{\pi K'_0}{2K_0} \quad (3.8)$$

である。

母数 $k=1/\sqrt{2}$ (これは必ずしも小さくないが) の下降 Gauss 変換の過程で, 曲線 L_n が楕円 L_∞ に収束する有様を示したのが図 2 である。わずかに 2 回の変

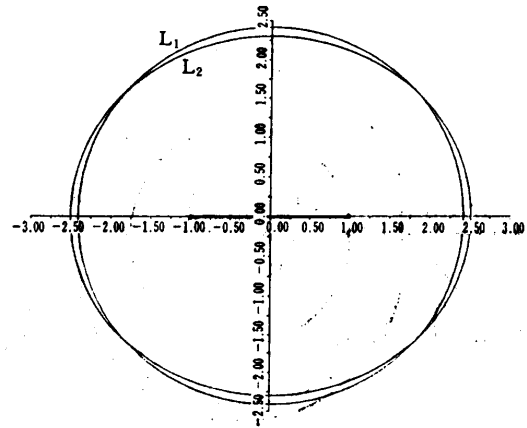


図 2 $\{L_n\}$ の収束, $k=1/\sqrt{2}$ の場合

Fig. 2 Convergence of $\{L_n\}$ with modulus $1/\sqrt{2}$.

換で、図で見ると収束している。そこで、曲線 L_n を描く都合上 $k=0.999$ とした。その結果が図3にある。本方法は、元来母数 k が小さい場合に適した方法であるが、それでも3回以上の変換は図では識別できない。

Gauss 変換の後に Joukowski 変換 $z=J(t)$ を1回使う。このとき z -平面の楕円 L_n は、 t -平面の円

$$\Gamma_0; |t|=e^{\pi K'_n/2K_n} > 1 \quad (3.9)$$

に写る。楕円領域 D_n は、単位円と円 Γ_0 で囲まれる円環領域

$$1 \leq |t| \leq e^{\pi K'_n/2K_n} \quad (3.10)$$

に写る。

下降 Gauss 変換を n 回で打ち切ったとき、 z_n -平面の曲線 L_n は、楕円 L_n からわずかにずれているので、これに伴い t -平面の円環の外周 (3.9) もわずかに変形する。さらに t -平面においては、原点近傍に短いスリット

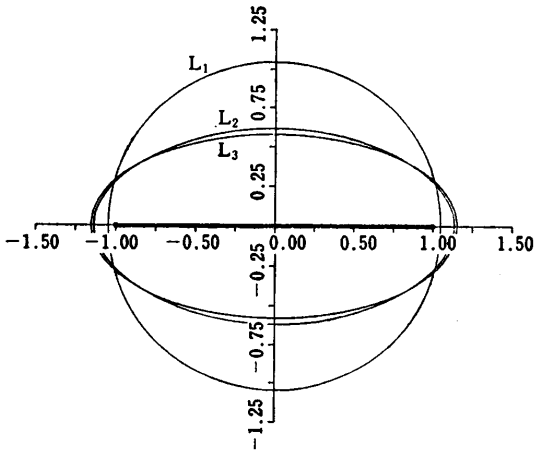


図3 $\{L_n\}$ の収束, $k=0.999$ の場合

Fig. 3 Convergence of $\{L_n\}$ with modulus 0.999.

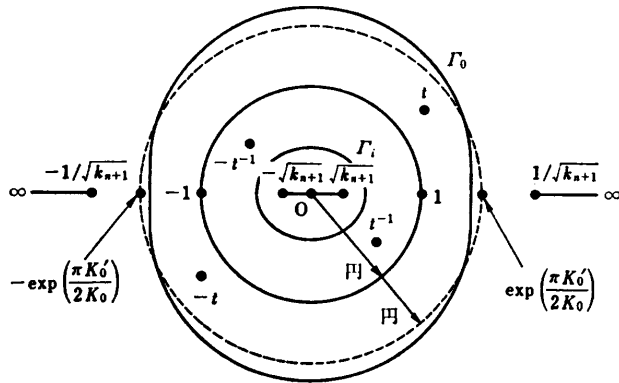


図4 スリットと特異点

Fig. 4 Slits and singular points.

ット $[-\sqrt{k_{n+1}}, \sqrt{k_{n+1}}]$, 無限遠点近傍に半無限スリット $[1/\sqrt{k_{n+1}}, \infty, -1/\sqrt{k_{n+1}}]$ が現れる (図4)。

母数 k_n が十分0に近ければ、“楕円積分” $\tilde{F}(z_n, k_n)$ は、母数に関して連続なので $\tilde{F}(z_n, 0)$ で近似できる。

この方法も楕円積分の一つの計算法であるが、われわれは、さらに精密な結果を求めて $\tilde{F}(J(t), k_n)$ の定積分表示(2.7)に対し N 点 Gauss-Chebyshev 則を用いることにする。ただし被積分関数の偶関数性を利用するために積分区間は原点对称にとる。

便宜上、積分区間として原点を含む側、すなわち $[-\sqrt{k_{n+1}}, \sqrt{k_{n+1}}]$ をとる。被積分関数の対数特異点は $\pm t, \pm 1/t$ であって、しかも t の動く範囲は、環状領域(3.10)に制限される。したがって積分区間から、それらの特異点は、たしかに離れたことになり、Gauss-Chebyshev 則を適用する前提条件が整ったこととなる。

積分区間および被積分関数のすべての特異点の位置が図4に示されている。計算の対象となる t の領域は、正確には環状領域 (3.10) ではないが、外周 Γ_0 はほとんど円である。内周 Γ_i は、外周の単位円に関する鏡像であって、 $\sqrt{k_{n+1}}, -\sqrt{k_{n+1}}$ を焦点とする楕円 (近似) である (図4)。これらの正確な表現は付録に委ねられている。

4. 誤差解析

“楕円積分” $\tilde{F}(z_n, k_n)$ の定積分表示

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z_n, k_n) &= \frac{1}{\pi k_n} \int_{-\sqrt{k_{n+1}}}^{\sqrt{k_{n+1}}} \log \frac{x^2 - t^2}{1 - x^2 t^2} \\ &\quad \cdot \frac{dx}{\sqrt{(k_{n+1} - x^2)(k_{n+1}^{-1} - x^2)}} \\ z_n = J(t), \text{ Re } t &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

に対し、標準的な Gauss 則を適用するため区間を $[-1, 1]$ に正規化する。すなわち $x = \sqrt{k_{n+1}}s$ とすることにより

$$\begin{aligned} \tilde{F}(J(t), k_n) &= \frac{\sqrt{k_{n+1}}}{\pi k_n} \int_{-1}^1 \log \frac{k_{n+1}s^2 - t^2}{1 - k_{n+1}t^2s^2} \\ &\quad \cdot \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k_{n+1}^2s^2)}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。

これに対し $1/\sqrt{1-s^2}$ を重み関数とする $2N$ 点 Gauss-Chebyshev 則を適用する。被積分関数は偶関数であるから、実質 N 点則である。

この式(4.2)の積分記号の部分に対する $2N$ 点Gauss則の誤差は

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{U_{2N}(s)}{T_{2N}(s)} \log \frac{k_{n+1}s^2 - t^2}{1 - k_{n+1}t^2s^2} \frac{ds}{\sqrt{1 - k_{n+1}s^2}} \quad (4.3)$$

と積分表示される。ここで積分路 C は s -平面のカット $[-1, 1]$ を囲み、かつその内部で被積分関数が1価正則となるようにとらなければならない(文献5, 7章)。

$T_{2N}(s)$ は $2N$ 次の第1種Chebyshev多項式, $U_{2N}(s)$ は、それに伴うChebyshev関数であって、それぞれ次のように複素変数で表示される。

$$T_{2N}(s) = \frac{1}{2} \{ (s + \sqrt{s^2 - 1})^{2N} + (s - \sqrt{s^2 - 1})^{-2N} \}$$

$$U_{2N}(s) = \frac{\pi}{\sqrt{s^2 - 1}} (s + \sqrt{s^2 - 1})^{-2N} \quad (4.4)$$

そこで、周回積分(4.3)を近似的に評価しよう。

このとき $T_{2N}(s)$ と $U_{2N}(s)$ の漸近表示

$$T_{2N}(s) = 2^{2N-1} s^{2N} (1 + O(N/s^2))$$

$$U_{2N}(s) = \pi 2^{-2N} s^{-2N-1} (1 + O(N/s^2)) \quad (4.5)$$

と対数関数のTaylor展開

$$\log \frac{1}{1-w} = w + \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{3} w^3 + \dots$$

が重要な役割を演じる。

積分路 C は可能な限りスリット $[-1, 1]$ から離す。すなわち曲線 C は、(4.3)の対数特異点 $\pm t^{-1}/\sqrt{k_{n+1}}$, $\pm t/\sqrt{k_{n+1}}$ の近傍を通ることになる。母数 k_{n+1} は十分小さいと仮定してよいので、 $T_{2N}(s)$ と $U_{2N}(s)$ の漸近表示を(4.3)において使うことができる。周回積分(4.3)の値は、被積分関数の特異点近傍の振舞いに支配されることに注意する。さらに、積分路が $\pm t^{\pm 1}/\sqrt{k_{n+1}}$ を通るとき

$$1 - k_{n+1}s^2 \approx 1 - k_{n+1}t^{\pm 2} = 1 + O(k_{n+1}) \quad (4.6)$$

であるから、周回積分(4.3)の近似として

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi}{2^{4N-1} s^{4N+1}} \log \frac{k_{n+1}s^2 - t^2}{1 - k_{n+1}t^2s^2} ds$$

$$= \frac{\pi}{2^{4N} N} k_{n+1}^N (t^{4N} - t^{-4N}) \quad (4.7)$$

を採用できる。これを得るための省略は、近似(4.5)と(4.6)だけであるので、 $k_{n+1}|t|^2 = o(1)$ となるほど n は十分大きくなければならない。

以上によって、周回積分(4.3)の評価を終わる。この結果と(1.10), (1.11), (4.1)を用いて、求める“楕円積分” $\tilde{F}(z, k) = \tilde{F}(z_0, k_0)$ の誤差評価

$$\frac{K k_{n+1}^{2N}}{\pi 2^{4N} N} (t^{4N} - t^{-4N}) \quad (4.8)$$

を得る。この導出において1に対し k_{n+1} は無視した。

いうまでもなく、上式はGauss変換 n 回, Joukowski変換1回行って t -平面上の $2N$ 点Gauss-Chebyshev則を用いた場合の誤差評価である。これを元の z -平面で考えよう。

誤差評価(4.8)において、補助変数 t は、環状領域(3.10)の点であるので、最大絶対誤差は、 t が(3.10)の外周を動くときに生じる、 t が単位円周上にあるとき、絶対誤差は小さくなる。 z -平面でいえば、それぞれ半無限長スリット $[k^{-1}, \infty, -k^{-1}]$ と有限長スリット $[-1, 1]$ に対応する。

そこで、(4.8)の絶対値最大を $\Delta_N^* = \Delta_N^*(k)$ とすれば、(3.9)より全域的誤差評価は

$$\Delta_N^*(k) = \frac{2K}{\pi N} \left(\frac{k_{n+1}}{4} \right)^{2N} \cosh \left(\frac{2\pi N K'}{K} \right) \quad (4.9)$$

と表される。右辺は、 z に無関係であるから、楕円積分 $F(z, k)$ の計算法として全域かつ一様近似の方法を示したことになる。

z の動く範囲を実軸上の区間 $[-1, 1]$ に限定できるならば、絶対誤差の評価は、さらに精密化されて

$$\delta_N^*(k) = \frac{2K}{\pi N} \left(\frac{k_{n+1}}{4} \right)^{2N} \quad (4.10)$$

となる。

Gauss変換の回数 n と標本数 $2N$ のとり方により、さまざまな方法が生まれるが、母数 k_n の2次数収束性(3.4)を用いるならば

$$\Delta_N^* = O \left(\left(\frac{k}{4} \right)^{N \cdot 2^{n+2}} \right)$$

であるから、 n と N を1だけ増す計算量が同じならば n を増したほうがよい。仮定の正当性は次章で述べる。

このような観点から $N=1$ と置く。これに伴い誤差評価(4.9), (4.10)は単純化されて、全域で

$$\Delta_1^*(k) = \frac{K k_{n+1}^2}{8\pi} \cosh \left(\frac{2\pi K'}{K} \right) \quad (4.11)$$

スリット $[-1, 1]$ 上で

$$\delta_1^*(k) = \frac{K k_{n+1}^2}{8\pi} \quad (4.12)$$

が成り立つ。

各 n と N の組合せに対して絶対誤差評価(4.9)と(4.10)を表1に示す。表1は、本方法の事前誤差評価を表すものであるが、次章の計算結果の誤差と比べて妥当な評価であることがわかる。

表 1 事前誤差評価

Table 1 A priori error estimate.

| k^2 | n | N | δ_N^k | d_N^k |
|-----------------|-----|-----|--------------|----------|
| $\frac{1}{64}$ | 1 | 1 | 5.42D-20 | 1.16D-10 |
| | 1 | 2 | 1.47D-39 | 1.36D-20 |
| | 1 | 3 | 5.32D-59 | 2.11D-30 |
| | 2 | 1 | 2.94D-39 | 6.32D-30 |
| $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 | 4.12D-06 | 1.10D-03 |
| | 1 | 2 | 7.18D-12 | 1.03D-06 |
| | 1 | 3 | 1.67D-17 | 1.28D-09 |
| | 1 | 4 | 4.36D-23 | 1.79D-12 |
| | 1 | 5 | 1.22D-28 | 2.68D-15 |
| | 2 | 1 | 1.44D-11 | 3.84D-09 |
| | 2 | 2 | 8.73D-23 | 1.25D-17 |
| | 3 | 1 | 1.75D-22 | 4.67D-20 |
| $\frac{63}{64}$ | 1 | 1 | 7.19D-03 | 6.25D-02 |
| | 1 | 2 | 1.17D-05 | 1.75D-03 |
| | 1 | 3 | 2.54D-08 | 6.57D-05 |
| | 1 | 4 | 6.18D-11 | 2.77D-06 |
| | 1 | 5 | 1.61D-13 | 1.25D-07 |
| | 1 | 6 | 4.36D-16 | 5.85D-09 |
| | 2 | 1 | 2.47D-05 | 2.14D-04 |
| | 2 | 2 | 1.38D-10 | 2.06D-08 |
| | 2 | 3 | 1.02D-15 | 2.65D-12 |
| | 2 | 4 | 8.55D-21 | 3.83D-16 |
| | 3 | 1 | 2.75D-10 | 2.39D-09 |
| | 3 | 2 | 1.71D-20 | 2.56D-18 |
| | 4 | 1 | 3.42D-20 | 2.97D-19 |

表 2 3領域の最大絶対誤差

Table 2 Maximum absolute errors in three ranges.

| k^2 | n | N | e_1 | e_2 | e_3 |
|-----------------|-----|-----|----------|----------|----------|
| $\frac{1}{64}$ | 1 | 1 | 9.42D-13 | 3.34D-07 | 4.86D-07 |
| | 1 | 2 | 8.33D-16 | 1.11D-13 | 2.37D-13 |
| | 1 | 3 | 7.22D-16 | 1.73D-15 | 2.24D-15 |
| | 2 | 1 | 8.76D-16 | 1.79D-15 | 1.43D-15 |
| $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 | 4.15D-06 | 8.50D-04 | 1.10D-03 |
| | 1 | 2 | 7.23D-12 | 6.13D-07 | 1.03D-06 |
| | 1 | 3 | 9.05D-16 | 5.89D-10 | 1.28D-09 |
| | 1 | 4 | 1.12D-15 | 6.36D-13 | 1.79D-12 |
| | 1 | 5 | 1.34D-15 | 3.02D-15 | 4.46D-15 |
| | 2 | 1 | 1.44D-11 | 2.96D-09 | 3.84D-09 |
| | 2 | 2 | 9.03D-16 | 2.23D-15 | 1.16D-15 |
| | 3 | 1 | 1.33D-15 | 2.92D-15 | 1.58D-15 |
| $\frac{63}{64}$ | 1 | 1 | 9.54D-03 | 6.07D-02 | 5.59D-02 |
| | 1 | 2 | 1.45D-05 | 1.66D-03 | 1.60D-03 |
| | 1 | 3 | 4.66D-08 | 5.94D-05 | 5.88D-05 |
| | 1 | 4 | 1.05D-10 | 2.39D-06 | 2.42D-06 |
| | 1 | 5 | 4.15D-13 | 1.03D-07 | 1.06D-07 |
| | 1 | 6 | 2.90D-15 | 4.60D-09 | 4.86D-09 |
| | 2 | 1 | 2.47D-05 | 1.88D-04 | 2.12D-04 |
| | 2 | 2 | 1.37D-10 | 1.61D-08 | 2.04D-08 |
| | 2 | 3 | 3.57D-15 | 1.83D-12 | 2.62D-12 |
| | 2 | 4 | 2.91D-15 | 5.43D-14 | 4.08D-15 |
| | 3 | 1 | 2.75D-10 | 2.08D-09 | 2.37D-09 |
| | 3 | 2 | 2.46D-15 | 5.35D-14 | 3.87D-15 |
| | 4 | 1 | 3.78D-15 | 5.61D-14 | 5.02D-15 |

5. 計算法の要約と計算例

楕円積分 $F(z, k)$ を求めることが目的である。本方法は、母数 k が小さい場合に適しているので $k \leq 1/\sqrt{2}$ とする。また z は第 1 象限にあると仮定して一般性を失わない。

算法は 3 段階に分かれる。

- 1) k, z を初期値として下降 Gauss 変換 (1.9) を n 回繰り返して $\tilde{F}(z_n, k_n)$ を導く。
- 2) Joukowski 変換を 1 回行って (1.10) に示す $\tilde{F}(z_n, k_n)$ の定積分表示 (4.1) を導く。
- 3) (4.1) に対し、区間 $[-\sqrt{k_{n+1}}, \sqrt{k_{n+1}}]$ の $2N$ 点 (実質 N 点) Gauss-Chebyshev 則を適用して $\tilde{F}(z_n, k_n)$ を求める。

次に (1.10) によって“楕円積分” $\tilde{F}(z, k)$ を得る。目的の楕円積分は

$$F(z, k) = i\tilde{F}(z, k)$$

によって求まり計算は終了する。

計算量について述べる。計算の手間を複素数の平方根と対数関数の評価で測ることにすれば

- Gauss 変換 n 回 平方根 n 回
- Joukowski 変換 平方根 1 回
- $2N$ 点積分則 対数関数 N 回

となる。平方根も対数も手間は同じとみれば、本方法の計算量は

$$N+n+1 \text{ 回 (複素平方根換算)}$$

となる。一定の手間で、全域誤差 d_N^k を最小化するためには、前章の考察によって $N=1$ 。すなわち積分は実質 1 点則で行われることになる。

単精度 (絶対精度 10^{-7})、倍精度 (10^{-14}) 用の計算法として、前者の場合 $n=2, N=1$ 、後者の場合 $n=3, N=1$ を提案する。

計算例を表 2 に示す。上昇 Landen 変換の計算結果と比較できるように同じ問題を取り扱った¹⁾。

元来、本方法は母数が小さい場合に適しているが、

母数を小(1/8), 中(1/√2), 大(√63/64)と3通り試みた. 変数zも3ブロックに分け, 次の標本点を用いた.

- 1) 区間 [0, 1] の点 $z_j = j/100, 0 \leq j \leq 100$.
- 2) 区間 [1, 1/k] の点 $z_j = 1 + j(k^{-1} - 1)/200$
 $0 \leq j < 200$
- 3) 第1象限の点 $z_{lm} = r_l e^{i\theta_m}$
 $r_l = 8^l, l = -22, -21, \dots, 0, 1, \dots, 22$
 $\theta_m = \frac{m\pi}{100}, m = 0, 1, \dots, 50$

ブロック 1), 2), 3) に対応して, そこにおける最大絶対誤差を e_1, e_2, e_3 とする.

演算桁数は, 仮数部16進16桁であって, 真値は上昇 Landen 変換(4倍精度)によって求めた.

計算結果から以下のことがわかる.

- 1) 事前誤差評価(表1)で解析したとおり2~3回の Gauss 変換で高精度の結果が得られている.
- 2) 計算の手間を一定として, 最高の精度を望むならば, 積分則として2点則(実質1点則)を用いるべきである.
- 3) ∞点近傍に比べ原点近傍の精度はよいが, 全域かつ一様近似が保証される.
- 4) 母数と補母数を交換して上昇 Landen 変換と本方法を比較すれば, 両者に優劣の差はほとんどない.

6. 結 論

下降 Gauss 変換を用いて第1種不完全複素楕円積分を全域かつ一様近似する方法を示した. 本方法は, 実母数が小さい場合に適した算法である.

本方法と上昇 Landen 変換を用いる方法¹⁾を併用すれば, 任意の実母数kと任意の複素数zの第1種楕円積分 $F(z, k)$ を“能率的に”求めることができる.

事前誤差評価と数値計算の両面から本方法が楕円積分の高精度計算に適していることを示した.

参 考 文 献

- 1) 久原秀夫, 鳥居達生, 杉浦 洋: 第1種不完全複素楕円積分の全域かつ一様近似, 情報処理学会論文誌, Vol. 25, No. 5, pp. 712-720 (1984).
- 2) 久原秀夫: スリット境界領域のグリーン関数, ノイマン関数とその応用, 電気学会, 電磁界理論研究会資料, EMT-83-14 (1983).
- 3) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信: 数学公式I, 岩波全書, 岩波書店, 東京 (1956).
- 4) Byrd, P. F. and Friedman, M. D.: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and*

Physicists, Springer-Verlag, Berlin (1954).

- 5) 森 正武: 数値解析と複素関数論, 筑摩書房, 東京 (1975).

付 録

“楕円積分” $\tilde{F}(z, k)$ の実数部一定の等高線は, 楕円積分 $F(z, k)$ の虚数部一定の等高線に対応する. 後者の実数部一定の等高線は, 4次の代数曲線(卵形線)になることを示した¹⁾. $\text{Re } F(z, k) = \text{定数}$ の曲線が等ポテンシャル線を表すのに対し $\text{Im } F(z, k)$ が一定の曲線は流線を描くことになる.

そこで, $F(z, k) = u + iv$ とおく. u, v は実数値関数. この逆関数は

$$z = x + iy = \text{sn}(u + iv, k)$$

であるが, 虚数部一定, すなわち $v = c$ としたときの z の軌跡を L とすれば

$$L; x + iy = \text{sn}(u + ic, k) \tag{A1}$$

$$0 \leq u \leq K, 0 \leq c \leq K'$$

と表される. sn 関数の加法定理に基づき, 前論文と同様数式処理 REDUCE を用いて補助変数 u を消去する. 便宜上 $X = x^2, Y = y^2$ とおくことにより L は

$$A(X+Y)^2 + BX + CY + D = 0 \tag{A2}$$

と (X, Y) 平面の放物線に写る. ただし各係数は

$$a = \text{sn}^2(C, k'), m_1 = k'^2$$

とおくことにより

$$A = (1 - m_1)a(1 - a)(1 - m_1a)$$

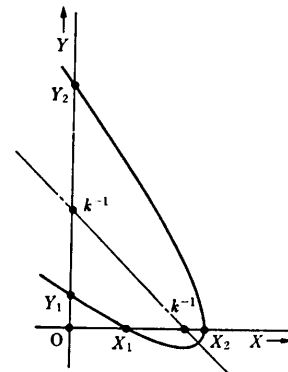
$$B = a(a - 1)\{(m_1a - 1)^2 + (1 - m_1)\}$$

$$C = (m_1a - 1)\{(1 - a)^2 + (1 - m_1)a^2\}$$

$$D = a(1 - a)(1 - m_1a)$$

で与えられる. 定義により a は1より小さい正数なので, 放物線の各係数の符号は, a と m_1 に無関係に

$$A > 0, B < 0, C < 0, D > 0$$



付図1 放物線
Fig. A1 Parabola.

と定まる.

放物線 (A2) が X 軸, Y 軸と交わる点は, 因数分解

$$X^2 + \frac{B}{A}X + \frac{D}{A} = \left(X - \frac{1}{1-m_1a}\right) \left(X - \frac{1-m_1a}{1-m_1}\right)$$

$$Y^2 + \frac{C}{A}Y + \frac{D}{A} = \left(Y - \frac{a}{1-a}\right) \left(Y - \frac{1}{1-m_1} \cdot \frac{1-a}{a}\right)$$

(A3)

より明らかである. 放物線が X 軸, Y 軸と交わる軸上の点を小さい順に番号付けて X_1, X_2 および Y_1, Y_2 とする.

これらの点を z -平面に写して, それぞれ x_1, x_2, y_1, y_2 とすれば, それらは

$$x_1 = \frac{1}{\operatorname{dn}(c, k')}, \quad x_2 = \frac{1}{k} \operatorname{dn}(c, k')$$

$$y_1 = \frac{\operatorname{sn}(c, k')}{\operatorname{cn}(c, k')}, \quad y_2 = \frac{1}{k} \frac{\operatorname{cn}(c, k')}{\operatorname{sn}(c, k')} \quad (\text{A4})$$

と表される.

(X, Y) 平面の放物線を付図 1 に示す.

曲線弧 $\widehat{X_1, Y_1}$ は, z -平面の卵形線 L の第 1 象限に対応することが示される. X 軸, Y 軸上の k^{-1}, k^{-1} を結ぶ直線 (放物線の主軸) は, z -平面の $1/\sqrt{k}$ の $1/4$ 円に写る. 曲線弧 $\widehat{X_2, Y_2}$ の z -平面への像は, z -平面の卵形線 L の鏡像 (半径 $1/\sqrt{k}$ の円に関する) にほかならない.

(昭和 59 年 2 月 27 日受付)

(昭和 59 年 6 月 19 日採録)