Vol. 26 No. 2 情報処理学会論文誌 Mar. 1985

ガウスの消去法における枢軸と情報落ち誤差†

布 広 永 示†† 平 野 菅 保††

浮動小数点演算を用いて，数十万元の連立1次方程式をガウスの消去法で解くことを考える．一般に，消去計算の途中で枢軸の値が桁落ちをした場合，枢軸選択を行うことが好ましいとされている．しかし，数十万元の連立1次方程式に対して，枢軸選択を行うのは容易ではない．そこで，枢軸選択をする代りに，桁落ちをした枢軸の値を絶対値が適当に大きな値で置き換える方法を提案する．この方法によれば，桁落ちをした枢軸の値をそのまま用いて消去計算を行った場合よりも数値解の精度は悪くならず，かえって精度の向上がみられる．

1. はじめに

浮動小数点演算を用いて n 元連立1次方程式をガウスの消去法で解いていく途中で，枢軸の値が桁落ちをして他の要素と比べて絶対値が桁違いに小さくなった場合を考える．このとき，その枢軸の値をそのまま用いて消去計算を行ったのでは，その後の消去計算で他の要素がもっている情報を落としてしまい，得られる数値解の精度が悪くなってしまう．そこで，枢軸選択の必要性が生じる．

数十万元の連立1次方程式を解くには，外部記憶を利用する．しかし，外部記憶に記憶する行列要素の記憶順序が連立1次方程式の行あるいは列の順序ではなく，消去計算に都合のよい，つまり計算速度を考慮した順序である．このため，消去計算の途中で行や列の入れ換えを行うのは容易ではない．

そこで，枢軸選択を行わず，情報落ちを防ぐ方法，すなわち“桁落ちをした枢軸の値を，その枢軸の値の絶対値より絶対値が大きい値に置き換えて消去計算を行う方法”について考察する．とくに，同じ係数行列をもつ n 元連立1次方程式において，情報落ちを防ぐために枢軸の値を置き換えたことによる誤差の数値解への影響と，情報落ちによる誤差の数値解への影響を詳細に調べた．その結果，桁落ちをしている枢軸の値をそのまま用いて消去計算を行って得られた数値解と比較して，ここで提案する方法によって得られた数値解に精度の向上がみられる要因がわかった．

† Pivots and Information Loss Errors in Gauss Elimination Method by EIZI NUNOHIRO and SUGAYASU HIRANO (Department of Mathematical Engineering, The College of Industrial Technology, Nihon University).

†† 日本大学生産工学部数理工学科

2. 枢軸として採用する値

n 元連立1次方程式

$$\begin{aligned}
&a_{11}^{(0)}\cdot x_1+a_{12}^{(0)}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}^{(0)}\cdot x_n=b_1^{(0)}\\
&a_{21}^{(0)}\cdot x_1+a_{22}^{(0)}\cdot x_2+\cdots+a_{2n}^{(0)}\cdot x_n=b_2^{(0)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}^{(0)}\cdot x_1+a_{n2}^{(0)}\cdot x_2+\cdots+a_{nn}^{(0)}\cdot x_n=b_n^{(0)}
\end{aligned} \tag{1}$$

をガウスの消去法で解いていく途中で枢軸の値が桁落ちをしたとする．その桁落ちをした枢軸 $\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)}$:

$$|\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)}|\ll|a_{ij}^{(k)}| \tag{2}$$

$$\left(\begin{array}{l}
i=k+1\qquad\qquad ;\ j=(k+2),\cdots,n\\
i=(k+2),\cdots,n;\ j=(k+1),\cdots,n\\
\qquad k:\text{消去段階の回数}-1
\end{array}\right)$$

を用い，次の消去計算

$$a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-a_{i,k+1}^{(k)}\cdot a_{k+1,j}^{(k)}/\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)} \tag{3}$$

$$b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-a_{i,k+1}^{(k)}\cdot b_{k+1}^{(k)}/\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)} \tag{4}$$

$$\left(\begin{array}{l}
i=(k+2),\cdots,n;\ j=(k+2),\cdots,n\\
\qquad k:\text{消去段階の回数}-1
\end{array}\right)$$

を行うと，(3)，(4)の右辺の第1項 $a_{ij}^{(k)}, b_i^{(k)}$ の絶対値に比べて，第2項 $a_{i,k+1}^{(k)}\cdot a_{k+1,j}^{(k)}/\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)}$, $a_{i,k+1}^{(k)}\cdot b_{k+1}^{(k)}/\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)}$ の絶対値が桁違いに大きくなる．

そこで，枢軸 $\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)}$ を，その枢軸の値の絶対値より絶対値が大きい値に置き換えて，(3)，(4)の右辺の第2項の絶対値を小さくすることにより，第1項の情報で，$a_{ij}^{(k+1)}, b_i^{(k+1)}$ に伝わらずに落ちる情報を小さくする方法を考える．

このとき，枢軸 $\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)}$ の代りに次の枢軸を用いる．

$$\begin{aligned}
&|\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)}|\geqq 10^{-l+\alpha}\ \text{なら，}\ \varepsilon'^{(k)}_{k+1,k+1}=\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)}\\
&|\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)}|<10^{-l+\alpha}\ \text{なら，}\ \varepsilon'^{(k)}_{k+1,k+1}=10^{-l+\alpha}
\end{aligned} \tag{5}$$

l: 計算桁数

a: 枢軸として採用する値の大きさを決める値．

枢軸(5)を用いることによって，(3)，(4)は

$$a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-a_{i,k+1}^{(k)}\cdot a_{k+1,j}^{(k)}/\varepsilon'^{(k)}_{k+1,k+1} \tag{6}$$

$$b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-a_{i,k+1}^{(k)}\cdot b_{k+1}^{(k)}/\varepsilon_{k+1,k+1}^{(k)} \quad (7)$$

となる.

3. 枢軸の値を置き換えたことによる誤差と誤差の消失

この章では，丸め誤差については考慮せず，枢軸の値を置き換えたことによる誤差の解におよぼす影響を考察する.

n 元連立1次方程式(1)において，1段階の消去計算で枢軸の値が桁落ちをして，

$$\begin{aligned} x_1+a_{12}^{(1)}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}^{(1)}\cdot x_n&=b_1^{(1)}\\ \varepsilon_{22}^{(1)}\cdot x_2+\cdots+a_{2n}^{(1)}\cdot x_n&=b_2^{(1)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a_{n2}^{(1)}\cdot x_2+\cdots+a_{nn}^{(1)}\cdot x_n&=b_n^{(1)} \end{aligned} \quad (8)$$

が得られたとする.

ここで，

$$|\varepsilon_{22}^{(1)}|\ll|a_{ij}^{(1)}| \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} i=2 & ;\ j=3,\cdots,n\\ i=3,\cdots,n\ ; & j=2,\cdots,n \end{pmatrix}.$$

このとき，枢軸 $\varepsilon_{22}^{(1)}$ の代りに次の枢軸を用いる.

$$\begin{aligned} &|\varepsilon_{22}^{(1)}|\geqq 10^{-t+\alpha}\ \text{なら，}\ \varepsilon_{22}^{(1)\prime}=\varepsilon_{22}^{(1)}\\ &|\varepsilon_{22}^{(1)}|<10^{-t+\alpha}\ \text{なら，}\ \varepsilon_{22}^{(1)\prime}=10^{-t+\alpha}. \end{aligned} \quad (10)$$

これは，枢軸 $\varepsilon_{22}^{(1)}$ に対して $\varepsilon_{22}^{(1)\prime}-\varepsilon_{22}^{(1)}$ を加えたことになる．すなわち(1)の第2式を，

$$a_{21}^{(0)}\cdot x_1+a_{22}^{(0)\prime}\cdot x_2+\cdots+a_{2n}^{(0)}\cdot x_n=b_2^{(0)} \quad (11)$$

$$a_{22}^{(0)\prime}=a_{22}^{(0)}+(\varepsilon_{22}^{(1)\prime}-\varepsilon_{22}^{(1)})$$

としたことになる.

したがって，n 元連立1次方程式

$$\begin{aligned} a_{11}^{(0)}\cdot x_{p1}+a_{12}^{(0)}\cdot x_{p2}+\cdots+a_{1n}^{(0)}\cdot x_{pn}&=b_1^{(0)}\\ a_{21}^{(0)}\cdot x_{p1}+a_{22}^{(0)\prime}\cdot x_{p2}+\cdots+a_{2n}^{(0)}\cdot x_{pn}&=b_2^{(0)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a_{n1}^{(0)}\cdot x_{p1}+a_{n2}^{(0)}\cdot x_{p2}+\cdots+a_{nn}^{(0)}\cdot x_{pn}&=b_n^{(0)} \end{aligned} \quad (12)$$

の解 $x_{pj}\ (j=1,\cdots,n)$ を求めることになる.

そこで，(12)の解 x_{pj} と(1)の解 x_j との関係を調べる.

(12)は，1段階の消去計算によって，

$$\begin{aligned} x_{p1}+a_{12}^{(1)}\cdot x_{p2}+\cdots+a_{1n}^{(1)}\cdot x_{pn}&=b_1^{(1)}\\ \varepsilon_{22}^{(1)\prime}\cdot x_{p2}+\cdots+a_{2n}^{(1)}\cdot x_{pn}&=b_2^{(1)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a_{n2}^{(1)}\cdot x_{p2}+\cdots+a_{nn}^{(1)}\cdot x_{pn}&=b_n^{(1)} \end{aligned} \quad (13)$$

となる.

(8)の右辺と(13)の右辺が等しいことにより，(13)は，

$$\begin{aligned} &x_{p1}+a_{12}^{(1)}\cdot x_{p2}+\cdots+a_{1n}^{(1)}\cdot x_{pn}\\ &\quad=x_1+a_{12}^{(1)}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}^{(1)}\cdot x_n\\ &\varepsilon_{22}^{(1)\prime}\cdot x_{p2}+\cdots+a_{2n}^{(1)}\cdot x_{pn}\\ &\quad=\varepsilon_{22}^{(1)}\cdot x_2+\cdots+a_{2n}^{(1)}\cdot x_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{n2}^{(1)}\cdot x_{p2}+\cdots+a_{nn}^{(1)}\cdot x_{pn}\\ &\quad=a_{n2}^{(1)}\cdot x_2+\cdots+a_{nn}^{(1)}\cdot x_n \end{aligned} \quad (14)$$

と表すことができる.

こうして，(12)の解 x_{pj} は形式的に，

$$x_{p1}=\frac{B\cdot x_1+M_1\cdot x_2}{B} \quad (15)$$

$$x_{p2}=\frac{A_2\cdot x_2}{B} \quad (16)$$

$$x_{pj}=\frac{B\cdot x_j+A_j\cdot x_2}{B} \quad (j=3,\cdots,n) \quad (17)$$

と表される.

ここで，$M_1, A_l\ (l=2,\cdots,n)$，B は，

$$M_1=(\varepsilon_{22}^{(1)\prime}-\varepsilon_{22}^{(1)})\cdot\begin{vmatrix} a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)}\\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} \quad (18)$$

$$A_2=\begin{vmatrix} \varepsilon_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)}\\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$A_l=(-1)^{l-1}\cdot(\varepsilon_{22}^{(1)\prime}-\varepsilon_{22}^{(1)})\cdot\begin{vmatrix} a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3,l-1}^{(1)} & a_{3,l+1}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)}\\ a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & \cdots & a_{4,l-1}^{(1)} & a_{4,l+1}^{(1)} & \cdots & a_{4n}^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{n,l-1}^{(1)} & a_{n,l+1}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}$$

$$(l=3,\cdots,n) \quad (20)$$

$$B=\begin{vmatrix} \varepsilon_{22}^{(1)\prime} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)}\\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} \quad (21)$$

である.

(15)，(17)において，(1)の解 x_2 の絶対値が他の解 $x_j\ (j=1,3,\cdots,n)$ の絶対値に比べて桁違いに小さな場合は，(15)，(17)の分子の第1項 $B\cdot x_1, B\cdot x_j\ (j=3,\cdots,n)$ と第2項 $M_1\cdot x_2, A_j\cdot x_2\ (j=3,\cdots,n)$ の関係は，

$$\begin{aligned} &|B\cdot x_1|\gg|M_1\cdot x_2|\\ &|B\cdot x_j|\gg|A_j\cdot x_2| \quad (j=3,\cdots,n) \end{aligned} \quad (22)$$

となる．このため，(15)，(17)の分子の計算において，

第2項はほとんど影響を与えない．つまり，

$$x_{p1} \fallingdotseq \frac{B \cdot x_1}{B} \quad (23)$$

$$x_{pj} \fallingdotseq \frac{B \cdot x_j}{B} \quad (j=3, \cdots, n) \quad (24)$$

となる．したがって，この場合には，枢軸 $\varepsilon_{22}^{(1)\prime}$ を置き換えたことによる誤差は消失して，

$$x_{p1} \fallingdotseq x_1 \quad (25)$$

$$x_{pj} \fallingdotseq x_j \quad (j=3, \cdots, n) \quad (26)$$

を得る．

逆に，(15)，(17)において，(1)の解 x_2 の絶対値が他の解 $x_j\,(j=1, 3, \cdots, n)$ の絶対値に比べて大きな場合は，前に述べたことは起きず，(12)の解 $x_{pj}\,(j=1, 3, \cdots, n)$ と(1)の解 $x_j\,(j=1, 3, \cdots, n)$ との差は大きくなる．

(16)においては，枢軸 $\varepsilon_{22}^{(1)\prime}$ を置き換えたことによる誤差は消失せず，

$$B \not\fallingdotseq A_2 \quad (27)$$

となる．このため，(12)の解 x_{p2} と(1)の解 x_2 とは明らかに異なる．

この章では，枢軸の値を置き換えたことによる誤差の解におよぼす影響を調べたわけであるが，次の章において，枢軸の値を置き換えたことによる誤差と情報落ちによる誤差との関係を述べる．

4. 枢軸の値を置き換えたことによる誤差と情報落ちによる誤差

情報落ちについては文献3)で述べられているが，

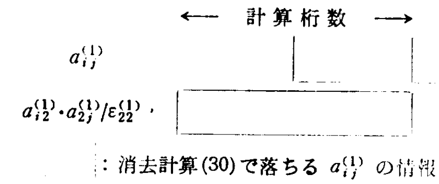

図1 10進10桁計算で，消去計算(30)において $\varepsilon_{22}^{(1)\prime}=10^{-10+\alpha}$ としたときの情報落ち

Fig. 1 Loss of effective information about $a_{ij}^{(1)}$ in (30), where $\varepsilon_{22}^{(1)\prime}=10^{-10+\alpha}$ and 10 decimal digits.

この章では，枢軸として採用する値の大きさを決める α の値を変えることによって，情報落ちによる誤差の影響する桁数の変化を計算例で示す．

消去計算

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot a_{2j}^{(1)} / \varepsilon_{22}^{(1)} \quad (28)$$

$$(i=3, \cdots, n\,;\ j=3, \cdots, n)$$

において，(10)より枢軸 $\varepsilon_{22}^{(1)}$ の代りに

$$\varepsilon_{22}^{(1)\prime} = 10^{-l+\alpha} \quad (29)$$

l：計算桁数

α：枢軸として採用する値の大きさを決める値

を枢軸とすると，(28)は，

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot a_{2j}^{(1)} / \varepsilon_{22}^{(1)\prime} \quad (30)$$

$$(i=3, \cdots, n\,;\ j=3, \cdots, n)$$

となる．

(30)において，α の値を大きくし，右辺の第2項 $a_{i2}^{(1)} \cdot a_{2j}^{(1)} / \varepsilon_{22}^{(1)\prime}$ の絶対値を小さくすれば，右辺の第1項 $a_{ij}^{(1)}$ の情報で $a_{ij}^{(2)}$ に伝わらずに落ちる情報は小さくなる（**図1**参照）．

計算例として，係数行列

$$a_{ij}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.117053000 & 2.121100000 & 1.320000000 & 2.750000000 \\ 2.121100000 & 2.125154737 & 2.800000000 & 1.450000000 \\ 1.320000000 & 2.800000000 & 1.000000000 & 1.800000000 \\ 2.750000000 & 1.450000000 & 1.800000000 & 1.000000000 \end{bmatrix} \quad (31)$$

をもつ4元連立1次方程式を，解を三つの場合に分類して挙げる．

また，係数行列(31)の条件数は，

$$\|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 1.221269716 \quad (32)$$

であり，係数行列(31)は良条件である．

i) $|x_2| \fallingdotseq |x_1| \fallingdotseq |x_3| \fallingdotseq |x_4|$

$$\begin{array}{llll} x_1= & 1.414213562 & b_1^{(0)}= & 6.925633039 \\ x_2= & 1.732050808 & b_2^{(0)}= & 13.42641413 \\ x_3= & 3.141592654 & b_3^{(0)}= & 7.312512405 \\ x_4= & -1.414213562 & b_4^{(0)}= & 10.64121418 \end{array} \quad (33)$$

ii) $|x_2| \gg |x_1| \fallingdotseq |x_3| \fallingdotseq |x_4|$

$$\begin{array}{llll} x_1= & 1.414213562 & b_1^{(0)}= & 367388.5486 \\ x_2= & 173205.0808 & b_2^{(0)}= & 368097.3434 \\ x_3= & 3.141592654 & b_3^{(0)}= & 484976.6889 \\ x_4= & -1.414213562 & b_4^{(0)}= & 251155.4968 \end{array} \quad (34)$$

iii) $|x_2| \ll |x_1| \fallingdotseq |x_3| \fallingdotseq |x_4|$

$$\begin{array}{llll} x_1= & 1.414213562 & b_1^{(0)}= & 3.251780071 \\ x_2= & 0.0000000001732050808 & b_2^{(0)}= & 9.745538150 \\ x_3= & 3.141592654 & b_3^{(0)}= & 2.462770144 \\ x_4= & -1.414213562 & b_4^{(0)}= & 8.129740511 \end{array} \quad (35)$$

表 1　(33)の数値解
Table 1　Numerical solutions of (33).

$\bar{x}_{pj}$	α		
	5	6	7
$\bar{x}_{p1}$	1.413859604	1.414283984	1.415011005
$\bar{x}_{p2}$	1.731900000	1.732020000	1.732212000
$\bar{x}_{p3}$	3.141825628	3.141491443	3.140311384
$\bar{x}_{p4}$	−1.413936580	−1.414195432	−1.414336783

表 2　(34)の数値解
Table 2　Numerical solutions of (34).

$\bar{x}_{pj}$	α		
	2	3	4
$\bar{x}_{p1}$	1.146600000	1.405100000	1.492800000
$\bar{x}_{p2}$	173205.2000	173205.1500	173205.0970
$\bar{x}_{p3}$	3.211370752	3.104397735	3.013828193
$\bar{x}_{p4}$	−1.333333333	−1.442477876	−1.425569177

表 3　(35)の数値解
Table 3　Numerical solutions of (35).

$\bar{x}_{pj}$	α		
	5	7	10
$\bar{x}_{p1}$	1.413905917	1.414212320	1.414213556
$\bar{x}_{p2}$	0.0002000000000	0.000008000000000	−0.000000001000000000
$\bar{x}_{p3}$	3.141643878	3.141589413	3.141592655
$\bar{x}_{p4}$	−1.414155571	−1.414217217	−1.414213554

この三つの4元連立1次方程式をガウスの消去法で解いていくと，1段階の消去計算で枢軸の値が桁落ちをして，他の要素と比べて絶対値が桁違いに小さくなる．そこで枢軸を

$$\varepsilon_{22}^{(1)\prime}=10^{-l+\alpha} \tag{36}$$

として，その後の消去計算を行った．

計算結果を**表1，2，3**に示す．計算は，10進10桁である．下線で誤差を含んでいる桁を示す．解 x_3 の場合を例として，枢軸の値を置き換えたことによる誤差と情報落ちによる誤差との関係を**図2，3，4**に示す．

ただし，図の記号は，

△：係数行列(31)をもつ4元連立1次方程式の数値解 $\bar{x}_{p3}$ の情報落ちによる誤差

◇：係数行列(31)をもつ4元連立1次方程式の数値解 $\bar{x}_{p3}$ の枢軸の値を置き換えたことによる誤差

□：係数行列(31)をもつ4元連立1次方程式の数値解 $\bar{x}_{p3}$ の誤差

である．

枢軸 $\varepsilon_{22}^{(1)}$ の代りに，その枢軸の値の絶対値より絶対値が大きい値を枢軸として採用することによって，情報落ちによる誤差は小さくなるので，(12)の解 x_{pj} に対応する数値解 $\bar{x}_{pj}$ の精度はよくなる．反面，枢軸の値を置き換えたことによる誤差の影響のため，(1)の解 x_j と(12)の解 x_{pj} との差は大きくなる．

次に，三つの4元連立1次方程式(33)，(34)，(35)において，枢軸の値を置き換えたことによる誤差と情報落ちによる誤差との関係を調べる．

四つの解 x_j $(j=1,\cdots,4)$ の絶対値がほぼ等しい関係にある(33)では，α の値を 1, 2, …, 5, 6 と増加するに従って，数値解 $\bar{x}_{pj}$ $(j=1,\cdots,4)$ はしだいに解 x_j に近づいてくる．しかし，α の値を6より大きくしていくと，逆に数値解 $\bar{x}_{pj}$ と解 x_j との差は大きくなる．つまり，最適な α の値は6とみなすことができる（表1，図2参照）．

解 x_2 の絶対値が他の解 x_j $(j=1,3,4)$ の絶対値に比べて桁違いに大きい関係にある(34)では，最適な α の値は3である．最適な α の値が(33)の場合と比べて小さいのは，解 x_2 の絶対値が他の解 x_j $(j=1,3,4)$ の絶対値に比べて桁違いに大きいために，枢軸の値を置き換えたことによる誤差の影響が(33)の場合と比べて大きくなったためである（表2，図3参照）．

解 x_2 の絶対値が他の解 x_j $(j=1,3,4)$ の絶対値に比べて桁違いに小さい関係にある(35)では，最適な α の値は10である．これは，解 x_2 の絶対値が他の解 x_j $(j=1,3,4)$ の絶対値に比べて桁違いに小さいために，枢軸の値を置き換えたことによる誤差の影響が(33)の場合と比べて小さくなったためである（表3，図4参照）．

このように，数値解 $\bar{x}_{pj}$ $(j=1,\cdots,4)$ の精度が最もよいときの α の値は，(33)の場合 $\alpha=6$，(34)の場合 $\alpha=3$，そして(35)の場合 $\alpha=10$ となり，解 x_2 の絶

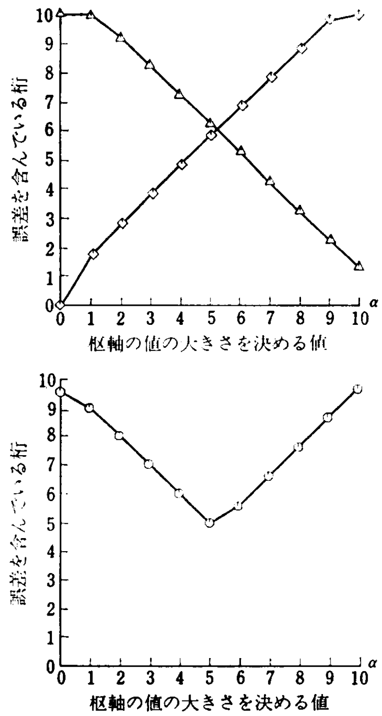

図 2 (33)の数値解 $\bar{x}_{p3}$ の誤差
Fig. 2 Errors of $\bar{x}_{p3}$; the numerical solution of (33).

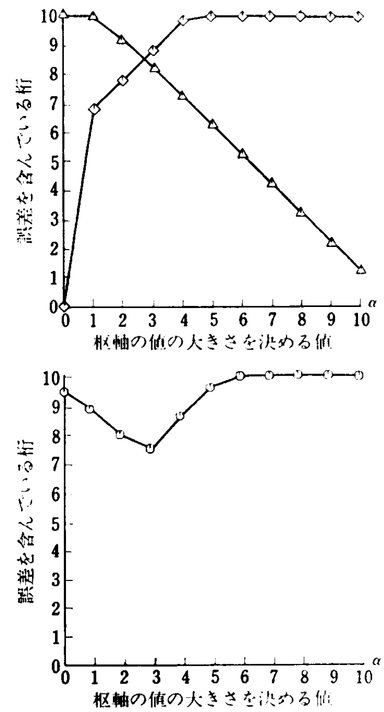

図 3 (34)の数値解 $\bar{x}_{p3}$ の誤差
Fig. 3 Errors of $\bar{x}_{p3}$; the numerical solution of (34).

対値の大きさによって異なる.

しかし, (33), (34), (35)いずれの場合においても, 桁落ちをして絶対値が他の要素の絶対値と比べて桁違いに小さくなった枢軸 $\varepsilon_{22}^{(1)}$ に対して, 計算桁のほぼ 1/2 の桁に値を加えることによって, 絶対値最大の解 $x_{\max}$ に対する数値解 $\bar{x}_{p\max}$ は, 計算桁のほぼ 1/2 の精度をもつ (表1, 表2, 表3参照). ここで, $x_{\max}$ は, (33)の場合 $x_{\max}=x_3$, (34)の場合 $x_{\max}=x_2$, そして(35)の場合 $x_{\max}=x_3$ である. そして, 絶対値最大の解 $x_{\max}$ 以外の解 $x_j\,(j=1,\cdots,4\,;\,j\neq\max)$ に対する数値解 $\bar{x}_{pj}$ の精度は, 数値解 $\bar{x}_{pj}$ で誤差を含んでいる桁が, 数値解 $\bar{x}_{p\max}$ で誤差を含んでいる桁とほぼ同じ大きさの位の桁からであることから推定することができる.

それに対し, 枢軸 $\varepsilon_{22}^{(1)}$ に対して, 計算桁のほぼ 1/2 の桁より上位の桁あるいは下位の桁に値を加えた場合, 絶対値最大の解 $x_{\max}$ に対する数値解 $\bar{x}_{p\max}$ の精度は, 解 x_2 の絶対値の大きさによって異なり, また, 数値解 $\bar{x}_{p\max}$ 以外の数値解 $\bar{x}_{pj}$ の精度も, 同様に異なる.

実際に n 元連立1次方程式を解く場合, 解 $x_j\,(j=1,\cdots,n)$ の絶対値の大小関係はわからない.

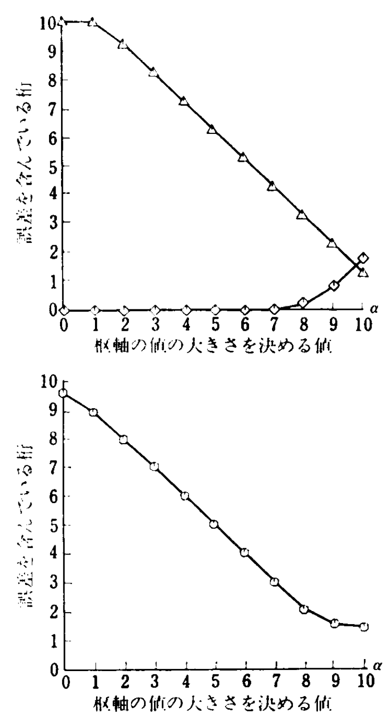

図 4 (35)の数値解 $\bar{x}_{p3}$ の誤差
Fig. 4 Errors of $\bar{x}_{p3}$; the numerical solution of (35).

すなわち，以上の考察により，実際に n 元連立1次方程式を解く場合における最適な α の値は，$\alpha=l/2$ である．

5. おわりに

本論文では，桁落ちをした枢軸の値を，その枢軸の値の絶対値より絶対値が大きい値に置き換えることにより，枢軸選択を行わないガウスの消去法について考察した．その結果，桁落ちをした枢軸の値をそのまま用いて消去計算を行った場合よりも，数値解の精度は悪化することはなく，かえって向上のみられることがわかった．

また，さらに精度のよい数値解を得ることを考えるならば，ガウスの消去法における反復計算を行うことによって，数値解の補正[5),6)]を行えばよい．

参考文献

1) 一松　信，戸川隼人(編)：数値計算の誤差(bit), pp. 27-32, 共立出版，東京 (1975).
2) 戸川隼人：マトリクスの数値計算，オーム社，東京 (1971).
3) 宇野利雄：計算機のための数値計算，朝倉書店，東京 (1963).
4) 平野菅保他：コンピュータによる構造工学講座 II-1-A，計算技術および数値計算法，培風館，東京 (1971).
5) Wilkinson, J. H.(一松　信，四条忠雄共訳)：基本的演算における丸め誤差解析，培風館，東京 (1974).
6) McCalla, T. R.(三浦　功，田尾陽一共訳)：計算機のための数値計算法概論，サイエンス社，東京 (1972).
7) 平野菅保，布広永示：解の誤差と絶対値の小さい枢軸に導入する誤差，応用数学シンポジウム (1982).

(昭和59年2月9日受付)
(昭和59年10月18日採録)