

クラスごとに異なるサービス要求率をもつ FIFO ノードを含む待ち行列網の近似解法†

紀 一 誠††

客のサービス要求時間がクラスごとに異なるパラメータをもつ指数分布に従い、先着順サービス規律 (FIFO) をもつようなノードを含む閉鎖型待ち行列網に関する近似解法について述べ、その近似解と厳密解との比較を行う。本近似法は、待ち行列網に関する積形式解の表現のなかには一般に平均サービス要求時間および相対訪問回数を示すパラメータは直接に現れることはなく、それらの積として定義される負荷パラメータのみが直接に現れることを利用する。積形式条件を満足しない非積形式型の FIFO ノードに代えて、フィードバックループをもつ積形式型の FIFO ノードを網に接続し全体を積形式解をもつようにし、これを解くことにより近似解を得るものである。その際に負荷が等価となるようにフィードバックループの回数を増減し調整を行う。本稿の近似法の最大の利点はその簡便性にある。近似計算に際しては、積形式解をもつ待ち行列網を解くための通常の計算メカニズムのみを必要とし、特別な計算メカニズムを付加する必要はない。本近似法では、非積形式 FIFO ノードは何個存在してもよく、またおのおのはマルチサーバであってもよい。本稿の方法は、各クラスの客のサービス要求率を表すパラメータの値が相互に近いほどよい近似値が得られ、それらが互いに等しいときには厳密解に一致する。

1. はじめに

計算機システムの定量的な性能評価を的確に、また迅速に実行できる有力な方法として待ち行列網モデルによる方法が提唱されてからすでに久しい。

待ち行列網モデルが計算機システムの性能評価のためのモデルとして実用化されるに至った一つの原因は、1975年 Baskett *et al.*¹⁾ による積形式解をもつ待ち行列網の範囲の拡大にあったと思われる。この待ち行列網は現在では BCMP 型待ち行列網とよびならわされ、性能評価のための基礎をなす待ち行列網モデルとなっている。また、BCMP 網が実用に供されるに至ったもう一つの原因は、Reiser and Kobayashi²⁾ によるたたみこみ型の計算法の提案であった。この計算法によって実用規模の待ち行列網の計算が可能になり、待ち行列網モデルの実用化時代の端緒が開かれた。それ以降、積形式解が成り立つための条件や網のさまざまな性質に関する研究、効率のよい計算アルゴリズムに関する研究、積形式解が成り立たないような網に関する近似解法の研究等数多くの研究が続けられてきている。さらには、これらの研究成果を盛り込んだ待ち行列網モデルに基礎を置く性能評価用のソフトウェアパッケージの開発も数多く報告されており、ま

た商用化されているものも多く、国内では PERFORMS³⁾ が知られている。

積形式解は美しく扱いやすい形をしているが、現実のシステムのモデル化に際しては必ずしもつねに積形式解の得られる条件が満足されているとは限らない。たとえば、優先権付き制御をするノードを含む網、ブロッキングの発生する網、パッシブサーバを含む網等がそれである。

さらには、先着順制御 (FIFO: First In First Out) を行うノードにおいて、客のサービス要求時間がそれぞれ客のクラスごとに異なるパラメータをもつ指数分布に従うような場合にもこの網の平衡状態確率は積形式には表現されないことが知られている。ここで、客のクラスとは客の網内移動経路を確率的に指定する推移確率行列 (部分連鎖) に対応するものとする。

この種の FIFO ノードはクラスごとに異なるサービス要求時間をもつ客を等優先度で処理をする機器のモデルとして応用上しばしば現れ重要である。本稿ではこのような FIFO ノードを含む待ち行列網の近似解法について示す。

積形式解をもたない待ち行列網に関する近似解法はパラメトリックアナリシス⁴⁾ をはじめとし数多くの方法が提案されているが、本稿で扱うような FIFO ノードを含む網を直接扱った文献は少ない。最近、山本・西垣によってセントラルサーバモデルを例にとり興味深い方法が提案された⁵⁾。この方法によると、積形式解の成立を防げる原因となる FIFO 制御ノードを、

† An Approximate Method for Queueing Networks Including FIFO Nodes with Chain Dependent Means of Service Demands by ISSEI KINO (C&C Systems Research Laboratories, NEC Corporation).

†† 日本電気(株) C&C システム研究所

そのノードを訪問する客のクラスに対応する pseudo サーバ群に分割することによって全体を積形式解をもつ待ち行列網として解くものである。この方法では分割された各 pseudo サーバの平均サービス時間の求め方が要点となる。文献5)では、あるクラスの客が FIFO ノードに到着した時点で出会うこのノードの状態は、近似モデルにおいてそのクラスの客が到着時点で出会う pseudo サーバ群の状態に等しい、という仮定を設け、これから導かれる非線型の連立方程式を2分探索法によって解くことにより平均サービス時間を求める方法を探っている。

本稿の方法は、積形式条件を満足しない FIFO ノードを pseudo サーバ群に分解するのではなく、フィードバックループをもつ積形式型のノードに置き換えることによって全体を積形式解をもつ待ち行列網として解く近似法である。本近似法では、この非積形式型の FIFO ノードが網内に何個あってもよく、またそれらはマルチサーバノードであってもよい。本稿の近似法の最大の特長は簡便であることである。近似計算に際しては、積形式解をもつ待ち行列網を解くための通常の計算メカニズムのみを必要とし、それ以外の付加的な計算メカニズムは何も必要としない。

次章に対象とするモデルを定義し、3章に本近似法の考え方を示す。4章に近似計算法を示す。5章に簡単なモデルについて計算された厳密解と本方法で得られた近似解との比較を行う。

2. モデル

N 個のノードから構成される網を考える。これらのノードは非積形式ノード群と積形式ノード群に分類できるものとし、積形式ノードのノード番号の集合を Q_P 、非積形式ノード番号の集合を Q_N とする。ここに、積形式ノードとは網の平衡状態確率が積形式に表現されるために網を構成する各ノードが満たさなければならない条件を満足しているノードのことをいい、非積形式ノードとはその条件を満たさないノードのことをいうものとする。積形式ノードと非積形式ノードの混在する網の平衡状態確率は当然ながら積形式に表現することはできない。図1にモデルの概念図を示す。

客のノード間推移経路を確率的に表現する推移確率行列を $P_m = \{p_{m,i,j}\}$, $m=1, 2, \dots, L$ とし、部分連鎖 m とよぶことにする。ここに、 $p_{m,i,j}$ は部分連鎖 m に従い網内を移動する客がノード i でのサービスの終

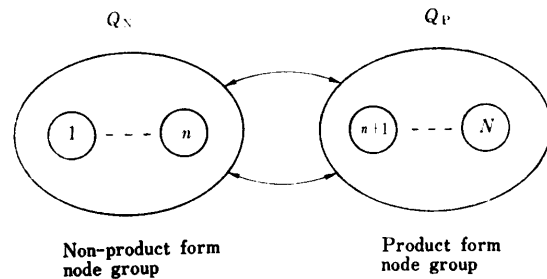


図1 積形式ノード群と非積形式ノード群からなる待ち行列網モデル

Fig. 1 Network model with product form node group and nonproduct form group.

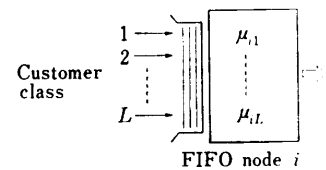


図2 先着順制御ノードモデル

Fig. 2 FIFO node model.

了後にノード j に移る確率とする。本稿では記述の簡単化のために L 個の部分連鎖はすべて閉鎖型であるとする。客数ベクトルを $K=(K_1, K_2, \dots, K_L)$ とする。また、部分連鎖 m に従って網内を移動する客のことをクラス m の客ということにし、クラス m の客がノード $i, i \in Q_P$ 、で要求するサービス時間は平均 $1/\mu_{im}$ でそのラプラス変換が有理形になるような分布に従うものとする。本稿ではすべての非積形式ノードは FIFO 制御を行うノードであると仮定する。さらに、ノード $i, i \in Q_N$ 、においてクラス m の客が要求するサービス時間はパラメータ μ_{im} をもつ指数分布に従うものとし、サーバ数は M_i とする。概念図を図2に示す。

クラス m の客のノード i への相対訪問回数を θ_{im} とし、 $\theta_m=(\theta_{1m}, \theta_{2m}, \dots, \theta_{Nm})$ とすれば、この相対訪問回数は次の連立方程式の解として定まる。

$$\theta_m = \theta_m P_m, \quad m=1, 2, \dots, L \quad (2.1)$$

ノード i においてクラス m の客からかかる負荷 ρ_{im} を次のように定義する。

$$\rho_{im} = \theta_{im} / \mu_{im}, \quad i=1, \dots, N, m=1, \dots, L. \quad (2.2)$$

また、負荷ベクトルを $\rho_i=(\rho_{i1}, \rho_{i2}, \dots, \rho_{iL})$, $i=1, 2, \dots, N$ 、とする。さらに、本稿ではベクトルに関する次の表記法を定義しておく。

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{x}| &= x_1 + x_2 + \dots + x_L \\ \mathbf{x}! &= x_1! x_2! \dots x_L! \\ \mathbf{a}^{\mathbf{x}} &= a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_L^{x_L} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

ただし, x, a はそれぞれ L 次元ベクトルとする.

本稿の近似法をより一般の混合型の網や, 客が選択しうるサービス要求時間分布の種類がノードに複数個存在するような網に拡張することは容易である.

3. 近似法の考え方

前章に定義された待ち行列網モデルは非積形式ノード群を含んでいるためにその平衡状態確率は積形式には表現されない. この待ち行列網を構成するノードのなかの非積形式ノードだけを何らかの方法によって似たようなふるまいをする積形式ノードに置き換えることができたとすれば, この網は積形式ノードのみから構成され, その積形式解を計算することにより元の網に関する近似解が得られたことになるであろう.

対象とする FIFO ノードがシングルサーバノードである場合には, 最も簡単な近似法は μ_1, \dots, μ_L をそのままとして PS ノードに置き換えて近似することである. しかし, PS ノードは本質的にシングルサーバであるので, この近似法が使えるのは FIFO ノードがシングルサーバの場合に限られる. 本稿ではこの近似法を自然な形で, 複数サーバノード (一般には状態依存形のサービス率をもつノード) の場合に拡張する. しかし, サーバ数が複数である場合には, 置き換えるべき積形式ノードを PS ノードとするわけにはいかず, 別種の積形式ノードを構成することが必要になる.

本稿の近似法はこのプロセスを次のように行う.

まず次の事実に注目する. 一般に待ち行列網の平衡状態を表現する積形式表現のなかには, サービス要求率を意味するパラメータ μ_{im} や相対訪問回数を示すパラメータ θ_{im} は直接には出現しない. つねに, この二つのパラメータから (2.2) により定まる負荷を表すパラメータ ρ_{im} のみが直接に積形式表現のなかに現れる. このことを利用し, 非積形式ノード i と同一のサーバ数 M_i を実現し, かつ負荷量 $\rho_i = (\rho_{im})$ を同一に保つような積形式ノードを構成する. このノードはフィードバックループをもつ FIFO ノードとして実現される. 各クラスの客はこのノードにおいてはそのクラスに無関係に同一のパラメータ μ_i をもつ指数分布に従いサービス時間を要求するものとする. このノードを s_i とする. 図3にこのノードの概念図を示す. ノード s_i でのサービスを終了したクラス m の客は確率 r_{im} で s_i を離れ他のノードに移動し, 確率 $1-r_{im}$ をもって再び s_i の待ち行列の最後尾に並び直

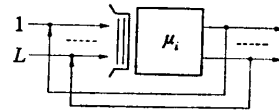


図3 フィードバックループをもつ FIFO ノード
Fig. 3 FIFO node with feedback loops.

すものとする.

また, サーバ数 M_i を実現するため, s_i はノード内客数 j に依存してサービス率が変化するシングルサーバノードとし, そのサービス率 $\mu_i(j)$ は次のように定義されるものとする.

$$\mu_i(j) = \{j, j < M_i; M_i, M_i \leq j\} \quad (3.1)$$

さらに, s_i における容量係数は次のように定義される.

$$a_i(k) = \left\{ \prod_{j=1}^k \mu_i(j) \right\}^{-1}, \quad a_i(0) = 1 \quad (3.2)$$

s_i において各クラスの客からかかる負荷量を元のノードの負荷量 ρ_i と等価に設定するために次に示すようにフィードバックループを回る回数を調整する.

s_i におけるクラス m の客に関して, フィードバックループを回る回数を含めた相対訪問回数を θ_{im}^* とする. 次の関係を満たすように θ_{im}^* を設定することによって等価な負荷量 ρ_i を実現することができる.

$$\rho_{im} = \theta_{im}^* / \mu_i, \quad m = 1, 2, \dots, L \quad (3.3)$$

分岐確率との関係は, $\theta_{im}^* = 1/r_{im}$.

以上のような方法によって構成された s_i は等価な負荷量 ρ_i をもち, サーバ数 M_i と等価な容量を実現するサービス率をもつ積形式ノードとなる.

すべての非積形式ノード i に換えて $s_i, i \in Q_N$, を接続してできる網は積形式解をもつのでこれを解くことにより近似解を得ることができる.

4. 近似計算法

すべての非積形式ノードを前章の方法で構成された積形式ノードで置き換えた結果得られる待ち行列網を Q^* とする. このとき, Q^* は積形式解をもち, 前章に示される方法によって構成された s_i に関する正規化されない状態移率 $q_i(k_i)$ は次式に表される.

$$q_i(k_i) = a_i(|k_i|) \frac{|k_i|!}{k_i!} \rho_i^{k_i} \quad (4.1)$$

ただし, $k_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{iL})$ はノード s_i に存在する各クラスの客数を要素とする状態ベクトルとし, 容量係数は (3.2) に定義されるものとする.

さらに, すべての積形式ノード $i, i \in Q_P$, に関する

正規化されない状態確率もまた同様に(4.1)に示される形に表現される。網全体に関する状態ベクトルを $\mathbf{k}=(k_1, k_2, \dots, k_N)$ とすると Q^* の平衡状態確率は次のような積形式に表現される。

$$P(\mathbf{k}) = \prod_{i=1}^N q_i(k_i) / G(\mathbf{K}) \quad (4.2)$$

ここに、 $G(\mathbf{K})$ は正規化定数で次式に与えられる。

$$G(\mathbf{K}) = \sum_{k_1 + \dots + k_N = \mathbf{K}} \prod_{i=1}^N q_i(k_i) \quad (4.3)$$

以上より $q_i(k_i), i=1, 2, \dots, N$, が定めれば(4.3)式から正規化定数 $G(\mathbf{K})$ を計算することができ、その結果を用いて状態確率(4.2)をはじめとし、待ち行列網 Q^* に関する諸々の特性量を計算することができ、所望の近似解を得ることができる。

注意すべきは、非積形式ノードに換えて網に接続するノード s_i に関する状態確率(4.1)の表現のなかには与えられた負荷量 ρ_i のみが現れているだけであり、3章で定義されたパラメータ $\theta_{im}^*, \mu_i, r_{im}$ 等は直接には現れてこない点である。すなわち、これらのパラメータは s_i を積形式ノードとして定義し解釈するために必要なパラメータであって、近似計算を実際に行う場合には現れてこないパラメータである。

以上から明らかなように、本稿の近似解法によれば与えられたパラメータの解釈を変えるだけで近似計算を実行することができるため、積形式解をもつ待ち行列網を解くための通常の計算メカニズムのみによって近似解を得ることができ、それ以上の特別な計算メカニズムを備える必要はない。この簡単さが本稿の近似法の最も大きな特長である。

5. 数値実験例

本章では厳密解が計算できる簡単なネットワークモデルを例題として、本方法によって計算された近似解と厳密解との比較を行い、本近似法の精度に関する考察を行う。数値実験に用いた待ち行列網モデルを図4

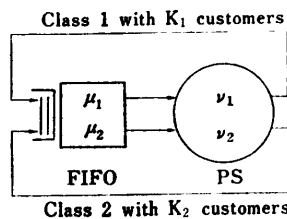


図4 数値実験用ネットワークモデル

Fig. 4 Network model for numerical examples.

に示す。網は二つのノードから構成され、2クラスの客が存在するものとし、客数ベクトルを $\mathbf{K}=(K_1, K_2)$ とする。一方のノードでは客は先着順にサービスを受けるものとし、クラス1および2の客はそれぞれパラメータ μ_1, μ_2 をもつ指数分布に従ってサービス時間

表1 厳密解と近似解の比較(1) $\mathbf{K}=(1, 2), \nu_1=\nu_2=1.0, \mu_1=2.0$.

Table 1 Comparison of exact and approximate solutions for a network example with $\nu_1=1.0, \nu_2=1.0$ and $\mu_1=2.0$.

μ_2	Cycle time				Utilization			
	Class 1		Class 2		FIFO		PS	
	(E)	(A)	(E)	(A)	(E)	(A)	(E)	(A)
20.0	3.43	3.47	2.89	2.81	.180	.180	.984	.999
4.0	3.26	3.36	3.01	2.94	.320	.319	.972	.979
2.0	3.21	3.21	3.21	3.21	.467	.467	.933	.933
1.3	3.31	3.09	3.48	3.58	.581	.581	.876	.882
1.0	3.50	3.00	3.81	4.00	.668	.667	.811	.833
0.8	3.74	2.93	4.16	4.46	.734	.731	.747	.790

(E): Exact solution. (A): Approximate solution

表2 厳密解と近似解の比較(2) $\mathbf{K}=(1, 2), \nu_1=\nu_2=1.0, \mu_1=1.0$.

Table 2 Comparison of exact and approximate solutions for a network example with $\nu_1=1.0, \nu_2=1.0$ and $\mu_1=1.0$.

μ_2	Cycle time				Utilization			
	Class 1		Class 2		FIFO		PS	
	(E)	(A)	(E)	(A)	(E)	(A)	(E)	(A)
10.0	3.85	4.00	2.97	2.69	.327	.324	.933	.993
2.0	3.66	4.00	3.33	3.11	.573	.571	.873	.893
1.0	4.00	4.00	4.00	4.00	.750	.750	.750	.750
0.67	4.59	4.00	4.80	5.07	.842	.842	.634	.645
0.5	5.29	4.00	5.68	6.22	.893	.893	.541	.571
0.4	6.05	4.00	6.59	7.43	.924	.923	.469	.519

(E): Exact solution. (A): Approximate solution

表3 厳密解と近似解の比較(3) $\mathbf{K}=(1, 2), \nu_1=\nu_2=1.0$.

Table 3 Comparison of exact and approximate solutions for a network example with $\nu_1=1.0, \nu_2=1.0$.

μ_1	μ_2	Cycle time				Utilization			
		Class 1		Class 2		FIFO		PS	
		(E)	(A)	(E)	(A)	(E)	(A)	(E)	(A)
5.0	0.5	4.25	2.06	5.27	5.76	.805	.792	.614	.853
1.0	0.1	17.40	4.00	19.98	26.91	.994	.993	.147	.324
0.5	0.05	38.96	6.95	42.21	56.25	.999	.999	.073	.180

(E): Exact solution. (A): Approximate solution

を要求するものとする。他方のノードはプロセッサリング (PS) 方式に従って制御を行うものとし、クラス 1 および 2 の客はそれぞれパラメータ ν_1, ν_2 をもつ指数分布に従ってサービス時間を要求するものとする。この網は、FIFO ノードが非積形式ノード、PS ノードが積形式ノードであり、全体では積形式解をもたないが、平衡方程式を直接解くことにより厳密解を計算することができる。

表 1 から表 3 までに、この待ち行列網モデルの厳密解と近似解との比較を示す。いずれも、 $K=(1, 2)$ とし、各クラスごとのサイクルタイムおよびノードの使用率を比較項目とした。サイクルタイムとは、客が二つのノードを一巡し出発点に戻るまでの時間とする。

表 1 には、ケース (1) として、 $\nu_1=\nu_2=1.0, \mu_1=2.0$ とし、 μ_2 を 20.0 から 0.8 まで変化させた場合の厳密解と近似解の比較結果を示す。表 1 に示されるように、本近似法は μ_1 と μ_2 の値が近いほどよい近似を示す。 $\mu_1=\mu_2$ の場合には原理的に厳密解に一致する。 μ_1 と μ_2 の差が大きくなるに従って誤差は増加する。本近似法では、 $\mu_1>\mu_2$ の場合にはクラス 1 に属する客のサイクルタイムを過少評価し、クラス 2 に属する客のサイクルタイムを過大評価する。また、 $\mu_1<\mu_2$ の場合にはその逆の性質を示す。

表 2 には、ケース (2) として、 $\nu_1=\nu_2=1.0, \mu_1=1.0$ とし、 μ_2 を 10.0 から 0.4 まで変化させた場合の厳密解と近似解との比較結果を示す。ケース (2) では、FIFO ノードにおけるクラス 1 およびクラス 2 に属する客の平均サービス要求時間、 $1/\mu_1$ および $1/\mu_2$ がそれぞれケース (1) の 2 倍に設定されている。そのため、ケース (1) に比べて FIFO ノードにかかる負荷が高くなり、厳密解と近似解の差が大きくなる出やすくなっている。ケース (2) においても、 $\mu_1=\mu_2$ のときには厳密解に一致し、 μ_1 と μ_2 の差が大きくなるにつれ誤差が増加することやその大小関係によるサイクルタイムの過大あるいは過少評価に関する性質はケース (1) と同様である。

ケース (1) および (2) を通じて FIFO ノードの使用率はいずれの場合も比較的よい近似値を示していることがわかる。しかし、 μ_1 と μ_2 との差が大きくなりかつ FIFO ノードの使用率が大きくなるにつれサイクルタイムの誤差は増大する。この傾向をもう少しはっきりと見るために、パラメータの値を極端に変化させた例をケース (3) として表 3 に示す。ケース (3) では、クラス 2 に属する客の平均サービス要求時間をク

ラス 1 の客の平均サービス要求時間の 10 倍に設定している。すなわち、 $\mu_1=10\mu_2$ と設定している。さらに、 $K_1<K_2$ であるので、ケース (3) ではクラス 1 の客のサイクルタイムには大きな誤差が生ずることが予想でき、また表 3 に示されるようにこれを確かめることができる。

以上に見られるように、本近似法は μ_1 と μ_2 の差があまり大きくない範囲では比較的よい近似を示し有効であると思われるが、 μ_1 と μ_2 の差が大きく開きかつ FIFO ノードの負荷が高い場合にはサイクルタイムに大きな誤差を発生する危険性をもっていることがわかる。

なお、対象とする FIFO ノードがシングルサーバの場合には、本近似法と PS ノードを用いる近似法はまったく同じ近似解を与えることに注意しておく。

6. ま と め

客のサービス要求時間がそのクラスごとに異なるパラメータをもつ指数分布に従い、サービス規律が先着順であるようなノードを含む待ち行列網に関する近似解法について述べ、この近似法によって得られる近似解と厳密解との比較を簡単なモデルについて行った。

本近似法の基本となる考え方は、待ち行列網に関する積形式解の表現のなかには平均サービス要求時間と相対訪問回数を表すパラメータが直接現れるのではなく、それらの積として定義される負荷を表すパラメータのみが現れることを利用し、非積形式型の FIFO ノードをフィードバックループをもつ積形式型の FIFO ノードに置き換えて網に接続し、全体を積形式解をもつ待ち行列網として解き近似解を得るものであった。その際に、負荷量を等価に保つためフィードバックループを回る回数を調節する。

本稿で示した近似法の最大の利点はその簡便性である。近似計算に際しては積形式解をもつ待ち行列網を解くための計算メカニズムを備えるだけで十分であった。計算に必要な CPU 時間や記憶領域の量は積形式解をもつ同規模な待ち行列網を解くために必要とされる量とまったく同じである。

本稿の近似法は、各クラスの客のサービス要求時間を示すパラメータの値がお互いに近いほどよい近似を示し、それらが互いに等しいときには厳密解に一致する。しかし、これらのパラメータの値が相互に大きく異なる場合には誤差もまた大きくなる。本稿の近似法の特長である簡便さを保ちながら、この場合の誤差の

発生を少なく抑えるようにする近似法の改良が望まれるが、これは今後の課題としたい。

謝辞 本研究の基礎となる待ち行列網理論に関して数々の有益なご指導をいただいた、防衛大学校川島武先生、筑波大学逆瀬川浩孝先生、工学院大学山崎源治先生に感謝いたします。また、本研究を開始する機会を与えていただき、途上数々の援助をいただいた当社 C&C システム研究所三上徹所長代理、同研究所応用システム研究部難波田愈部長に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Baskett, F., Chandy, K. M., Muntz, R. R. and Polacios, F. G.: Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers, *J. ACM*, Vol. 22, No. 2, pp. 248-260 (1975).
- 2) Reiser, M. and Kobayashi, H.: Queueing Net-

works with Multiple Closed Chains: Theory and Computational Algorithms, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 19, No. 3, pp. 283-294 (1975).

- 3) Kino, I. and Morita, S.: PERFORMS—A Support System for Computer System Performance Evaluation, Proc. International Conference on Modelling Techniques and Tools for Performance Analysis, pp. 77-88 (1984).
- 4) Chandy, K. M., Herzog, U. and Woo, L.: Parametric Analysis of Queueing Networks, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 19, No. 1, pp. 36-42 (1975).
- 5) 山本 彰, 西垣 通: FCFS スケジューリングを行うサーバを有する複数クラス待ち行列網モデルの近似解析, 情報処理学会論文誌, Vol. 25, No. 3, pp. 488-494 (1984).

(昭和59年6月26日受付)

(昭和59年9月20日採録)