

第2種不完全複素楕円積分の全域かつ一様近似†

久原 秀 夫††

第2種不完全複素楕円積分を複素 Landen 変換を用いて全域かつ一様近似する方法を提示する。本論文のおもな内容は次のようなものである。1) 第2種不完全複素楕円積分を定積分と一次式の和で表す。2) 上昇複素 Landen 変換により、積分区間の端点の代数的特異性を解消し、対数特異点を新たな積分区間から離す。3) 定積分項への Gauss-Chebyshev 積分則の適用とその誤差解析。4) 数値例。数値例は本方法が第2種不完全複素楕円積分の数値計算法として有効かつ実用的であることを示している。

1. ま え が き

第1種不完全複素楕円積分の算法はすでに報告されている^{1), 2)}。本稿では次式で定義されている第2種不完全複素楕円積分の計算法を示す。

$$E(z, k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx \quad (1.1)$$

ただし、 k は母数、 z は任意の複素数である。

まず $E(z, k)$ から kz を差し引いた分を Cauchy の積分公式によって定積分表示する。つぎに与えられた z 平面の任意の点 $z_0 (=z)$ と母数 $k_0 (=k)$ で定義された $E(z_0, k_0)$ を k_0 より大きい母数 k_n (n は正の整数で $k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1} < k_n < k_{n+1} < \dots$) をもった $E(z_n, k_n)$ 、第1種不完全複素楕円積分 $F(z_n, k_n)$ および z_k ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) で表す。ただし、 $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ は上昇 Landen 変換によって生成される複素数である。 $F(z_n, k_n)$ は前論文で示した算法で計算すればよい¹⁾。 $E(z_n, k_n)$ は定積分表示した後、Gauss 型積分則によって求め、その誤差評価を行う。最後に数値計算例を示し、本方法の有効性と実用性を示す。

本方法は前報¹⁾と同様上昇 Landen 変換によって、最初の z 平面でのスリット境界端点の代数的特異性を解消し、さらに、この変換を繰り返すことによって積分区間を短くし、変換によって卵形線に変形してしまっているもとのスリット境界と、この積分区間との距離を大きくして、被積分関数の対数的特異性を弱め、最後に残った積分区間に対しては Gauss-Chebyshev 積分則を用いて端点の特異性を解消し、積分を容易にするという考え方に立脚している。

なお $E(z, k)$ は無限遠点に1位の極をもっている

† Uniform Approximation of Incomplete Elliptic Integral of the Second Kind on the Extended Complex Plane by HIDEO KUHARA (Department of Information and Electronics Engineering, Yatsushiro National College of Technology).

†† 八代工業高等専門学校情報電子工学科

が、ここで用いた近似式は、この極に対応する主要部を正確に表現している。この事実から本方法の全域一様近似が導かれる。 ∞ の値をとりうる $E(z, k)$ を数値計算する場合、有限桁演算であるから無限遠点近傍は相対精度、原点近傍は絶対精度の意味で全域一様近似となっていることを注意しておく。

2. 第2種不完全複素楕円積分の定積分表示

z 平面で定義された $E(z, k)$ の被積分関数から k を差し引いたものを $g(z)$ とおく⁶⁾。

$$g(z) = \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} - k \quad (2.1)$$

$g(z)$ は図1に示すように $E(z, k)$ の被積分関数の Riemann 面の分葉 Π_1 上の ∞ 点の近傍で $O(z^{-2})$ であるから Cauchy の積分公式によって

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.2)$$

ただし、積分路 C^- と C^+ は、その内部に z を含まず、それぞれ分葉 Π_1 と Π_2 の接続線にあたっている実軸上のカット $S^-: [-k^{-1}, -1]$ と $S^+: [1, k^{-1}]$ を取り囲むようにとってある。カット S^- と S^+ と交わらない Π_1 上の任意の点 z_0 と z を結ぶ積分路 C に沿った $g(z)$ の積分 $G(z)$ は次のようになる。

$$G(z) = \int_{z_0}^z g(z) dz = \int_{z_0}^z \left[\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} - k \right] dx \quad (2.3)$$

上式に(2.2)を代入し、積分順序を変更すれば

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} g(\zeta) \log \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} g(\zeta) \log \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.4)$$

C^- と C^+ を連続的に、それぞれ S^- と S^+ に接近させ、 $z_0=0$ とおく

$$G(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{x^2-1}} \log \frac{x+z}{x-z} dx \quad (2.5)$$

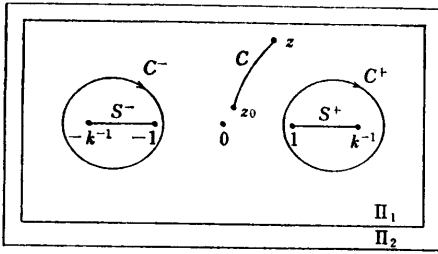


図1 $E(z, k)$ の被積分関数の Riemann 面とその上のブランチカット S^-, S^+ と積分路 C, C^-, C^+ .
Fig. 1 Branch cuts S^-, S^+ and contours C, C^-, C^+ on Riemann surface for integrand of $E(z, k)$.

(2.3)の最右辺との関係から

$$E(z, k) = \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{x^2-1}} \log \frac{x+z}{x-z} dx + kz \tag{2.6}$$

これで $E(z, k)$ の定積分表示が求まった。上式の右辺の積分項は k が 1 に収束するとき $O(k^{1/2})$ で 0 に収束する。ただし、 k' は k の補母数で $k' = \sqrt{1-k^2}$ 。

なお、上式を実際に使用するのは上昇 Landen 変換を繰り返した後であるから (第1種不完全楕円積分の算法¹⁾ のところでも述べたように) 計算の対象になる点 z は積分区間 $[1, k^{-1}]$ のスリット S^+ から十分に離れた卵形線の外にあるため (2.6) の対数関数の特異性は問題にならない。

3. 上昇 Landen 変換の繰り返しと Gauss-Chebyshev 積分則

一つの複素平面 z_{n-1} ($n \geq 1$) ともう一つの他の複素平面 z_n が Landen 変換 (3.1), (3.2) によって関係づけられているものとする。

$$\frac{(1+k_n')^2 z_n^2 (1-z_n^2)}{1-k_n^2 z_n^2} = z_{n-1}^2 \tag{3.1}$$

$$k_n = \frac{2\sqrt{k_{n-1}}}{1+k_{n-1}}, \quad k_n' = \frac{1-k_{n-1}}{1+k_{n-1}} \tag{3.2}$$

それぞれ z_{n-1} 平面と z_n 平面における母数 k_{n-1}, k_n の第1種完全楕円積分と不完全楕円積分に関して次式が成立する^{1), 3)}。なお、(3.3)については後で説明する。

$$K_0'/K_n' = 2^n \cdot K_0/K_n \tag{3.3}$$

$$K_n = (1+k_{n-1})K_{n-1} = 2K_{n-1}/(1+k_n') \tag{3.4}$$

$$K_n' = (1+k_{n-1})K_{n-1}'/2 = K_{n-1}'/(1+k_n) \tag{3.5}$$

$$F(z_{n-1}, k_{n-1}) = 2F(z_n, k_n)/(1+k_{n-1}) \tag{3.6}$$

$$E(z_{n-1}, k_{n-1}) = \frac{2E(z_n, k_n) + 2k_n' F(z_n, k_n)}{1+k_n'} - k_{n-1} z_{n-1} \tag{3.7}$$

上式を反復利用すれば $E(z_0, k_0)$ を $E(z_n, k_n)$ と $F(z_n,$

$k_n)$ と z_j ($j=0, 1, 2, \dots, n-1$) によって次のように表現することができる。

$$E(z_0, k_0) = \frac{2^n \cdot K_n'}{K_0'} E(z_n, k_n) + \frac{K_0'}{K_n'} \left[2^n \cdot k_n' \left(\frac{K_n'}{K_0'} \right)^2 + 2^{n-1} k_{n-1}' \left(\frac{K_{n-1}'}{K_0'} \right)^2 + \dots + 2k_1' \left(\frac{K_1'}{K_0'} \right)^2 \right] \cdot F(z_n, k_n) - \left[2^{n-1} k_{n-1} \left(\frac{K_{n-1}'}{K_0'} \right) z_{n-1} + 2^{n-2} k_{n-2} \left(\frac{K_{n-2}'}{K_0'} \right) z_{n-2} + \dots + 2k_1 \frac{K_1'}{K_0'} z_1 + k_0 z_0 \right] \tag{3.8}$$

ここで上式の $E(z_n, k_n)$ は (2.6) によって

$$E(z_n, k_n) = \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k_n} \sqrt{\frac{1-k_n^2x^2}{x^2-1}} \log \frac{x+z_n}{x-z_n} dx + k_n z_n \tag{3.9}$$

となる。 $E(z_0, k_0)$ の計算式 (3.8) において必要な $K_0', K_1', \dots, K_n'; k_j$ ($j=0, 1, 2, \dots, n$) と k_j' ($j=1, 2, \dots, n$) は (3.2)~(3.5) によって求める。すなわち、与えられた z_0, k_0 についての $E(z_0, k_0)$ の計算は (3.8), (3.9) を基本とし、(3.2)~(3.5) を補助的に使って行う。十分 1 に近くなった母数 k_n の $E(z_n, k_n)$ の評価に必要な積分は Gauss 型積分則によって近似計算し、 $F(z_n, k_n)$ の計算は文献 1) によって行う。

積分則の具体的な計算法とその誤差評価については次章で述べる。

さて、(3.3) の成立を示す。これは Landen 変換の Riemann 面の各分葉の積分路の対応から得られるものであるが、 n 段階では複雑なので、本質的理解を助けるために、 $n=2$ とおき、図 2 を用いる。(3.6) から次式が成立する。

$$F(z_0, k_0) = \frac{2}{1+k_0} F(z_1, k_1) = \frac{2}{1+k_0} \cdot \frac{2}{1+k_1} F(z_2, k_2)$$

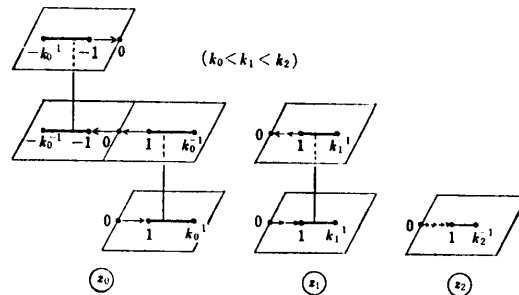


図2 上昇 Landen 変換における各平面の積分路の対応
Fig. 2 Corresponding contours on each sheet of Riemann surfaces for ascending Landen transformation.

図2の z_2 平面の右半面で, 変数 z_2 が0から1まで実軸に沿って動くとき, z_1 は0から1へ(下の分葉の右半面上で), 次に1から0へ(上の分葉の右半面上で)動く. このとき z_0 は0から1へ(下の分葉の右半面上で), 次に1から-1へ(中段の分葉上で), さらに-1から0へ(最上段の分葉の左半面上で)動く. 上式で, この関係を計算すると

$$4K_0 = 2^2 \cdot K_0 = \frac{2}{1+k_0} \cdot \frac{2}{1+k_1} K_2$$

このことからわかるように上昇 Landen 変換を n 回繰り返したとき, z_n 平面で z_n が0から1まで動くとき, 対応する z_0 の動きを追跡することにより, 次式が成立することが帰納的にわかる.

$$2^n \cdot K_0 = \frac{2}{1+k_0} \cdot \frac{2}{1+k_1} \cdots \frac{2}{1+k_{n-1}} K_n \quad (3.10)$$

一方, 文献1)から

$$\frac{2}{1+k_0} \cdot \frac{2}{1+k_1} \cdots \frac{2}{1+k_{n-1}} = \frac{K_0'}{K_n'} \quad (3.11)$$

上の二つの式から(3.3)が導かれる.

なお, (3.8)の $F(z_n, k_n)$ の係数である級数和は

$$\frac{E_0}{K_0} \frac{1 - (K_n'/K_0') \cdot (E_n/E_0)}{K_n'/K_0'} \quad (3.12)$$

となる. ただし, E_0 と E_n は, それぞれ母数 k_0 と k_n の第2種完全楕円積分である. 上式も図2で説明できる. すなわち, (3.8)で $z_n=1$ とおき, これに対応する $z_{n-1}, z_{n-2}, \dots, z_2, z_1, z_0$ を追跡すると, これらは, それぞれ異なる分葉上で $z_{n-1}=z_{n-2}=\dots=z_2=z_1=z_0=0$ となり, このとき $E(z_n, k_n)=E(1, k_n)=E_n$, $F(z_n, k_n)=F(1, k_n)=K_n$ かつ, $z_0=0$ は 2^n 枚目の分葉上の $z_0=0$ であることを意味していることを考えると $E(z_0, k_0)=2^n \cdot E_0$. したがって(3.8)から $F(z_n, k_n)$ の係数は, (3.3)を使って整理すると上式になることがわかる.

4. 積分則とその誤差評価

第2種不完全複素楕円積分 $E(z_0, k_0)$ を求めることは, 前述したことから(3.8)の第一項に関する積分

$$I_n = \frac{2^n \cdot K_n'}{\pi \cdot K_0'} \int_1^{1/k_n} \sqrt{\frac{1-k_n^2 x^2}{x^2-1}} \log \frac{x+z_n}{x-z_n} dx \quad (4.1)$$

の計算に帰着された. Landen 変換の繰り返し回数 n が増加したとき, すなわち k_n が1に収束するとき I_n の収束性について調べておく必要がある. 第1種完全楕円積分についての関係式(3.3)によって(4.1)の積分の係数は $K_n/\pi K_0$ と書くことができる. そこで, I_n を評価しよう.

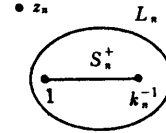


図3 z_n 平面におけるカット $S_n^+[1, k_n^{-1}]$ と卵形線 L_n と $\left| \log \frac{x+z_n}{x-z_n} \right|$ の評価

Fig. 3 Estimation of $\left| \log \frac{x+z_n}{x-z_n} \right|$; $x \in [1, k_n^{-1}]$, $z_n \in$ exterior of oval L_n .

$$\begin{aligned} |I_n| &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{K_n}{K_0} \left| \int_1^{1/k_n} \sqrt{\frac{1-k_n^2 x^2}{x^2-1}} \log \frac{x+z_n}{x-z_n} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{K_n}{K_0} M H_n k_n' \end{aligned} \quad (4.2)$$

ただし,

$$H_n = \log \frac{1+k_n'}{\sqrt{1+k_n'^2}} = \cosh^{-1} \left(\frac{1}{k_n'} \right) \quad (4.3)$$

M は n と無関係な適当な正の定数である. 定数 M がそのようにとれることは次の理由による. M は $\left| \log(x+z_n)/(x-z_n) \right|$ を評価することからでてきた定数であるが, 図3に示すように Landen 変換を繰り返した後は, x は十分短くなったカット $[1, k_n^{-1}]$ 上の点であり, z_n は卵形線の外部にある点である. カットと卵形線は真に離れており, その距離は $[1-\text{sn}(c_n, k_n)]$ で与えられる¹⁾.

ただし, $c_n = K_0 K_n' / K_0'$ ($0 < c_n < K_0$). さて, このような条件のもとで $\left| (x+z_n)/(x-z_n) \right|$ を評価すると

$$\left| \frac{x+z_n}{x-z_n} \right| \leq 1 + \frac{2x}{|x-z_n|} \leq 1 + \frac{2k_n^{-1}}{[1-\text{sn}(c_n, k_n)]}$$

k_n は十分に1に近く, $[1-\text{sn}(c_n, k_n)]$ については, $0 < \delta_1 < \text{sn}(c_n, k_n) < \delta_2 < 1$ なる n に無関係な定数 δ_1, δ_2 がとれる. したがって,

$$\left| (x+z_n)/(x-z_n) \right| < 1 + 3/\delta_2$$

ゆえに, \log の偏角 θ が, $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲に限られることを考えると, M として n と z_n に無関係な値を決定することができる. いま $M_2 = \log(1 + 3/\delta_2)$ とおくと, たとえば, $M = \sqrt{M_2^2 + \pi^2}$ とすればよい.

また K_n は次のように表される⁴⁾.

$$\begin{aligned} K_n &= \log \frac{4}{k_n'} + \frac{1}{4} \left(-1 + \log \frac{4}{k_n'} \right) k_n'^2 \\ &+ \frac{9}{64} \left(-\frac{7}{6} + \log \frac{4}{k_n'} \right) k_n'^4 \\ &+ \frac{25}{256} \left(-\frac{37}{30} + \log \frac{4}{k_n'} \right) k_n'^6 + \dots \end{aligned}$$

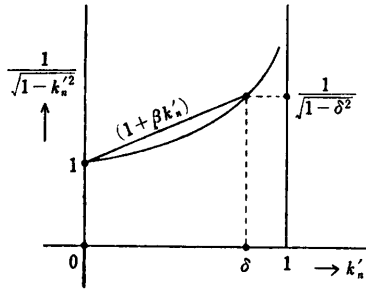


図 4 $(1 - k_n'^2)^{-1/2}$ の下に凸の性質と $(1 - k_n'^2)^{-1/2} \leq (1 + \beta k_n')$ が成立する区間 $[0, \delta]$.

Fig. 4 Downward convexity of $(1 - k_n'^2)^{-1/2}$ and interval $[0, \delta]$ on which inequality $(1 - k_n'^2)^{-1/2} \leq (1 + \beta k_n')$ holds.

上式は k_n が 1 に収束するとき

$$K_n = \log(4/k_n') + k_n' \cdot o(1) \tag{4.4}$$

と書くことができる。

また、(4.3)の \log の括弧の中の $(1 - k_n'^2)^{-1/2}$ は k_n' を横軸にとったグラフが図 4 に示すようにつねに下に凸であるから、 $0 < \delta < 1$ なる任意の δ に対して

$$(1 - k_n'^2)^{-1/2} \leq (1 + \beta k_n'), (0 \leq k_n' \leq \delta) \tag{4.5}$$

ただし、 β は $\beta = [(1 - \delta)^{-1/2} - 1]/\delta$ 。したがって、 H_n は

$$H_n \leq \log(1 + k_n')(1 + \beta k_n') \leq (1 + \beta)k_n' + \beta k_n'^2 \tag{4.6}$$

(4.2), (4.4), (4.6) から

$$|I_n| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{M}{K_0} \left[\log \left(\frac{4}{k_n'} \right) + k_n' \cdot o(1) \right] \cdot [1 + \beta + \beta k_n'] k_n'^2 \tag{4.7}$$

M は定数で、 k_n' は 0 に二次収束するから I_n は漸近的に $M(1 + \beta)k_n'^2 [\log(4/k_n')]/\pi K_0$ で 0 に収束する。これからわかるように Landen 変換を繰り返すことによって、(3.8), (3.9)における定積分表示の項の全体への寄与は小さくなっていく。

次に、第 2 種不完全複素楕円積分の定積分表示される項 (4.1) に区間 $[1, k_n^{-1}]$ で $[(k_n^{-1} - x)/(x - 1)]^{1/2}$ を重みとする Gauss 型積分公式を適用したときの誤差評価を行う。第 1 種不完全複素楕円積分 $F(x_n, k_n)$ の定積分表示に対する誤差評価については文献 1) を参照されたい。

さて、(4.1)の積分の前の係数を λ と書くことにすると (3.3), (4.4)を用いて

$$\lambda = \frac{2^n \cdot K_n'}{\pi \cdot K_0'} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{K_n}{K_0} = \frac{1}{\pi K_0} \left[\log \frac{4}{k_n'} + k_n' \cdot o(1) \right] \tag{4.8}$$

(4.1)を次のように書き換え $f(x)$ を (4.10)のように

定義する。

$$I_n = \lambda \int_1^{1/k_n} \sqrt{\frac{1 - k_n^2 x^2}{x^2 - 1}} \log \frac{x + z_n}{x - z_n} dx = \int_1^{1/k_n} f(x) \sqrt{\frac{k_n^{-1} - x}{x - 1}} dx \tag{4.9}$$

$$f(x) = \lambda k_n \sqrt{(k_n^{-1} + x)/(x + 1)} \cdot \log [(x + z_n)/(x - z_n)] \tag{4.10}$$

これに $\sqrt{(k_n^{-1} - x)/(x - 1)}$ を重みとする N 点 Gauss 型積分則を適用したときの近似値 I_n^N は⁵⁾

$$I_n^N = (k_n^{-1} - 1) \sum_{j=1}^N w_j f(x_j) \tag{4.11}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} w_j &= (2\pi/(2N+1)) \cos^2 [\pi(2j-1)/2(2N+1)] \\ x_j &= k_n^{-1} - (k_n^{-1} - 1) \cos^2 [\pi(2j-1)/2(2N+1)] \end{aligned} \right\} \tag{4.12}$$

誤差 $\Delta_n^N (= I_n - I_n^N)$ を計算しよう。(4.9)の最右辺に次の変数変換をほどこすと (4.14)が得られる。

$$x = [(k_n^{-1} - 1) \cos \theta]/2 + (k_n^{-1} + 1)/2 \tag{4.13}$$

$$I_n = (k_n^{-1} - 1) \int_0^\pi \varphi(\theta) \frac{1 - \cos \theta}{2} d\theta \tag{4.14}$$

ただし

$$\varphi(\theta) = f(x) \tag{4.15}$$

$\varphi(\theta)$ を Fourier 級数に展開する。

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\theta) \tag{4.16}$$

ここで \sum' は初項を $1/2$ として和をとることを意味している。上式と (4.14) とから

$$I_n = \pi(k_n^{-1} - 1)(a_0 - a_1)/4 \tag{4.17}$$

これが求める積分の真値を Fourier 係数で表現したものである。一方、(4.15)で $\varphi(\theta_j) = f(x_j)$ としたときの θ_j は

$$\theta_j = [2\pi(2N+1-j)]/2N$$

となるが、(4.14)に N 点積分則を適用すると次のようになる。

$$I_n^N = \pi(k_n^{-1} - 1) \cdot (a_0 - a_1 - a_{2N} + 2a_{2N+1} - a_{2N+2} - \dots)/4 \tag{4.18}$$

これを (4.17)と比較すると、誤差 Δ_n^N の主要項は

$$\Delta_n^N = \pi(k_n^{-1} - 1)a_{2N}/4 \tag{4.19}$$

であるから Fourier 係数の a_{2N} を評価すればよい。

$f(x) (= \varphi(\theta))$ を次に述べる解析接続によって複素平面へ延長し、複素平面での Laurent 級数展開係数として、複素周回積分の形で a_{2N} を表現し、評価することを考えよう。まず (4.13)において

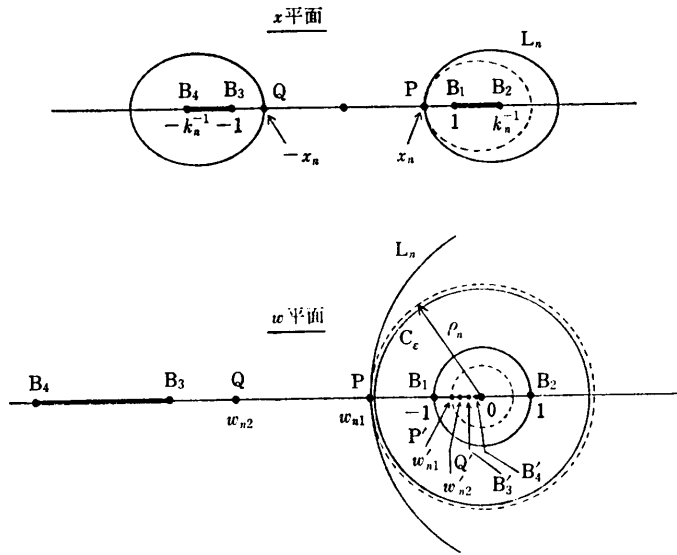


図5 x 平面の特異点 B_1, B_2, B_3, B_4, P, Q の w 平面への写像と Laurent 級数展開係数の積分路 C_c .
 Fig. 5 Mapping of singular points B_1, B_2, B_3, B_4, P, Q in x -plane to w -plane, and contour C_c for coefficients of Laurent series.

$\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2, w = e^{i\theta}$ (4.20)
 とおいて, $\varphi(\theta) (= f(x))$ を w 平面の単位円上の関数に写像し, さらに単位円内外へ解析接続する. そうすることによって, $f(x)$ は次のように Laurent 級数に展開される.

$$f(x) = \varphi(\theta) = \phi(w) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k w^k \quad (4.21)$$

ただし

$$\frac{1}{2} a_{2N} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_c} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta^{2N+1}} d\zeta \quad (4.22)$$

そこで係数評価を行う. x から w への変換 (4.13), (4.20) をまとめて書くと

$$x = \frac{k_n^{-1} + 1}{2} + \frac{k_n^{-1} - 1}{4} \left(w + \frac{1}{w} \right) \quad (4.23)$$

となっており, これを逆に解くと

$$w = \left[1 + \sqrt{\frac{x - k_n^{-1}}{x - 1}} \right] / \left[1 - \sqrt{\frac{x - k_n^{-1}}{x - 1}} \right] \quad (4.24)$$

となる. Laurent 級数の係数 a_{2N} の積分表示の積分路 C を定めるため x 平面 (x は最初実軸上だけであったが, w 平面との対応を考え, 実軸から解析接続して考えることにするので, x 平面と呼ぶことにする) での $f(x)$ の特異点が, w 平面の $\phi(w)$ のどのような特異点になって現れるかを調べたのが図5である. 特異点は (4.23) によって写像される. $\phi(w) = f(x)$ に (4.23) を代入すると

$$\begin{aligned} \phi(w) &= f[x(w)] \\ &= \lambda k_n \sqrt{\frac{k_n^{-1} + x(w)}{1 + x(w)}} \log \frac{x(w) + z_n}{x(w) - z_n} \end{aligned} \quad (4.25)$$

上式からわかるように x 平面での対数特異点は, $x = z_n$ と $x = -z_n$ であるが, これらは w 平面では, $x(w) - z_n = 0$ と $x(w) + z_n = 0$ を満足する w となって現れる. x 平面でのカット $[1, k_n^{-1}]$ に最も接近する対数特異点を x_n とすると, これは卵形線 L_n と x との交点となる. これは w 平面では $w = w_{n1}$ の対数特異点となって現れる. w_{n1} は (4.24) から負の実数

$$w_{n1} = \left[1 + \sqrt{\frac{x_n - k_n^{-1}}{x_n - 1}} \right] / \left[1 - \sqrt{\frac{x_n - k_n^{-1}}{x_n - 1}} \right] \quad (4.26)$$

となる. w_{n1}' は w_{n1} の単位円に関する鏡像である. $w_{n1} \cdot w_{n1}' = 1$ である. したがって $\phi(w)$ の収束半径の最大値 ρ_n は次のようになり, 最小値は ρ_n^{-1} である.

表1 名古屋大学大型計算機センターのプログラム ICEILD による実軸上の区間 $[0, 1]$ での誤差評価
 Table 1 Estimation of errors in interval $[0, 1]$ by the program ICEILD of Computation Center of Nagoya University.

k^2	Landen 変換回数	積分則 標本数	母数 k	最大絶対誤差の生じる場所	最大絶対誤差
1/64	NL	NP	$k=1/8$	MAX-X	Error
	1	1	0.1250000	1.0000000	7.58D-02
	1	2	0.1250000	1.0000000	3.50D-03
	1	3	0.1250000	1.0000000	1.98D-04
	1	4	0.1250000	1.0000000	1.28D-05
	1	5	0.1250000	1.0000000	8.79D-07
	1	6	0.1250000	1.0000000	6.33D-08
	2	1	0.1250000	1.0000000	3.05D-04
	2	2	0.1250000	1.0000000	4.56D-08
	2	3	0.1250000	1.0000000	8.74D-12
	2	4	0.1250000	1.0000000	2.66D-15
	3	1	0.1250000	1.0000000	3.47D-09
	3	2	0.1250000	0.9700000	1.55D-15
	4	1	0.1250000	0.9900000	1.78D-15
1/2	NL	NP	$k=1/\sqrt{2}$	MAX-X	Error
	1	1	0.7071068	1.0000000	3.40D-04
	1	2	0.7071068	1.0000000	3.37D-07
	1	3	0.7071068	1.0000000	4.53D-10
	1	4	0.7071068	1.0000000	6.90D-13
	1	5	0.7071068	1.0000000	1.55D-15
	2	1	0.7071068	1.0000000	1.24D-09
	2	2	0.7071068	0.9200000	8.88D-16
	3	1	0.7071068	0.9200000	1.33D-15
63/64	NL	NP	$k=\sqrt{63}/8$	MAX-X	Error
	1	1	0.9921567	1.0000000	3.82D-09
	1	2	0.9921567	1.0000000	2.22D-15
2	1	0.9921567	0.5700000	1.22D-15	

$$\rho_n = |w_{n1}| = -w_{n1} \quad (4.27)$$

$w = w_{n2}$ は $x = -x_n$ に対応する対数特異点, w_{n2}' は単位円に関する w_{n2} の鏡像で $w_{n2} \cdot w_{n2}' = 1$ である.

なお, x 平面のカット $[-k_n^{-1}, -1]$ の両端の代数的分岐点 B_3, B_4 は w 平面では w_{n2} よりさらに原点から離れた点に写像され, その単位円に関する鏡像 B_3', B_4' は w_{n2}' よりさらに原点の近くにある. 以上のことから Laurent 展開の収束域は半径 $|w| = \rho_n$ と $|w| = \rho_n^{-1}$ の間の円環領域ということになる. $a_{2N}/2$ の積分表示(4.22)の積分路 C は, この円環領域の任意の閉曲線であればよいわけであるが, 鞍点法の考えから C を半径 $|w| = \rho_n$ の円にきわめて接近させ $C_\varepsilon (|w| = \rho_n - \varepsilon, \varepsilon$ は $\varepsilon \approx 0$ の正数) とする. このとき $\phi(w)$ の $w = -\rho_n$ 近傍における主要項は(4.25)から次のようになる.

$$\phi(w) \approx \lambda k_n \sqrt{\frac{k_n^{-1} + x_n}{1 + x_n}} \log \frac{1}{(w + \rho_n)} \quad (4.28)$$

これを(4.22)に代入すると

$$\frac{a_{2N}}{2} \approx \frac{\lambda k_n}{2\pi i} \sqrt{\frac{k_n^{-1} + x_n}{1 + x_n}} \oint_{C_\varepsilon} \frac{-\log(\zeta + \rho_n)}{\zeta^{2N+1}} d\zeta \quad (4.29)$$

この式の積分記号の中の $\log(\zeta + \rho_n)$ を原点のまわりで Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} \log(\zeta + \rho_n) = & \log \rho_n + \frac{\zeta}{\rho_n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{\rho_n}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\zeta}{\rho_n}\right)^3 \\ & - \dots - \frac{1}{2N} \left(\frac{\zeta}{\rho_n}\right)^{2N} + \dots \end{aligned}$$

留数を計算することから

$$\frac{a_{2N}}{2} \approx \lambda k_n \sqrt{\frac{k_n^{-1} + x_n}{1 + x_n}} \cdot \frac{1}{2N} \rho_n^{-2N} \quad (4.30)$$

したがって誤差 Δ_n^N は上式と(4.8), (4.19)とから

表 2 複素平面上での誤差評価
Table 2 Estimation of errors in complex plane.

		$ z \leq 1$		$ z > 1$	
n	N	Error 1	$k^2=1/64$ z of Maximal Error	Error 2	$k^2=1/64$ z of Maximal Error
1	1	7.58D-02	(1.0000D+00, 0.0)	4.77D-02	(1.0350D+00, 0.0)
1	2	3.50D-03	(1.0000D+00, 0.0)	2.16D-03	(1.0350D+00, 0.0)
1	3	1.98D-04	(1.0000D+00, 0.0)	1.21D-04	(1.0350D+00, 0.0)
1	4	1.28D-05	(1.0000D+00, 0.0)	7.72D-06	(1.0350D+00, 0.0)
1	5	8.79D-07	(1.0000D+00, 0.0)	5.28D-07	(1.0350D+00, 0.0)
1	6	6.33D-08	(1.0000D+00, 0.0)	3.77D-08	(1.0350D+00, 0.0)
2	1	3.05D-04	(1.0000D+00, 0.0)	1.92D-04	(1.0350D+00, 0.0)
2	2	4.56D-08	(1.0000D+00, 0.0)	2.81D-08	(1.0350D+00, 0.0)
2	3	8.74D-12	(1.0000D+00, 0.0)	5.33D-12	(1.0350D+00, 0.0)
2	4	2.80D-15	(1.0000D+00, 0.0)	5.43D-15	(1.0043D+03, 1.9977D+02)
3	1	3.47D-09	(1.0000D+00, 0.0)	2.18D-09	(1.0350D+00, 0.0)
3	2	1.60D-15	(9.7000D-01, 0.0)	7.42D-15	(2.5490D+05, 6.1196D+04)
4	1	2.16D-15	(9.5000D-01, 0.0)	1.15D-14	(4.1008D+04, 2.5892D+05)
n	N	Error 1	$k^2=1/2$ z of Maximal Error	Error 2	$k^2=1/2$ z of Maximal Error
1	1	3.40D-04	(1.0000D+00, 0.0)	2.51D-04	(1.0021D+00, 0.0)
1	2	3.37D-07	(1.0000D+00, 0.0)	2.48D-07	(1.0021D+00, 0.0)
1	3	4.53D-10	(1.0000D+00, 0.0)	3.34D-10	(1.0021D+00, 0.0)
1	4	6.90D-13	(1.0000D+00, 0.0)	5.08D-13	(1.0021D+00, 0.0)
1	5	1.75D-15	(1.0000D+00, 0.0)	1.92D-15	(1.2692D+00, 0.0)
2	1	1.24D-09	(1.0000D+00, 0.0)	9.13D-10	(1.0021D+00, 0.0)
2	2	1.71D-15	(6.3640D-01, 6.3640D-01)	2.38D-15	(2.7804D+03, 3.0078D+03)
3	1	3.01D-15	(6.9957D-01, 5.9749D-01)	4.55D-15	(4.2562D+04, 4.9834D+04)
n	N	Error 1	$k^2=63/64$ z of Maximal Error	Error 2	$k^2=63/64$ z of Maximal Error
1	1	3.82D-09	(1.0000D+00, 0.0)	3.73D-09	(1.0000D+00, 0.0)
1	2	2.43D-15	(1.0000D+00, 0.0)	3.47D-15	(1.0078D+00, 0.0)
2	1	2.14D-15	(4.2675D-01, 8.3755D-01)	2.81D-15	(1.0074D+00, 0.0)

$$\Delta_n^N \approx \frac{1-k_n}{4K_0} \left(\log \frac{4}{k_n'} \right) \sqrt{\frac{k_n^{-1} + x_n}{1+x_n}} \cdot \frac{1}{N} \rho_n^{-2N} \quad (4.31)$$

k_n が十分1に近いときは、これは次式の形で0に収束する。

$$\Delta_n^N \approx k_n'^2 (\log 4/k_n') \rho_n^{-2N} / 8K_0N \quad (4.32)$$

相対誤差 Δ_n^N / I_n は

$$\frac{\Delta_n^N}{I_n} \approx \frac{1}{\pi K_0(a_0 - a_1)} \sqrt{\frac{k_n^{-1} + x_n}{1+x_n}} \left(\log \frac{4}{k_n'} \right) \frac{1}{N} \rho_n^{-2N} \quad (4.33)$$

k_n' が0に収束するとき、相対誤差は大きくなりそうであるが、このとき

$$\begin{aligned} \rho_n &\approx 8(1-x_n)/k_n'^2, \\ x_n &= \text{sn}(K_0K_n'/K_0', k_n) \end{aligned} \quad (4.34)$$

であるから¹⁾、やはり $N=1$ としても0に収束する。

なお、第2種 $E(z_0, k_0)$ の積分項 I_n そのものが、 k_n が1に収束するとき漸近的に $O(k_n'^2 \log(4/k_n'))$ の速さで0に収束することを(4.7)で示したが、この収束の速さは第1種 $F(z_n, k_n)$ の絶対誤差 $O(\rho_n^{-2N}/N)$ の

それよりも遅い¹⁾。これは k_n が1に近いとき ρ_n が、(4.34)で示されるから $O(k_n'^{4N}/N)$ の形になるからである。すなわち補助的に近似計算する $F(z_n, k_n)$ の誤差に第2種の積分項 I_n は埋没しない。しかし、(3.8)において、 k_n が1に収束するとき $F(z_n, k_n)$ による絶対誤差 $(\Delta_n^N)_1$ と I_n の絶対誤差 $(\Delta_n^N)_2$ との比は

$$\begin{aligned} &\frac{(\Delta_n^N)_1}{(\Delta_n^N)_2} \\ &\approx 8E_0 \frac{1 - (\pi E_n / 2K_0' E_0)}{(\pi / 2K_0')} \cdot \frac{1}{1+x_n} \cdot \frac{1}{k_n'^2 \log(4/k_n')} \end{aligned} \quad (4.35)$$

となり、 $(\Delta_n^N)_1$ が $(\Delta_n^N)_2$ より非常に大きくなるので、 $E(z_0, k_0)$ の全体的な誤差は $(\Delta_n^N)_1$ によって決定されてしまう。数値例も、このことを実証している。

最後の式においては、 k_n が1に近いとき、 $K_n' \approx \pi/2$ となることと、(3.12)を用いている。

5. 計算法の要約と数値例

計算法を要約すると次のようになる。任意の母数

k_0 と複素数 z_0 が与えられたとき、 $E(z_0, k_0)$ を(3.8)、(3.9)によって表現する。そのとき $F(z_n, k_n)$ は文献1)の方法で計算する。 $E(z_n, k_n)$ の定積分表示の項は Gauss 型積分則(4.11)によって、 K_j' ($j=0, 1, 2, \dots, n$)； k_j ($j=0, 1, 2, \dots, n$)； k_j' ($j=1, 2, \dots, n$) は(3.2)、(3.5)によって求める。Landen 変換の繰り返し回数 n と積分則の標本点数 N は要求された精度で定める。誤差解析は $F(z_n, k_n)$ については文献1)により、 $E(z_n, k_n)$ については絶対誤差表示(4.31)による。

さて、数値例を示そう。

まず本方法の精度を確かめるため算法の原理が異なる別法の計算結果と比較して誤差を求める。別法として名古屋大学大型計算機センターのライブラリーに登録されているプログラム ICEILD (ガウスの算術幾何平均法)⁷⁾ を基準として実軸上の区間 $[0, 1]$ で、これを100等分して、その両端と各分点で誤差を測ったものを表1に示す。三つの母数 $k^2=1/64, 1/2, 63/64$ について倍精度の精度が得られるまで Landen 変換の回数と積分則の標本点数の数を増加した場合の表である。

表3 複素平面上での $E(z, k)$ の数値例
Table 3 Examples of complex value of $E(z, k)$ at some points in complex plane.

Values of $E(z, k)$ on Special Arguments	
z	Number of Landen Transforms=4 $E(z, k)$
$k=1/8$	
$1/2$	(0.523244712681361D+00, 0.0)
$1/\text{SQRT}(k)$	(0.156464230926255D+01, 0.166358378187035D+01)
$2/k$	(0.225190929842377D+01, 0.245216756374071D+01)
i	(0.866583669398722D-16, 0.883450326909646D+00)
$1+i$	(0.671684908101050D+00, 0.105905227959352D+01)
$10000(1+i)$	(0.125000019687499D+04, 0.125245197068873D+04)
$k=\text{SQRT}(1/2)$	
z	Number of Landen Transforms=3 $E(z, k)$
$1/2$	(0.512049322350427D+00, 0.0)
$1/\text{SQRT}(k)$	(0.135064388104767D+01, 0.398162007533574D+00)
$2/k$	(0.213223449695239D+01, 0.503430796253696D+00)
i	(-0.100074323282696D-16, 0.943856775856021D+00)
$1+i$	(0.840824218001322D+00, 0.101381417578875D+01)
$10000(1+i)$	(0.707106782954314D+04, 0.707157122498405D+04)
$k=\text{SQRT}(63/64)$	
z	Number of Landen Transforms=2 $E(z, k)$
$1/2$	(0.500384918693647D+00, 0.0)
$1/\text{SQRT}(k)$	(0.102327989375611D+01, 0.100938601520171D-01)
$2/k$	(0.200428609563314D+01, 0.123444619532562D-01)
i	(-0.545308834807194D-19, 0.998321222300089D+00)
$1+i$	(0.995321864641808D+00, 0.100014149670314D+01)
$10000(1+i)$	(0.992156741688592D+04, 0.992157976056044D+04)

計算時間は大体 Landen 変換の回数の2倍と標本点の数の和で評価されるので、積分則は二つの標本点の場合がよい。また計算時間は第1種不完全複素楕円積分の場合の2倍程度と考えてよいであろう。

次に複素平面上での誤差の評価を表2に示す。三つの母数 $k^2=1/64, 1/2, 63/64$ について数値計算を倍精度演算で行った。精度検定は、本方法による4倍精度演算で行った。表2において n は Landen 変換の回数、 N は積分則の標本点の数である。

(1) Error 1 は $|z| \leq 1$ における最大絶対誤差である。標本 z の絶対値は $[0, 1]$ を50等分、偏角は $[0, \pi/2]$ を40等分して調べた。

(2) Error 2 は $|z| > 1$ における最大相対誤差である。標本の絶対値は $4^l; 1 \leq l \leq 50$ にとり、偏角は $[0, \pi/2]$ を40等分して調べた。とくに実軸上の $[1, k^{-1}]$ 区間は200等分して調べた。

$|z| > 1$ で相対誤差検定を行ったのは、第2種不完全複素楕円積分の絶対値が $|z| > 1$ では大きくなるからである。

(3) z of Maximal Error は最大誤差の生じる位置を示している。

表3に複素平面上の点 $z=1/2, 1/\sqrt{k}, 2/k, i, (1+i), 10^i(1+i)$ における $E(z, k)$ の数値を計算したものを示した。母数 k^2 は表1、表2の場合と同様である。

表4 $|z| \leq 1$ での絶対最大誤差 (Error 1) とその事前誤差評価
Table 4 Maximum absolute errors "Error 1" in $|z| \leq 1$, and their a priori error estimation.

Errors of $E(z, k)$						
n	N	$k^2=1/64$ Errors on Calculation		$k^2=1/64$ Error Estimation of Integral Parts		
		Error 1	Error 2	Total Error	Error-F	Error-E
1	1	7.58D-02	4.77D-02	7.03D-02	5.78D-02	1.25D-02
1	2	3.50D-03	2.16D-03	3.04D-03	2.50D-03	5.40D-04
1	3	1.98D-04	1.21D-04	1.76D-04	1.45D-04	3.12D-05
1	4	1.28D-05	7.72D-06	1.14D-05	9.39D-06	2.03D-06
1	5	8.79D-07	5.28D-07	7.91D-07	6.51D-07	1.40D-07
1	6	6.33D-08	3.77D-08	5.71D-08	4.70D-08	1.01D-08
2	1	3.05D-04	1.92D-04	2.80D-04	2.76D-04	4.02D-06
2	2	4.56D-08	2.81D-08	4.16D-08	4.10D-08	5.97D-10
2	3	8.74D-12	5.33D-12	8.23D-12	8.11D-12	1.18D-13
2	4	2.80D-15	5.43D-15	1.83D-15	1.81D-15	2.63D-17
3	1	3.47D-09	2.18D-09	3.20D-09	3.20D-09	2.83D-13
3	2	1.60D-15	7.42D-15	5.30D-18	5.30D-18	4.69D-22
4	1	2.16D-15	1.15D-14	3.99D-19	3.99D-19	7.63D-28
n	N	$k^2=1/2$ Errors on Calculation		$k^2=1/2$ Error Estimation of Integral Parts		
		Error 1	Error 2	Total Error	Error-F	Error-E
1	1	3.40D-04	2.51D-04	3.27D-04	3.13D-04	1.43D-05
1	2	3.37D-07	2.48D-07	3.32D-07	3.18D-07	1.45D-08
1	3	4.53D-10	3.34D-10	4.50D-10	4.30D-10	1.96D-11
1	4	6.90D-13	5.08D-13	6.86D-13	6.56D-13	2.99D-14
1	5	1.75D-15	1.92D-15	1.12D-15	1.07D-15	4.87D-17
2	1	1.24D-09	9.13D-10	1.18D-09	1.18D-09	1.77D-13
2	2	1.71D-15	2.38D-15	4.20D-18	4.20D-18	6.26D-22
3	1	3.01D-15	4.55D-15	1.44D-20	1.44D-20	1.46D-29
n	N	$k^2=63/64$ Errors on Calculation		$k^2=63/64$ Error Estimation of Integral Parts		
		Error 1	Error 2	Total Error	Error-F	Error-E
1	1	3.82D-09	3.73D-09	3.81D-09	3.81D-09	3.93D-12
1	2	2.43D-15	3.47D-15	1.85D-15	1.85D-15	1.91D-18
2	1	2.14D-15	2.81D-15	3.58D-21	3.58D-21	6.98D-30

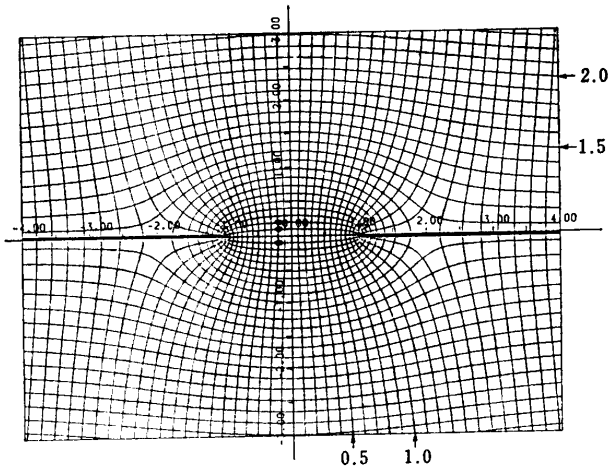


図6 $E(z, k)$ の実部, 虚部の等高線図
($k=0.5$, $E(1, 0.5)=1.46746221$)

Fig. 6 Constant contours for real and imaginary parts of $E(z, k)$.

この表から $|z| \gg 1$ のときは $E(z, k)$ は kz に接近していくことがわかる。これが $|z| > 1$ では相対誤差で誤差を評価した理由である。

表4に誤差の事前評価と実際の誤差の関係を示す。これは単位円内 $|z| \leq 1$ における最大絶対誤差評価である。Error-F は(3.8)の $F(z_n, k_n)$ によって生じる誤差, Error-E は(3.8)の $E(z_n, k_n)$ の積分項から生じる誤差である。これらの誤差の和 Total Error が全体の誤差 Error 1 の主要項である。実際の誤差と事前誤差評価がよく一致しており, Landen 変換の回数が増えると(4.35)にも示すごとく Error-E は Error-F に比べて急激に小さくなっていくのがわかる。

図6に $E(z, k)$, $k=1/2$ の場合の実部・虚部の等高線図を示す。等高線間隔は0.1, mesh 数は 200×150 (mesh 幅は0.02)。数値計算は Landen 変換3回, 積分則標本点数は1点で行い, これを図化したものである。 $|z| \gg 1$ で $E(z, k)$ が kz に接近していくのが, 等高線図からわかる。

6. むすび

上昇複素 Landen 変換を用いて第2種不完全複素楕円積分を全域一様近似する方法を示した。また, こ

れが数値計算法としても有効かつ実用的であることを実証した。

この方法は第2種不完全複素楕円積分を1次式と定積分項の和によって表現すること, 上昇 Landen 変換により定積分項の積分区間の端点の代数的特異性を解消し対数特異点を新たな積分区間から離すこと, 定積分項へ Gauss-Chebyshev 積分則を適用しその誤差解析をすることによって得られたものである。

謝辞 本研究は著者が文部省内地研究員として名古屋大学工学部情報工学専攻に滞在中になされたものである。この機会を与えていただいた二宮市三教授に厚くお礼申し上げる。また本研究をすすめるに当たって, 始終討論していただいた鳥居達生助教授, 杉浦洋助手に感謝する。数値計算は, 杉浦氏に負っていることを付記する。

参考文献

- 1) 久原秀夫, 鳥居達生, 杉浦 洋: 第1種不完全複素楕円積分の全域かつ一様近似, 情報処理学会論文誌, Vol. 25, No. 5, pp. 712-720 (1984).
- 2) 久原秀夫, 鳥居達生, 杉浦 洋: 第1種不完全複素楕円積分の全域かつ一様近似(II), 情報処理学会論文誌, Vol. 25, No. 6, pp. 1080-1088(1984).
- 3) Byrd, P.F. and Friedman, M.D.: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, p. 39, Springer-Verlag, Berlin (1954).
- 4) Tölke, F.: *Praktische Funktionenlehre*, Zweiter Band, p. 92, Springer-Verlag, Berlin (1966).
- 5) Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, pp. 889-890, Dover Pub., Inc., New York (1970).
- 6) 久原秀夫: 複素楕円積分の静電場の解釈と対数関数による大域的近似法, 電気学会・電磁界理論研究会資料, EMT-82-1 (1982).
- 7) 二宮市三: 第1種及び第2種不完全楕円積分; ライブラリー・プログラム利用の手引(数値計算編), 名古屋大学大型計算機センター (1982).
- 8) 森 正武: 数値解析と複素関数論, 筑摩書房, 東京 (1975).

(昭和59年3月21日受付)

(昭和59年7月19日採録)