

## 第3種不完全複素楕円積分の全域かつ一様近似†

久原 秀 夫††

第3種不完全複素楕円積分を複素 Landen 変換を用いて全域かつ一様近似する方法を提示する。本論文のおもな内容は次のとおりである。1) 母数を1へ接近させたときの楕円積分の収束とその速さについて考察する。2) 上昇 Landen 変換の繰返しによる楕円積分の分解, それらの線形和の見通しのよい表現, およびこの変換に付随するパラメータの生成規則とその振舞いについて述べる。3) 楕円積分の近似式と誤差および Landen 変換を繰返したときのこれらの収束の速さについて述べる。4) 最後に計算法の要約と数値例を示し, 本方法の数値計算法としての有効性と実用性を実証する。従来, 第3種不完全楕円積分は, パラメータの値によって双曲型, 円型, 複素パラメータ型と場合分けし, 第1種不完全楕円積分と  $\vartheta$  関数を用いて間接的に計算されてきた。しかし, 本方法は直接的で任意の複素変数, 複素パラメータ, 実母数について, 一つの算法で自己完結的に第3種不完全複素楕円積分を求める統一的な全域一様近似の方法である。

## 1. ま え が き

われわれは第1種, 第2種不完全複素楕円積分の計算法を報告してきた<sup>1)~3)</sup>。本稿では(1.1)で定義される第3種不完全複素楕円積分  $\Pi(z, \alpha^2, k)$  の計算法を示す。

$$\Pi(z, \alpha^2, k) = \int_0^z \frac{dz}{(1-\alpha^2 z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \quad (1.1)$$

ここで,  $\alpha^2$  はパラメータで  $\alpha^2 \neq k^2$ ,  $\alpha^2 \neq 1$ ,  $\alpha \neq 0$  の任意の複素数であり, 正定数  $k < 1$  は母数,  $z$  は任意の複素数である。

本論文は次のような構成になっている。

(1) まず母数  $k$  を1へ接近させたときの  $\Pi(z, \alpha^2, k)$  の収束の速さについて考察する。

(2) 上昇 Landen 変換の繰返しによる  $\Pi(z, \alpha^2, k)$  の分解  $\Pi(z_n, \alpha_n^2, k_n)$ , ( $j=0, 1, 2, \dots, 2^n-1$ ) とその線形和の見通しのよい表現および, この変換に付随するパラメータ生成規則とその振舞いについて述べる。

(3)  $\Pi(z, \alpha^2, k)$  の近似式と誤差および Landen 変換を繰返したときのこれらの収束の速さについて述べる。

(4) 最後に計算法の要約と数値例を示し, 本方法の数値計算法としての有効性と実用性を実証する。

さて, 本論文は前論文<sup>1)~3)</sup>と同様の考え方で書かれたものであるが, 第3種はパラメータ  $\alpha^2$  によって生

成される対数極があるので, 第1種, 第2種楕円積分で用いた定積分表示は必ずしも適当でない。特異点が定積分区間に接近する可能性があるからである。そのため本論文では上昇 Landen 変換を繰返すことによって, 母数  $k$  を1に十分接近させ, 第3種楕円積分を直接対数関数によって近似する。つまり, Landen 変換を  $n$  回繰返し,  $2^n$  個のパラメータは異なるが同一母数(1に十分近い)の第3種楕円積分を生成・近似し, それらを2項の対数関数に集約し, これによって最初に与えられた第3種不完全複素楕円積分を計算するのである。第1種, 第2種の場合, それらの誤差評価は Gauss-Chebyshev 積分則の誤差評価の問題として解決したが, 第3種の場合は複素平面上の不定積分の誤差評価として直接求める。本論文では, この誤差評価について詳しく考察した。

従来, 第3種の算法は実変数について, パラメータ  $\alpha^2$  の値によって ①双曲型, ②円型, ③複素パラメータ型に分け, さらに, これらを細かく場合分けして使われてきた<sup>4), 5)</sup>。また, これらの方法は第1種楕円積分と  $\vartheta$  関数を用いた間接的な算法である。しかし, 本方法は直接, 任意の複素数  $z$ , 任意の複素パラメータ  $\alpha^2$ , 任意の実母数  $k$  について, 第3種不完全複素楕円積分を一つの算法で自己完結的に求める統一的な全域一様近似の方法である。これは複素 Landen 変換の Riemann 面を利用し, Landen 変換の反復によるブランチカットの変化とパラメータ  $\alpha^2$  によって生成される対数極とその像の移動を的確にとらえ, 同一母数の第3種楕円積分の列を見通しよく整理・表現することによって, はじめて可能となったのである。

なお本方法では, パラメータから生じる対数関数項を陽にとり出すことにより, パラメータによって生じ

† Uniform Approximation of Incomplete Elliptic Integral of the Third Kind on the Extended Complex Plane by HIDEO KUHARA (Department of Information and Electronics Engineering, Yatsushiro National College of Technology).

†† 八代工業高等専門学校情報電子工学科

る対数極の近傍でも他の正則点と同様の絶対精度で計算ができる。つまり、対数極に対応する主要部を正確に表現する形で全域一様近似が達成されているのである。

2. 母数  $k$  が 1 に近い場合の第3種楕円積分の近似

上昇 Landen 変換によって母数  $k$  を 1 に十分接近させ、第3種楕円積分  $\Pi(z, \alpha^2, k)$  を有理関数の積分で近似し、それを対数関数で表現する。しかし、われわれは  $k$  が 1 に近いとき  $\Pi(z, \alpha^2, k)$  の近似として  $\Pi(z, \alpha^2, 1)$  の誤差を直接調べるのではなく、これらにおのおのつきに示す係数  $P$  と  $\tilde{P}$  をかけ標準化して考察する。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P} &= 2(\alpha^2 - 1)/\alpha \\ P &= 2\sqrt{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - k^2)}/\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ただし、(2.1)の根号は ( $k < 1 < \alpha$ ) を基準とした表現である。

すなわち、誤差  $|\tilde{P} \cdot \Pi(z, \alpha^2, 1) - P \cdot \Pi(z, \alpha^2, k)|$  を調べるのである。それは  $\Pi(z, \alpha^2, k)$  に Landen 変換をほどこしたとき、係数  $P$  のかかった形で式を整理したほうが見通しがよいことと、このような形にしておく、 $P \cdot \Pi(z, \alpha^2, k)$  を  $\tilde{P} \cdot \Pi(z, \alpha^2, 1)$  で近似すると次に示すようにパラメータ  $\alpha^2$  によって生成される前者の対数項が後者によって正確に表され、対数極  $z = \pm\alpha^{-1}$  の近傍でも他の正則点と同様の絶対精度で計算できることによる (式(2.2)参照)。

さて、 $\tilde{P} \cdot \Pi(z, \alpha^2, 1)$  を  $P \cdot \Pi(z, \alpha^2, k)$  の近似と見なすとき被積分関数の差  $e(z, k)$  は次のように表される。

$$e(z, k) = \frac{\tilde{P}}{(1 - \alpha^2 z^2)(1 - z^2)} - \frac{P}{(1 - \alpha^2 z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} - \frac{\tilde{P} k'^2}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)[(\alpha^2 - 1)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)} + (1 - z^2)\sqrt{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - k^2)}}]} \quad (2.2)$$

ただし、 $k'$  は補母数で、 $k' = \sqrt{1 - k^2}$ 。

上式の右辺の最後の式で  $(1 - \alpha^2 z^2)$  の項が消去されている点に注意されたい。この点をパラメータ  $\alpha^2$  によって生じる対数項が正確に表されるといったのである。

また、 $k$  が 1 に近いときの被積分関数の差  $e(z, k)$  の粗い近似式  $\tilde{e}(z, k)$  は  $k$  を変数とみて、次のように簡略化できる。

$$\tilde{e}(z, k) = -\frac{k'^2}{\alpha} \cdot \frac{1}{(1+z)^2(1-z)^2} \quad (2.3)$$

ただし  $e(z, k)$  との差は

$$\begin{aligned} e(z, k) - \tilde{e}(z, k) &\approx \frac{-k'^4}{\alpha(1+z)^2(1-z)^2} \\ &\times \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha^2 - 1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{z^2}{1 - z^2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\alpha^2 - 1} - \frac{z^2}{1 - z^2} \right) k'^2 \\ &+ 2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha^2 - 1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{z^2}{1 - z^2} \right) k'^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\alpha^2 - 1} - \frac{z^2}{1 - z^2} \right) k'^4 \end{aligned} \quad (2.4)$$

そこで、Landen 変換を何回か経た後の積分の誤差を考えよう。

$$\begin{aligned} \tilde{P} \cdot \Pi(z, \alpha^2, 1) - P \cdot \Pi(z, \alpha^2, k) \\ = \int_0^z e(z, k) dz \approx \int_0^z \tilde{e}(z, k) dz \end{aligned} \quad (2.5)$$

ただし、積分路は  $z = \pm\alpha^{-1}$  とカット  $[-k^{-1}, -1]$ ,  $[1, k^{-1}]$  と交わらないものとする。このとき、上昇 Landen 変換によって原平面の点はカットから真に離れている (文献 1) 参照し、(2.2)により  $z = \pm\alpha^{-1}$  の近傍では、そこでの主要項の近似が正確であるから、粗い誤差評価(2.5)は許される。

さて、上式の最右辺は直接計算できて

$$\int_0^z \tilde{e}(z, k) dz = -\frac{k'^2}{4\alpha} \left[ \frac{2z}{1 - z^2} + \log \frac{1+z}{1-z} \right] \quad (2.6)$$

また母数  $k$  が 1 のときは初等的な計算で

$$\tilde{P} \cdot \Pi(z, \alpha^2, 1) = \log \frac{\alpha^{-1} + z}{\alpha^{-1} - z} - \frac{1}{\alpha} \log \frac{1+z}{1-z} \quad (2.7)$$

となる。これらの結果は後で上昇 Landen 変換を繰り返して第3種不完全複素楕円積分を計算するときの誤差評価に用いる。

3. 上昇 Landen 変換の繰り返しによる第3種楕円積分の分解

第3種楕円積分(1.1)を初期条件  $z_0 = z, k_0 = k$  とし、上昇 Landen 変換で変数変換すると次のようになる (文献 4), p. 39).

$$\left. \begin{aligned} \frac{(1+k_1')^2 z_1^2 (1-z_1^2)}{1-k_1^2 z_1^2} &= z_0^2 \\ k_1 &= 2\sqrt{k_0/(1+k_0)}, k_1' = (1-k_0)/(1+k_0) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \Pi(z_0, \alpha_0^2, k_0) \\ &= \frac{(1+k_1')}{(\alpha_{11}^2 - \alpha_{10}^2)} [(k_1^2 - \alpha_{10}^2) \Pi(z_1, \alpha_{10}^2, k_1) \\ & \quad + (\alpha_{11}^2 - k_1^2) \Pi(z_1, \alpha_{11}^2, k_1)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

ただし、 $\alpha_{10}^{-2}$  と  $\alpha_{11}^{-2}$  とは (3.1) で  $z_0 = \alpha_0^{-1}$  とおいたときの  $z_1$  に関する 2 次方程式の 2 根であり、次のようになるが、後の都合上これを変形して (3.4) の形で表す。

$$\begin{aligned} \alpha_{10}^2 &= (1+k_1')^2 [k_0 + \alpha_0^2 - \sqrt{(1-\alpha_0^2)(k_0^2 - \alpha_0^2)}] / 2 \\ \alpha_{11}^2 &= (1+k_1')^2 [k_0 + \alpha_0^2 + \sqrt{(1-\alpha_0^2)(k_0^2 - \alpha_0^2)}] / 2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{10}^{-2} &= [k_0 + \alpha_0^2 + \sqrt{(1-\alpha_0^2)(k_0^2 - \alpha_0^2)}] / 2\alpha_0^2 \\ \alpha_{11}^{-2} &= [k_0 + \alpha_0^2 - \sqrt{(1-\alpha_0^2)(k_0^2 - \alpha_0^2)}] / 2\alpha_0^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし上式における根号は  $0 < \alpha_0 < k_0 < 1$  を基準とした表現であるが、 $\alpha_0$  が一般の複素数のときは開平の計算は注意しなければならない。このことは第 1 種不完全複素楕円積分の算法<sup>1)</sup> のときも述べたが、それは  $z_0$  から  $z_1$  への Landen 変換の多価性によっておこる問題である。上式の表現形式は  $\alpha_0$  が実軸上または虚軸上にあるときは根号の符号の決定は簡単であるが、 $\alpha_0$  が一般の複素数のときは次式によって計算すればよい<sup>1)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{10}^{-1} \\ \alpha_{11}^{-1} \end{aligned} \right\} = \sqrt{\frac{1}{k_1^2} + \frac{k_1'}{k_1^2} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{\eta_0}}{1 \mp \sqrt{\eta_0}}} \quad (3.5)$$

ただし  $\eta_0 = (z_0^2 - k_0^{-2}) / (z_0^2 - 1)$ ,  $z_0 = \alpha_0^{-1}$

Landen 変換を繰り返すとき新しく生成されるパラメータ  $\alpha_{nj}^2$  ( $\pm \alpha_{nj}$  の逆数は対数極の位置になる) はつねに上式によって計算するものとする。

さて、(3.2) は母数に関する一種の漸化関係と解釈できるが、この関係を見通しよくするため書き換える。まず  $f_n(z)$  を次のように定義する。

$$f_n(z) = [k_n / (1 - k_n^2 z^2)] \cdot \sqrt{(z^2 - k_n^{-2}) / (z^2 - 1)} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{(\alpha_0^2 - 1)(\alpha_0^2 - k_0^2)}}{\alpha_0} \cdot \frac{dz_0}{(1 - \alpha_0^2 z_0^2) \sqrt{(1 - z_0^2)(1 - k_0^2 z_0^2)}} \\ &= \sqrt{(1 - \alpha_0^{-2})(1 - k_0^2 \alpha_0^{-2})} \cdot \left( \frac{1}{\alpha_0^{-1} - z_0} + \frac{1}{\alpha_0^{-1} + z_0} \right) \frac{dz_0}{\sqrt{(1 - z_0^2)(1 - k_0^2 z_0^2)}} \end{aligned}$$

同様に (3.10) の右辺の第一項と第二項の微分はそれぞれ

$$\begin{aligned} P_{10} \cdot d\Pi(z_1, \alpha_{10}^2, k_1) &= \sqrt{(1 - \alpha_{10}^{-2})(1 - k_1^2 \alpha_{10}^{-2})} \left( \frac{1}{\alpha_{10}^{-1} - z_1} + \frac{1}{\alpha_{10}^{-1} + z_1} \right) \frac{dz_1}{\sqrt{(1 - z_1^2)(1 - k_1^2 z_1^2)}} \\ P_{11} \cdot d\Pi(z_1, \alpha_{11}^2, k_1) &= \sqrt{(1 - \alpha_{11}^{-2})(1 - k_1^2 \alpha_{11}^{-2})} \left( \frac{1}{\alpha_{11}^{-1} - z_1} + \frac{1}{\alpha_{11}^{-1} + z_1} \right) \frac{dz_1}{\sqrt{(1 - z_1^2)(1 - k_1^2 z_1^2)}} \end{aligned}$$

上式は第 1 種複素楕円積分の被積分関数

$$[(1 - z^2)(1 - k_n^2 z^2)]^{-1/2}$$

を書き換えたものにすぎないように見えるが、(3.4) の場合と同様、上式の多価性による問題を避けるために必要なことなのである。この表現は機械的な複素数の開平の都合に合わせるために必要であり、これは本稿の基本となる (3.9) の計算に使用される。(3.6) によって正規化係数  $P_{nj}$  を次のように定義する。

$$P_{nj}^{-1} = f(\alpha_{nj}^{-1}) / 2\alpha_{nj}; \quad (n=0, 1, 2, \dots; j=0, 1, 2, \dots, (2^n - 1)) \quad (3.7)$$

ただし、 $n=0$  のとき  $P_{00} = P_0$ ,  $\alpha_{00} = \alpha_0$  とする。

なお、(3.7) は  $k_n = 1$ ,  $k_n \neq 1$  のとき、それぞれ (2.1) の第一式、第二式と同形となる。以上の結果を用いて (3.2) を書き換えると次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi(z_0, \alpha_0^2, k_0) &= P_0^{-1} [P_{10} \cdot \Pi(z_1, \alpha_{10}^2, k_1) \\ & \quad - P_{11} \cdot \Pi(z_1, \alpha_{11}^2, k_1)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

この規則を  $n$  回繰り返すと次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi(z_0, \alpha_0^2, k_0) &= P_0^{-1} [P_{n0} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n0}^2, k_n) - P_{n1} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n1}^2, k_n) \\ & \quad + P_{n2} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n2}^2, k_n) - P_{n3} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n3}^2, k_n) \\ & \quad + P_{n4} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n4}^2, k_n) - P_{n5} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n5}^2, k_n) \\ & \quad \vdots \\ & \quad + P_{n, N-1} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n, N-1}^2, k_n) \\ & \quad - P_{n, N} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n, N}^2, k_n)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

ただし  $N = (2^n - 1)$ 。

この式は (3.2) を直接使用するのに比べて、非常に見通しのよい形になっている。それは (3.7) によって定義・導入された  $P_{nj}$  が適切だからである。この  $P_{nj}$  は次のような考え方で導入したものである。繰り返し利用に便利のように (3.8) を次のように変形し、この

$$\begin{aligned} P_{00} \cdot \Pi(z_0, \alpha_0^2, k_0) &= P_{10} \cdot \Pi(z_1, \alpha_{10}^2, k_1) - P_{11} \cdot \Pi(z_1, \alpha_{11}^2, k_1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

式の微分の関係形で、 $P_{nj}$  の意味を考察しよう。(3.10) 左辺から  $P_{00} \cdot d\Pi(z_0, \alpha_0^2, k_0)$  は

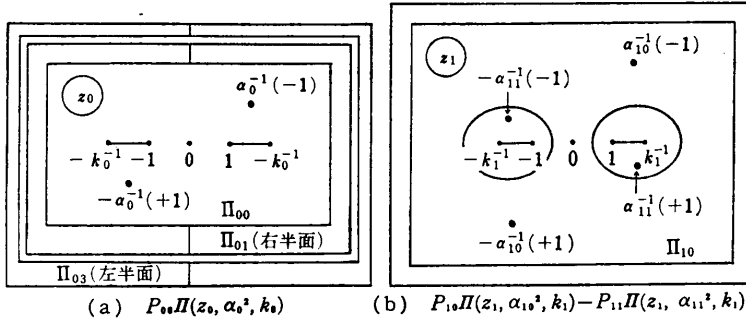


図1 正規化係数  $P_{nj}$  の導入  
Fig. 1 Introduction of coefficient  $P_{nj}$ .

となる。まず図1で4枚の分葉からなる  $z_0$  平面に上昇 Landen 変換をほどこすと2枚の分葉からなる  $z_1$  平面になる<sup>1)</sup>。  $z_0$  平面のスリット  $[-k_0^{-1}, -1]$  と  $[1, k_0^{-1}]$  はそれぞれ  $z_1$  平面では左右の卵形線となる (このことは文献1)に詳しく説明されている)。このとき、パラメータ  $\alpha_0^2$  による1位の極  $z_0 = \pm \alpha_0^{-1}$  の  $z_1$  平面への写像は次のようになっている。

$$\begin{aligned} \alpha_0^{-1} \in \Pi_{00} &\rightarrow \alpha_{10}^{-1} \in \Pi_{10}, & \alpha_0^{-1} \in \Pi_{01} &\rightarrow \alpha_{11}^{-1} \in \Pi_{10} \\ -\alpha_0^{-1} \in \Pi_{00} &\rightarrow -\alpha_{10}^{-1} \in \Pi_{10}, \\ -\alpha_0^{-1} \in \Pi_{03} &\rightarrow -\alpha_{11}^{-1} \in \Pi_{10} \end{aligned}$$

ここで注意すべきは(3.10)の微分の関係式からわかるように、これらの1位の極の留数が  $-1$  か  $+1$  のいずれかで、これらが Landen 変換による写像によって不変に保たれているということである。図1(a), (b)の  $\pm \alpha_{nj}$  の右側の括弧の中の数  $P_{nj} \cdot d\Pi(z_n, \alpha_n^2, k_n)$  の留数を表している、つまり(3.10)において  $P_{00}, P_{10}, P_{11}$  はパラメータによって生じる1位の極の留数が  $\pm 1$  となるように正規化する役目をもっているのである。一般に  $P_{nj}$  も、同様の役目をするのが帰納的に理解されよう。このことが、上昇 Landen 変換による第3種楕円積分の分解を見通しのよい形にしており、かつ最終的な近似式を2項の対数関数に集約することを可能にする。これは Landen 変換を繰り返すときいつも成立している。この  $P_{nj}$  の導入と Landen 変換の Riemann 面上での写像の追跡によって、Byrd らが与えている式(3.2)を反復利用に便利な形に変形し、その式に一つの解釈を与えたのである。

次に Landen 変換の繰り返しによって生じるパラメータ  $\alpha_n$  の生成規則を定めていく。番号  $j$  の付け方は  $j$  が大きいほど  $z_n = \alpha_{nj}^{-1}$  は複素平面  $z_n$  上で点  $z_n = 1$  に接近するようにする。すなわち上昇 Landen 変換で  $\Pi(z_n, \alpha_n^2, k_n)$  から生成される  $\Pi(z_{n+1}, \alpha_{n+1, j}^2, k_n)$  と  $\Pi(z_{n+1}, \alpha_{n+1, j}^2, k_n)$  のパラメータ  $\alpha_{n+1, j}$  と

$\alpha_{n+1, j}$  は次のように番号付けを行う。

$$\alpha_{nj} \begin{cases} \rightarrow \alpha_{n+1, j} \\ \rightarrow \alpha_{n+1, j} \end{cases} \quad (3.11)$$

ただし、 $j = (2^{n+1} - 1) - j$ ,  
( $0 \leq n, 0 \leq j \leq (2^n - 1)$ )

なお、(3.9)はこの規則によって書き下したものである。ちなみに(3.11)の  $\alpha_{n+1, j}$  と  $\alpha_{n+1, j}$  は(3.5)によって次のように計算する。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1, j}^{-1} \\ \alpha_{n+1, j}^{-1} \end{aligned} \right\} = \sqrt{\frac{1}{k_{n+1}^2} + \frac{k_{n+1}'}{k_{n+1}^2} \frac{1 \pm \sqrt{\eta_n}}{1 \mp \sqrt{\eta_n}}} \quad (3.12)$$

ただし、 $\eta_n = (\alpha_{nj}^{-2} - k_n^{-2}) / (\alpha_{nj}^{-2} - 1)$ , ( $0 \leq n$ )

次に、 $z_n$  平面における  $\alpha_{nj}^{-1}$  の1への接近度を調べておく。母数とパラメータの初期値を  $k_0, \alpha_0$  と定める。 $k_0$  は1に近いと仮定する。 $\alpha_0$  から  $\alpha_{10}$  と  $\alpha_{11}$  が生成するとき、 $\alpha_{10}^{-1}$  と  $\alpha_0^{-1}$  とはほとんど等しいが、 $\alpha_{11}^{-1}$  は  $k_0^{1/4}$  のオーダーで1に接近する。なぜなら(3.4)から

$$\begin{aligned} (\alpha_{10}^{-2} - \alpha_0^{-2}) & \\ & \simeq -\frac{k_0^{1/2}}{2\alpha_0^2} \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{1}{1 - \alpha_0^2} \right) k_0^{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{16} \left( 1 + \frac{1}{(1 - \alpha_0^2)^2} \right) k_0^{1/4} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$(\alpha_{11}^{-2} - 1) \simeq \frac{k_0^{1/4}}{16(1 - \alpha_0^2)} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - \alpha_0^2}{1 - \alpha_0^2} k_0^{1/2} \right] \quad (3.14)$$

さらに  $\alpha_{20}^{-2}, \alpha_{21}^{-2}, \alpha_{22}^{-2}, \alpha_{23}^{-2}$  を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} (\alpha_{20}^{-2} - \alpha_0^{-2}) &= -k_0^{1/2} / 2\alpha_0^2 + O(k_0^{1/4}) \\ (\alpha_{21}^{-2} - 1) &= \frac{k_0^{1/4}}{16(1 - \alpha_0^2)} \left[ 1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha_0^2) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{16}(1 - \alpha_0^2)^2 - \frac{1}{32}(1 - \alpha_0^2)^3 \right] + O(k_0^{1/6}) \\ (\alpha_{22}^{-2} - 1) &= \frac{k_0^{1/4}}{16(1 - \alpha_0^2)} \left[ \frac{1}{16}(1 - \alpha_0^2)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{32}(1 - \alpha_0^2)^3 \right] + O(k_0^{1/6}) \end{aligned}$$

$$(\alpha_{23}^{-2} - 1) = k_0^{1/8} / [16^3 \cdot (1 - \alpha_0^2)] + O(k_0^{1/10}) \quad (3.15)$$

以上の計算例でパラメータ  $\alpha_{nj}$  の生成過程を示すと図2のようになる。図中の  $\alpha_{nj}$  の後にある括弧内の  $k_0^{1/l}$  は各パラメータ  $\alpha_{nj}^{-2}$  の1への接近度を示す((3.17)参照)。

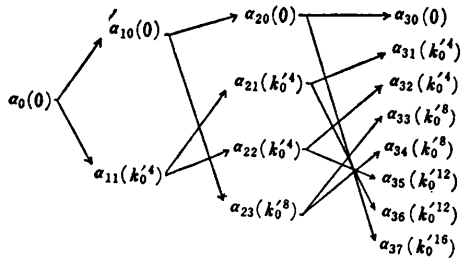


図 2 パラメータ  $\alpha_{nj}$  の生成規則  
Fig. 2 Generating rule of parameter  $\alpha_{nj}$ .

一般に、パラメータの生成規則と番号付け (3.11) によって  $\alpha_{nj}$  から生成される一組のパラメータ  $\alpha_{n+1,j}$  と  $\alpha_{n+1,j}$  ( $j=(2^{n+1}-1)-j$ ) は (3.13), (3.14) から近似的に次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1,j}^{-2} &= \alpha_{nj}^{-2} - k_n'^2 / 2\alpha_{nj}^2 + O(k_n'^4 / (1-\alpha_{nj}^2)) \\ \alpha_{n+1,j}^{-2} &= 1 + k_n'^4 / [16(1-\alpha_{nj}^2)] \\ &\quad + O(k_n'^6 / (1-\alpha_{nj}^2)^2) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq n) \quad (3.16)$$

これらの関係式と上昇 Landen 変換により母数  $k_n$  が 1 に収束することから  $\alpha_{n+1,j}^{-2}$  ( $j=0, 1, 2, \dots, (2^{n+1}-1)$ ) の点  $z_{n+1}^2=1$  への接近度を  $k_0'$  のべきによつて

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1,j}^{-2} - 1 &\approx B_{n+1,j} k_0'^l \quad (n \geq 0) \\ l &= 2j+1 + (-1)^{j+1}, \quad (j=0, 1, 2, \dots, (2^{n+1}-1)) \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

と表現できる。ただし、 $B_{n+1,j}$  は有界な定数である。すなわち  $k_0'$  のべきで  $z_{n+1}$  平面上で点  $z_{n+1}^2 = \alpha_{n+1,j}^{-2}$  の点  $z_{n+1}^2=1$  への接近度 (収束) を表せば、 $j=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  の順に

$$k_0'^0, k_0'^4, k_0'^4, k_0'^8, k_0'^8, k_0'^{12}, k_0'^{12}, \dots$$

となる。最も 1 に接近するのは  $\alpha_{n+1,N_1}^{-2}$  ( $N_1=2^{n+1}-1$ ) で、これは  $k_0'^{2^{n+2}}$  (これは  $k_n'^4$  と同じオーダー) の接近度である。

なお (3.16) で  $\alpha_{nj}^{-2}$  が最も 1 に接近するとき、すなわち  $j=(2^n-1)$  のときでも  $k_n'^2/(1-\alpha_{nj}^2)$  の  $n$  に関する極限值 ( $\neq 0$ ) が存在するので発散する心配はない。

すなわち、 $k_n'$  が 2 次収束することを考えると、 $L$  を正の定数として

$$k_n' = L \left( \frac{k_0'}{4} \right)^{2^n} \times 4 \quad (3.18)$$

また、 $j=N=(2^n-1)$  のとき、図 3 からわかるように

$$\alpha_{n,N}^{-2} - 1 \approx \frac{1}{16(1-\alpha_0^2)} k_n'^{14}$$

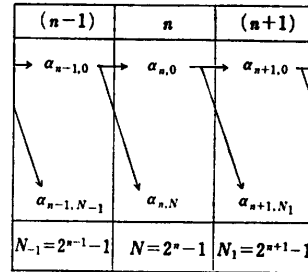


図 3  $k_n'^2/(1-\alpha_{n,N}^2)$  の近似計算  
Fig. 3 Approximate calculation of  $k_n'^2/(1-\alpha_{n,N}^2)$ .

$$= \frac{1}{16(1-\alpha_0^2)} L^4 k_0'^{2^{n+2}} \times 2^{-2^{n+1}+8}$$

上式と (3.18) から、極限值は次のようになる。

$$\frac{k_n'^2}{1-\alpha_{n,N}^2} \approx \frac{(1-\alpha_0^2)}{L^2}$$

これらは前章の式 (2.2) で示される  $e(z, k)$  の  $\bar{e}(z, k)$  への収束を保証し、次章の式 (4.6) の収束の速さを規定する。

#### 4. 第 3 種不完全複素楕円積分の近似式とその誤差評価

任意の複素数  $z$ , 母数  $k$ , パラメータ  $\alpha^2$  が与えられたとき上昇 Landen 変換の初期値として

$$z_0 = z, \quad k_0 = k, \quad \alpha_0^2 = \alpha^2$$

と定める。これを出発点として、次々と  $z_n, \alpha_{nj}, k_n$  を生成していくとき、 $k_n$  を 1 に十分接近させると  $\alpha_{nj} \neq 0$  で、 $z_n$  がスリット  $[-k_n^{-1}, -1], [1, k_n^{-1}]$  から離れているときは  $2^n$  個あるおのおのの  $P_{nj} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{nj}^2, k_n)$  は、それぞれ  $\tilde{P}_{nj} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{nj}^2, 1)$  に  $k_n'^2$  の速さで収束することはすでに述べた。しかし、これらの和 (3.9) の収束は改めて吟味する必要がある。さて、(3.9) の右辺で  $k_n$  を 1 としたときの式を  $\tilde{I}_n$  で表すと、積分の誤差  $\Delta_n$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \tilde{I}_n - \Pi(z_0, \alpha_0^2, k_0) \\ &= P_0^{-1} \times [(\tilde{P}_{n0} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n0}^2, 1) \\ &\quad - P_{n0} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n0}^2, k_n)) \\ &\quad - (\tilde{P}_{n1} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n1}^2, 1) - P_{n1} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n1}^2, k_n)) \\ &\quad + (\tilde{P}_{n2} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n2}^2, 1) - P_{n2} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{n2}^2, k_n)) \\ &\quad \vdots \\ &\quad - (\tilde{P}_{nN} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{nN}^2, 1) \\ &\quad - P_{nN} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{nN}^2, k_n))] \end{aligned} \quad (4.1)$$

母数  $k_n$  が 1 に近い場合の誤差評価 (2.6) によって

$$\begin{aligned} &\tilde{P}_{nj} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{nj}^2, 1) - P_{nj} \cdot \Pi(z_n, \alpha_{nj}^2, k_n) \\ &\approx -\frac{k_n'^2}{4\alpha_{nj}} \left[ \frac{2z_n}{1-z_n^2} + \log \frac{1+z_n}{1-z_n} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

が成立する。\$z\_n\$ 平面で、\$\alpha\_{n,j}^{-1}\$ は \$\alpha\_{n0}^{-1}\$ を除いてすべて卵形線 (\$z\_0\$ 平面のスリット \$[1, k\_0^{-1}]\$ に対応する) の内部にある。仮定によって \$\alpha\_0 \neq 0\$、したがってすべての \$\alpha\_{n,j}^{-1}\$ は原点から真に離れている。上式右辺の括弧内の \$z\_n\$ の関数は卵形線の外部でいつも有界であり、

$$\max_{(z_n)} \left| \frac{k_n'^2}{4\alpha_{n,j}} \left( \frac{2z_n}{1-z_n^2} + \log \frac{1+z_n}{1-z_n} \right) \right| \leq M k_n'^2 \quad (4.3)$$

を満たす \$n\$ と \$z\_n\$ に無関係な定数 \$M\$ がとれる。したがって積分の各項は \$k\_n'^2\$ の速さで 0 に収束する。

(4.1), (4.2), (4.3) から

$$|\tilde{H}_n - \Pi(z_0, \alpha_0^2, k_0)| \leq |P_0^{-1}| \cdot 2^n M \cdot k_n'^2 \quad (4.4)$$

また \$k\_n'\$ は上昇 Landen 変換によって 2 次収束するから (3.18) を用いると (4.4) の右辺は

$$|P_0^{-1}| M L^2 (k_0')^{2^{n+1}} \times 2^{-2^{n+2} + n + 4}$$

となり、\$\Pi(z, \alpha\_0^2, k\_0)\$ は \$\tilde{H}\_n\$ に 2 次収束することがわかる。(4.4) の右辺は \$z\_n\$ に依存していないから、\$z\_n\$ つまり \$z\_0\$ に関して一様収束である。

さて、(2.7) を用いて近似式 \$\tilde{H}\_n\$ を陽の形で書いてみると次のように 2 項の対数関数に集約された形になる。数値計算はこれによって行う。

$$\begin{aligned} \tilde{H}_n = & P_0^{-1} \left[ \log \frac{(\alpha_{n0}^{-1} + z_n)(\alpha_{n2}^{-1} + z_n) \cdots (\alpha_{n,N-1}^{-1} + z_n)}{(\alpha_{n1}^{-1} + z_n)(\alpha_{n3}^{-1} + z_n) \cdots (\alpha_{nN}^{-1} + z_n)} \right. \\ & \times \frac{(\alpha_{n1}^{-1} - z_n)(\alpha_{n3}^{-1} - z_n) \cdots (\alpha_{nN}^{-1} - z_n)}{(\alpha_{n0}^{-1} - z_n)(\alpha_{n2}^{-1} - z_n) \cdots (\alpha_{n,N-1}^{-1} - z_n)} \\ & \left. - (\alpha_{n0}^{-1} - \alpha_{n1}^{-1} + \alpha_{n2}^{-1} - \alpha_{n3}^{-1} + \cdots - \alpha_{nN}^{-1}) \right. \\ & \left. \times \log \frac{1+z_n}{1-z_n} \right] \quad (4.5) \end{aligned}$$

上式の対数関数のカットは図 4 のようになる。\$z\_0\$ 平面のカットは \$z\_0\$ 平面のそれとは形が少し異なる。\$z\_n\$ 平面の二つの卵形線は \$z\_0\$ 平面の二つのスリット \$[-k\_0^{-1}, -1]\$ と \$[1, k\_0^{-1}]\$ の像である。図 4 の対数関数のカットはその両端を除いて必要に応じて移動させることができるが、この図は計算機で計算したとき自然に現れるカットの形を示している。

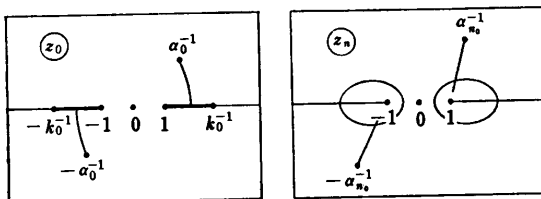


図 4 \$z\_0\$ 平面と \$z\_n\$ 平面における対数極に対するカットの形  
Fig. 4 Cuts for logarithmic poles in \$z\_0\$ and \$z\_n\$ planes.

また式 (4.5) の \$\log [(1+z\_n)/(1-z\_n)]\$ の係数は 1 へ収束する \$\alpha\_{n,j}^{-1}\$ の列の和の形になっているので、これを直接用いると桁落ちの心配があるから、これを避けるため以下のように変形する。収束の速さは (3.17) によって規定される。

$$\begin{aligned} & (\alpha_{n0}^{-1} - \alpha_{n1}^{-1} + \alpha_{n2}^{-1} - \alpha_{n3}^{-1} + \cdots + \alpha_{n,N-1}^{-1} - \alpha_{n,N}^{-1}) \\ & = (\alpha_{n0}^{-1} - 1) + (1 - \alpha_{n1}^{-1}) + (\alpha_{n2}^{-1} - 1) + (1 - \alpha_{n3}^{-1}) \\ & \quad + \cdots + (\alpha_{n,N-1}^{-1} - 1) + (1 - \alpha_{n,N}^{-1}) \quad (4.6) \end{aligned}$$

この極限値は次のようになる。

$$-\left[ \frac{P_0}{\pi} \int_1^{1/k_0} \frac{dx}{(1-\alpha_0^2 x^2) \sqrt{(x^2-1)(1-k_0^2 x^2)}} + 1 \right] \quad (4.7)$$

この証明の方針だけを述べると、(3.9) の両辺を微分の関係になおし、虚軸に沿って右半平面を囲むように周回積分し、留数を求めることから得られる。

なお、ここで得られた近似式 \$\tilde{H}\_n\$ が全域一様近似であることはすでに述べたが、このことは近似式がパラメータによって生じる対数極に対する主要項を正確に表現していることを意味しており、対数極の近傍でも他の正則点と同程度の絶対精度となるはずであるが、有限桁演算の場合は、対数極のごく近傍では相対精度を用いるべきであろう。

### 5. 計算法の要約と数値例

計算法を要約しよう。任意の複素数 \$z\_0\$、パラメータ \$\alpha\_0^2\$、母数 \$k\_0\$ が与えられたとき \$\Pi(z\_0, \alpha\_0^2, k\_0)\$ は式 (4.5) によって近似計算するが、その手順を次に示す。

- (1) まず \$P\_0\$ を式 (3.7) によって計算する。
- (2) 次に上昇 Landen 変換を繰り返して \$z\_n\$ と各パラメータ \$\alpha\_{n,j}\$ を決定する。\$\alpha\_{n,j}\$ の算式は (3.12) に準じるが、\$z\_n\$ は次式で計算すればよい<sup>1)</sup>。

$$\begin{aligned} z_n = & \sqrt{\frac{1}{k_n'^2} + \frac{k_n'}{k_n'^2} \frac{1 + \sqrt{\eta_n}}{1 - \sqrt{\eta_n}}} \quad (5.1) \\ \eta_n = & (z_{n-1}^2 - k_{n-1}^{-2}) / (z_{n-1}^2 - 1), \quad (1 \leq n) \end{aligned}$$

- (3) 式 (4.5) の \$\log [(1+z\_n)/(1-z\_n)]\$ の係数は (4.6) の形で計算する。

なお、第3種不完全複素楕円積分の計算のときはパラメータによる対数極 \$\pm \alpha\_n^{-1}\$ からそれぞれ \$[-k\_0^{-1}, -1]\$ と \$[1, k\_0^{-1}]\$ へカットが必ず生じる (図 4 参照)。このカットで関数をなめらかに延長したいときは、このカットを越えるとき \$\pm 2\pi P\_0^{-1}i\$ の補正を加えればよい。

さて、数値例を示そう。誤差の検定基準は本方法の

表 1 実軸上の [0, 1] 区間での最大絶対誤差と事前誤差評価  
Table 1 Maximum absolute errors and a priori error estimation in interval [0, 1] on real axis.

Error and error estimate

NL		1		2		3		4		5	
$\theta$	$\alpha^1$	Error	Estimate	Error	Estimate	Error	Estimate	Error	Estimate	Error	Estimate
15	0.2	1.50D-01	9.08D-01	3.30D-03	3.86D-02	2.32D-06	5.34D-05	1.16D-12	5.29D-11	1.33D-15	2.62D-23
	0.4	1.07D-01	7.88D-01	2.34D-03	3.66D-02	1.65D-06	5.28D-05	8.23D-13	5.34D-11	2.00D-15	2.68D-23
	0.8	7.25D-02	1.09D+00	1.75D-03	5.58D-02	1.10D-06	8.40D-05	5.60D-13	8.66D-11	1.27D-14	4.38D-23
45	0.2	2.85D-02	1.54D-01	5.14D-05	4.55D-04	1.79D-10	2.89D-09	6.66D-16	6.69D-20	1.03D-15	1.93D-41
	0.4	2.19D-02	3.52D-01	3.93D-05	1.14D-03	1.37D-10	7.68D-09	2.44D-15	1.83D-19	3.41D-15	5.36D-41
	0.8	1.58D-02	4.16D-01	2.84D-05	1.47D-03	9.89D-11	1.04D-08	1.78D-15	2.53D-19	2.22D-15	7.50D-41
75	0.2	2.19D-03	8.54D-03	4.09D-08	2.59D-07	2.89D-15	1.61D-16	2.89D-15	3.75D-35	2.66D-15	1.12D-72
	0.4	1.72D-03	1.31D-02	3.21D-08	4.34D-07	1.55D-15	2.87D-16	1.55D-15	6.92D-35	1.78D-15	2.10D-72
	0.8	1.27D-03	5.27D-02	2.38D-08	1.92D-06	1.53D-14	1.33D-15	1.67D-14	3.30D-34	1.95D-14	1.02D-71

母数  $k = \sin \theta$ , パラメータ  $\alpha^1$ , Landen 変換の回数 NL.

表 2 第 1, 4 象限と実軸上での最大絶対誤差と事前誤差評価  
Table 2 Maximum absolute errors and a priori error estimation in the first and fourth quadrants and in real axis.

Error of incomplete elliptic integral of third kind on the complex plane.

$k^1$	NL	E1	E2	ER1	ER2	ER3	ER4	ER5	Estimate
1/64	1	3.26D-01	3.08D-01	3.28D-01	3.38D-01	3.25D-01	2.43D-01	2.47D-01	1.02D+00
1/64	2	1.60D-02	1.59D-02	1.37D-02	1.63D-02	1.62D-02	1.27D-02	1.27D-02	9.08D-02
1/64	3	5.31D-05	5.31D-05	4.50D-05	5.40D-05	5.40D-05	4.22D-05	4.22D-05	5.99D-04
1/64	4	5.92D-10	5.92D-10	5.01D-10	6.02D-10	6.02D-10	4.71D-10	4.71D-10	1.34D-08
1/64	5	9.44D-15	9.14D-15	2.73D-15	6.69D-15	7.06D-15	8.04D-15	6.57D-15	3.32D-18
1/2	1	2.58D-02	2.57D-02	3.77D-02	3.77D-02	3.76D-02	1.66D-02	1.67D-02	9.71D-02
1/2	2	4.71D-05	4.71D-05	6.81D-05	6.80D-05	6.80D-05	3.17D-05	3.17D-05	2.70D-04
1/2	3	1.64D-10	1.64D-10	2.37D-10	2.37D-10	2.37D-10	1.11D-10	1.11D-10	1.64D-09
1/2	4	2.93D-15	2.62D-15	2.53D-15	4.47D-15	3.35D-15	2.63D-15	2.27D-15	3.70D-20
63/64	1	4.02D-05	4.02D-05	6.16D-04	6.16D-04	6.16D-04	9.95D-05	9.95D-05	1.35D-03
63/64	2	3.90D-11	3.90D-11	5.96D-10	5.96D-10	5.96D-10	9.64D-11	9.64D-11	1.99D-09
63/64	3	2.11D-15	1.97D-15	2.38D-14	1.44D-13	1.19D-13	2.13D-15	2.97D-15	3.15D-21

4倍精度計算によっている。他の算法との比較として文献 5), pp. 625-626 でチェックして一致が得られている。

表 1 に実軸上の [0, 1] 区間での最大絶対誤差とその事前誤差評価を示す。Landen 変換 3 ないし 5 回で倍精度が得られている。母数  $k$  は  $k = \sin \theta$ , NL は Landen 変換の回数, [0, 1] 区間は  $x = \sin \varphi$  とおき  $\varphi$  の区間 [0,  $\pi/2$ ] を 200 等分し, このうちの最大誤差を Error として示してある。事前誤差評価 Estimate は式 (4.1), (4.2) から次式を導いて行った。

$$|P_0^{-1}| \sum_{j=0}^N \left| \frac{k_n^{1/2}}{4\alpha_{nj}} \right| \cdot \left| \frac{2z_n}{1-z_n^2} + \log \frac{1+z_n}{1-z_n} \right| \quad (5.2)$$

$$N = (2^n - 1), z_n = \text{sn}(K_0 K_n' / K_0', k_n)$$

図 5 に, 母数  $k$  が  $k = 0.5$  の場合の  $\Pi(z, \alpha^2, k)$  の実部, 虚部の等高線図を示す。等高線差は 0.1, パラメータは  $\alpha^{-1} = 0.5, 1.5, 3.0, (1.0 + 1.0i)$  の場合を示す。mesh 数は  $150 \times 120$ 。太線は対数関数のカットである。等高線図から  $\Pi(z, \alpha^2, k)$  の大域的性質を知ることができる。

表 2 に第 1, 4 象限と実軸上での最大絶対誤差とその事前誤差評価を示す。パラメータ  $\alpha^{-1} = 2 + 2i$ , 母数  $k^1$  は  $1/64, 1/2, 63/64$  の場合を計算した。E1 は第 1 象限の誤差を表す。計算した点は  $z = r \cdot \exp(i\theta)$  とするとき  $\theta_j = (\pi/2) \cdot (j/50), 1 \leq j \leq 50, j$  は整数。

$$r \geq 1 \text{ は } r_n = 2^n, 0 \leq n \leq 25. \quad r < 1 \text{ は } r_n = n/50, 1 \leq$$

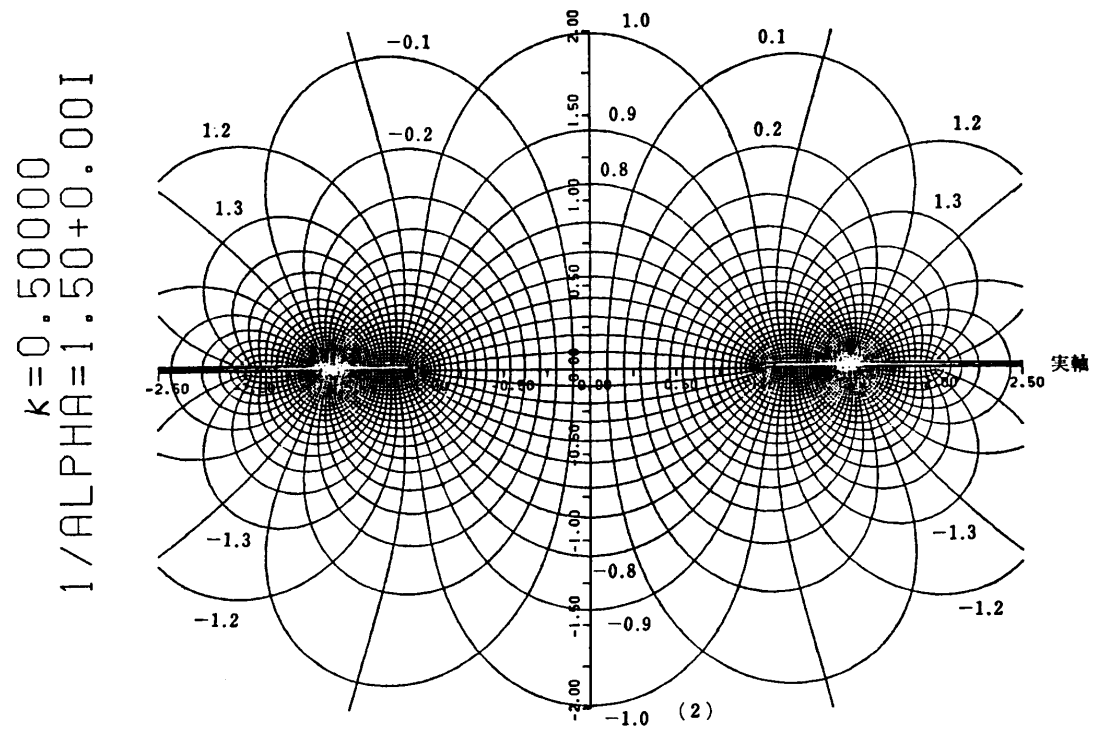
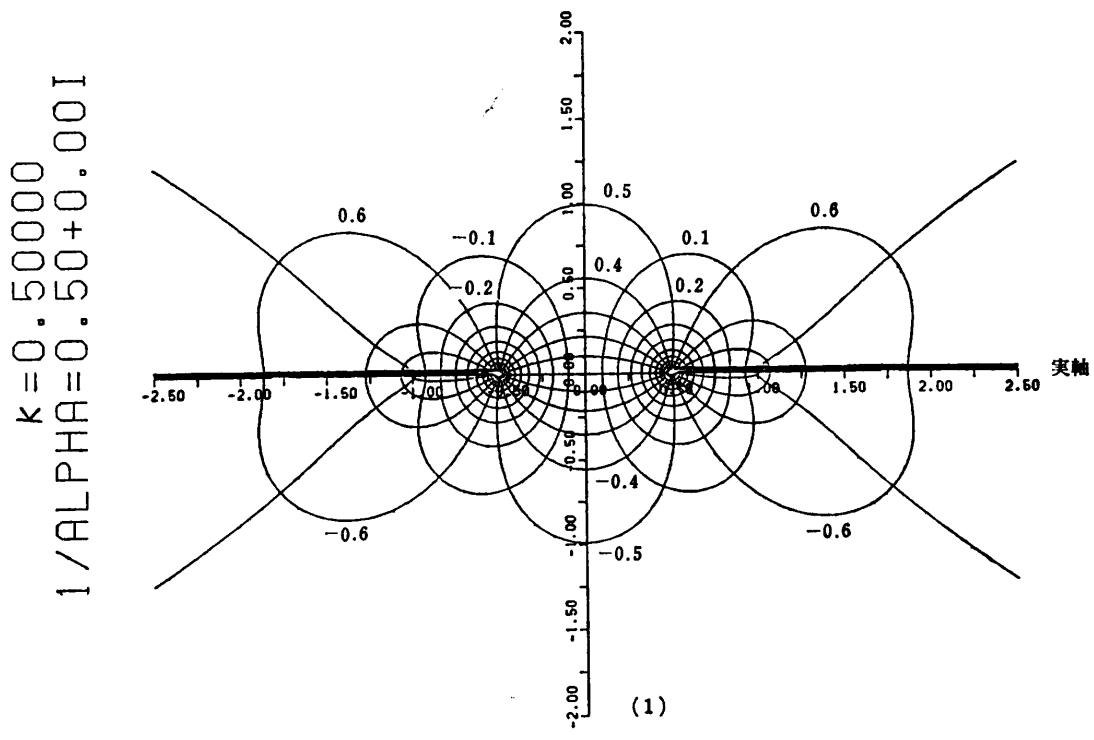


図5  $\Pi(z, \alpha^2, k)$  の実部, 虚部の等高線図 [(1), (2)], 等高誤差 0.1  
Fig. 5 Constant contours for real and imaginary parts of  $\Pi(z, \alpha^2, k)$ . [(1), (2)].



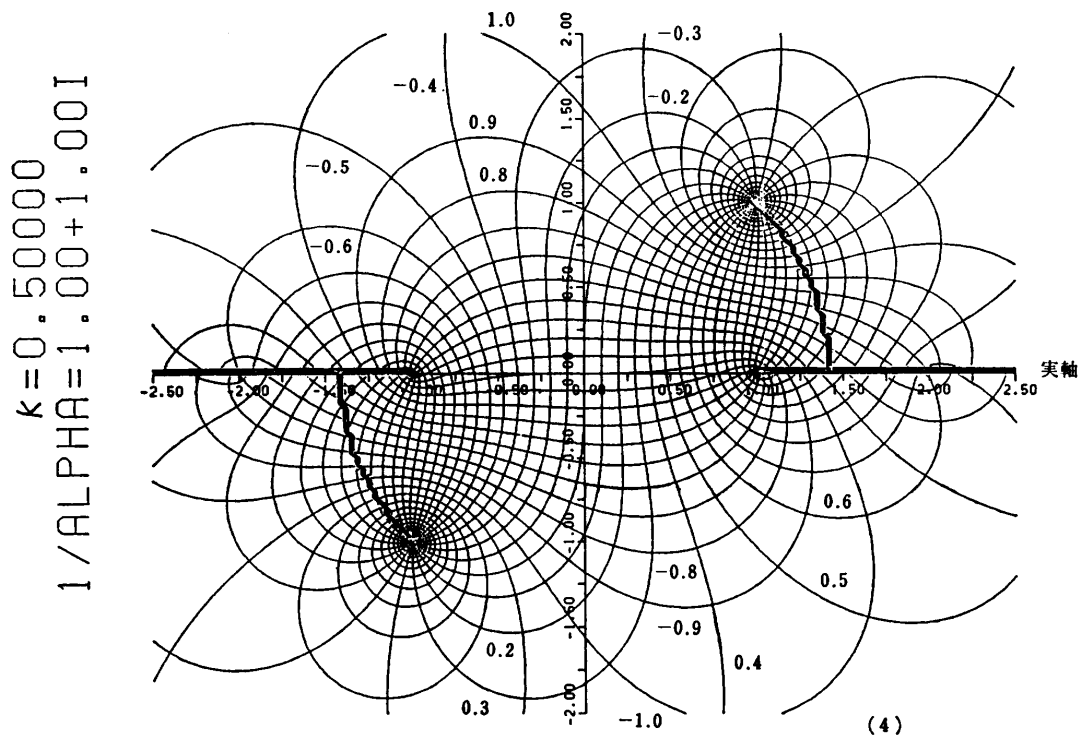
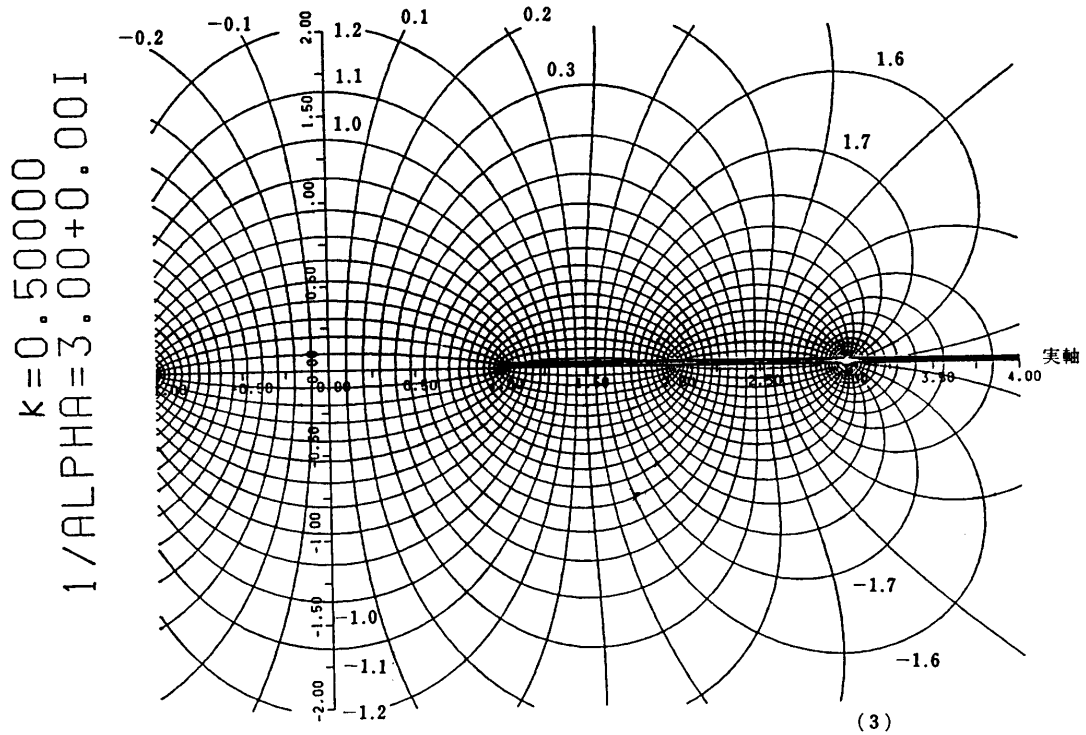


図 5  $\Pi(z, \alpha^2, k)$  の実部, 虚部の等高線図 [(3), (2)]. 等高誤差 0.1  
Fig. 5 Constant contours for real and imaginary parts of  $\Pi(z, \alpha^2, k)$ . [(3), (4)].

$n \leq 49$ . パラメータによる対数極  $\alpha^{-1}$  近傍は  $|z - \alpha^{-1}| > 0.1$  によって計算からはぶいてある.

E2 によって第4象限の最大絶対誤差を表す. 第4象限には対数極はないので, それに対する配慮なしに第1象限と同様の点で計算した. ER1 は実軸上の区間  $[0, 1]$  を 200 等分して, そこでの最大絶対誤差を計算した. ER2 は区間  $(1, 1/k)$  上を 200 等分して, ER3 は同区間の下岸を 200 等分して最大絶対誤差を計算した. ER4 は  $(1/k, \infty)$  上, ER5 は同区間の下岸を次のような点で計算した.  $z_n = 1/k + 2^n$ ,  $n$  は  $-7 \leq n \leq 25$ . 実軸上の区間の下岸を計算するとき下岸の点は  $z * (1 - 10^{-14} * i)$  として計算してある. 事前誤差評価は(5.2)によっている. NL は Landen 変換の回数である. 表2から, いろいろのことがわかるが, たとえば母数  $k^2$  が  $1/64 \leq k^2 \leq 63/64$  の範囲にあるときは, Landen 変換3回ないし5回で倍精度の計算ができることがわかる.

## 6. むすび

上昇 Landen 変換を用いて第3種不完全複素楕円積分を全域かつ一様近似する方法を提示した. 本方法は任意の複素変数, 複素パラメータ, 実母数について一つの原理で計算できる自己完結的直接的な算法である. これは, 上昇 Landen 変換の繰り返しによる第3種楕円積分の分解を Riemann 面上で考察することによって得られた. 数値例は本方法が数値計算法として有効かつ実用的であることを実証している.

**謝辞** 本研究は著者が文部省内地研究員として名古屋大学工学部情報工学専攻に滞在中になされたもので

ある. この機会を与えていただいた二宮市三教授に厚くお礼申し上げる. また本研究をすすめるにあたって, 始終討論していただいた鳥居達生助教授, 杉浦洋助手に感謝する. 数値計算は杉浦氏に負っていることを付記する.

## 参 考 文 献

- 1) 久原秀夫, 鳥居達生, 杉浦 洋: 第1種不完全複素楕円積分の全域かつ一様近似, 情報処理学会論文誌, Vol. 25, No. 5, pp. 712-720 (1984).
- 2) 久原秀夫, 鳥居達生, 杉浦 洋: 第1種不完全複素楕円積分の全域かつ一様近似 (II), 情報処理学会論文誌, Vol. 25, No. 6, pp. 1080-1088 (1984).
- 3) 久原秀夫: 第2種不完全複素楕円積分の全域かつ一様近似, 情報処理学会論文誌, Vol. 26, No. 1, pp. 85-93 (1985).
- 4) Byrd, P. F. and Friedmann, M. D.: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, p. 224, Springer-Verlag, Berlin (1954).
- 5) Abramowitz, M. and Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*, p. 599, Dover Pub., Inc., New York (1970).
- 6) Selfridge, R. G. and Maxfield, J. E.: *A Table of Incomplete Elliptic Integral of the Third Kind*, Dover Pub., Inc., New York (1958).
- 7) 久原秀夫: 複素楕円積分の静電場的解釈と対数関数による大域的近似法, 電気学会・電磁界理論研究会資料, EMT-82-1 (1982).  
(昭和59年3月21日受付)  
(昭和59年7月19日採録)