

\$x\$ が小さい場合の一般化された余弦積分関数 \$\int_x^\infty t^{\nu-1} \cos t dt\$ および正弦積分関数 \$\int_x^\infty t^{\nu-1} \sin t dt\$ の数値計算†

吉田年雄†† 二宮市三†*

一般化された余弦積分関数 \$C(\nu, x) = \int_x^\infty t^{\nu-1} \cos t dt\$ および正弦積分関数 \$S(\nu, x) = \int_x^\infty t^{\nu-1} \sin t dt\$ について、 $\nu < 1$ かつ \$x (\ge 0)\$ が小さい場合の新しい数値計算法を提案している。\$C(\nu, x)\$ については、 $C(\nu, x) = \int_0^\infty t^{\nu-1} \cos t dt - \int_0^x t^{\nu-1} \cos t dt = \pi / (2\Gamma(1-\nu) \sin \frac{\nu\pi}{2}) - x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} / ((2k)!(\nu+2k))$ において、適当に項をまとめると、 $C(\nu, x) = (-1)^n F_n(\alpha) + (-1)^n \phi(\alpha, x) / (2n)! - x^{-2n+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} / ((2k)!(-2n+2k+\alpha))$ が得られる。ただし、\$n\$ および \$\alpha\$ は、 $\nu = -2n + \alpha$, $-1 \le \alpha < 1$ を満足するように定められたものであり、 $F_n(\alpha) = \pi / (2\Gamma(2n+1-\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}) - 1 / ((2n)!\alpha)$ および $\phi(\alpha, x) = (1-x^\alpha)/\alpha$ である。\$F_n(\alpha)\$ は式どおりに計算を行うと桁落ちを生ずるが、 $n=0$ のときには、 $F_0(\alpha)$ の最良近似式、 $n=1$ のときには、 $F_1(\alpha)$ の最良近似式、 $n \ge 2$ のときには、 $F_1(\alpha)$ の最良近似式と $F_n(\alpha)$ の漸化式により計算すれば、桁落ちなしに $F_n(\alpha)$ を求めることができる。\$\phi(\alpha, x)\$ については、そのまま計算すると桁落ちを生ずるときには、 $f(t) = (e^t - 1)/t$ なる関数の最良近似式により、 $\phi(\alpha, x) = -f(\alpha \ln x) \ln x$ として計算すれば、桁落ちなしに $\phi(\alpha, x)$ を求めることができる。このようにすれば、\$x\$ が小さい場合の \$C(\nu, x)\$ を精度よく計算することができる。\$S(\nu, x)\$ についても、ほぼ同様である。

1. まえがき

本論文では、 $\nu < 1$ かつ $x (\ge 0)$ が小さい場合の一般化された余弦積分関数

$$C(\nu, x) = \int_x^\infty t^{\nu-1} \cos t dt \quad (1)$$

および正弦積分関数

$$S(\nu, x) = \int_x^\infty t^{\nu-1} \sin t dt \quad (2)$$

の数値計算法を提案する。通常の余弦積分関数および正弦積分関数は $\nu=0$ の場合に相当する。上記の関数は、文献 1) では、 $C(x, \nu)$, $S(x, \nu)$ と表されているが、一般的な表記法はまだないので、ここでは、不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu, x) = \int_x^\infty t^{\nu-1} e^{-t} dt$ の場合にならって、 $C(\nu, x)$, $S(\nu, x)$ と表すことにする。また、不完全ガンマ関数との間には、 $\Gamma(\nu, ix) = (\cos(\nu\pi/2) + i \sin(\nu\pi/2))(C(\nu, x) - iS(\nu, x))$ なる関係がある ($i = \sqrt{-1}$)。

† Computation of Generalized Cosine Integral Function $\int_x^\infty t^{\nu-1} \cos t dt$ and Generalized Sine Integral Function $\int_x^\infty t^{\nu-1} \sin t dt$ for Small Argument x by TOSHIO YOSHIDA and ICHIZO NINOMIYA (Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学科

* 現在 中部大学経営情報学部

これらの関数値は、上記の積分を、三角関数の半周期ごとの積分を項とする交代無限級数として表し、その級数の和を加速²⁾⁻⁴⁾ (たとえば、級数のオイラー変換) して求めることにより計算することができる。しかし、被積分関数にベキ乗関数、三角関数を含むので、特殊関数の数値計算法としては計算時間が多くかかることが欠点である。

本論文で述べる方法では、式(1)および(2)の積分を、区間 $[0, \infty]$ と $[0, x]$ の二つの積分の差として表し、その差の計算における桁落ちを、適当な工夫を用いて取り除くことにより、 x が小さい場合の $C(\nu, x)$ および $S(\nu, x)$ を能率的に計算している。

2. 規 準 誤 差

本計算法の適用範囲を求めるための条件を定義する。入力および演算の有効桁数は一定であるとし、その相対精度を ϵ とする。関数 $F_r(x)$ が与えられたとき、その関数に対して、規準の絶対誤差 δ を、参考文献 5) により、

$$\delta = 10\epsilon \max \{ |F_r(x)|, |x dF_r(x)/dx| \} \quad (3)$$

と決め (文献 5) の式(2)において、 $r=10$ とした)、この誤差以内で関数値 $F_r(x)$ が求められれば十分と考える。

関数 $F_N(x)$ の値の計算法が、 N 回の加算

$$F_N = \sum_{k=0}^N a_k \quad (4)$$

によって表されるとする。そのとき、その計算法において、絶対誤差の絶対値の上限の近似値 δ_A は、

$$\delta_A = \varepsilon \max \left\{ \max_k (|a_k|), \max_k (|s_k|) \right\} \quad (5)$$

と与えることができる。ここで、 s_k は加算の中間結果

$$s_k = \sum_{j=0}^k a_j \quad (k=0, 1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

である (s_N は関数値 F_N となっている)。本論文では、 $\delta_A < \delta$ すなわち

$$\max \left\{ \max_k (|a_k|), \max_k (|s_k|) \right\} / \max \left\{ |F_N(x)|, |x dF_N(x)/dx| \right\} < 10 \quad (7)$$

が満たされるならば、「関数値が規準誤差以内で得られる」ということにする。

3. $C(\nu, x)$ の計算法

3.1 関数値のオーバ・フローの判定

式(1)の積分値が存在するためには、

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \nu < 1 \text{ では, } x \geq 0 \\ \nu \leq 0 \text{ では, } x > 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

でなければならない。この条件の下で、関数値 $C(\nu, x)$ のオーバ・フローの有無を調べよう。

まず、 $0 < \nu < 1$ の場合を考えよう。 $x=0$ ならば、 $C(\nu, x)$ は、後出の式(14)で表され、 $\nu \neq 0$ のときすら、 $C(\nu, 0) \doteq 1/\nu$ であるので、オーバ・フローは生じない。また、

$$\begin{aligned} |C(\nu, x)| &< \max \left\{ \int_x^{\frac{\pi}{2}} t^{\nu-1} dt, \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} t^{\nu-1} dt \right\} \\ &= \max \left\{ ((\pi/2)^\nu - x^\nu)/\nu, ((3\pi/2)^\nu - (\pi/2)^\nu)/\nu \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

であることより、 $x > 0$ ならば、 $\nu \neq 0$ のときすら、 $C(\nu, x) \doteq \max \{ \ln(\pi/(2x)), \ln 3 \}$ であるので、オーバ・フローは生じない。

$\nu=0$ の場合には、

$$|C(\nu, x)| < \max \{ \ln(\pi/(2x)), \ln 3 \} \quad (10)$$

であるので、オーバ・フローは生じない。

$\nu < 0$ の場合には、

$$|C(\nu, x)| < -x^\nu/\nu \quad (11)$$

が成り立つ。 $-1 \leq \nu < 0$ では、オーバ・フローは生じない。 $\nu < -1$ では、 $|C(\nu, x)| < x^\nu$ であり、 $x \doteq 0$ のとき、オーバ・フローの可能性はある。そこで、

$$\nu \ln x > \ln f_M \quad (12)$$

ならば、 $C(\nu, x)$ の値はオーバ・フロー値であるとみなし、以下で説明する $C(\nu, x)$ の計算を行わないことにする。ただし、 f_M は浮動小数点数として許される最大数である。

3.2 計算式

与えられた ν ($\nu < 1$) に対して、

$$\left. \begin{array}{l} \nu = -2n + \alpha \quad n=0, 1, 2, \dots \\ -1 \leq \alpha < 1 \end{array} \right\} \quad (13)$$

を満足する整数 n および実数 α を決める。

$0 < \nu < 1$ のとき、

$$\int_0^\infty t^{\nu-1} \cos t dt = \frac{\pi}{2\Gamma(1-\nu) \sin \frac{\nu\pi}{2}} \quad (14)$$

であり、 $\nu > 0$ のとき、

$$\int_0^x t^{\nu-1} \cos t dt = x^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)! (\nu+2k)} \quad (15)$$

であることより、 $0 < \nu < 1$ のとき、

$$\begin{aligned} C(\nu, x) &= \int_0^\infty t^{\nu-1} \cos t dt - \int_0^x t^{\nu-1} \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{2\Gamma(1-\nu) \sin \frac{\nu\pi}{2}} \\ &\quad - x^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)! (\nu+2k)} \end{aligned} \quad (16)$$

と表される。上式は、第1項および第2項において、特異点 $\nu = -2n$ ($n=0, 1, \dots$) をもつ。しかし、以下に示す式の変形において明らかになるように、それは除去可能な特異点であるので、上式は、実は、 $\nu < 1$ を満たすすべての ν に対して成り立つことになる。

さて、式(16)は式(13)を用いて次式のように書き直することができる。

$$\begin{aligned} C(\nu, x) &= \frac{(-1)^n \pi}{2\Gamma(2n+1-\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} - \frac{(-1)^n x^\alpha}{(2n)! \alpha} \\ &\quad - x^\nu \sum_{k=n}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)! (\nu+2k)} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、

$$\phi(\alpha, x) = \frac{1-x^\alpha}{\alpha} \quad (18)$$

によって定義される関数 $\phi(\alpha, x)$ を用いると、 $C(\nu, x)$ の計算式として、

$$C(\nu, x) = (-1)^n F_n(\alpha) + \frac{(-1)^n \phi(\alpha, x)}{(2n)!}$$

$$-x^{-2n+\alpha} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)! (-2n+2k+\alpha)} \quad (19)$$

が得られる。ただし,

$$F_n(\alpha) = \frac{\pi}{2\Gamma(2n+1-\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} - \frac{1}{(2n)! \alpha} \quad (20)$$

である。式(16)における ν の特異点は、式(19)においては、 $F_n(\alpha)$ および $\phi(\alpha, x)$ の特異点 $\alpha=0$ に対応している。式(18)および(20)を見れば、 $\phi(\alpha, x)$ および $F_n(\alpha)$ において、 $\alpha=0$ は除去可能な特異点であることがわかるであろう。以下に、 $F_n(\alpha)$ および $\phi(\alpha, x)$ の具体的な計算法を述べる。

[$F_n(\alpha)$ の計算] $n \geq 1$ のとき、 $F_n(\alpha)$ に対して、次の漸化式

$$F_n(\alpha) = \frac{1}{(2n-\alpha)(2n-1-\alpha)} \left\{ F_{n-1}(\alpha) + \frac{4n-1-\alpha}{(2n)!} \right\} \quad (21)$$

が成り立つ。 $F_0(\alpha) < 0$, $F_1(\alpha) > 0$, また、 $n \geq 1$ のとき、 $4n-1-\alpha > 0$ であるから、上式は、 $n \geq 2$ で用いれば桁落ちは生じない。したがって、 $n=0$ のときには $F_0(\alpha)$, また、 $n \geq 1$ のときには $F_1(\alpha)$ が所要の精度で計算できればよい。

まず、次式で表される $F_0(\alpha)$ の計算法を考えよう。

$$F_0(\alpha) = \frac{\pi}{2\Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} - \frac{1}{\alpha} \quad (22)$$

上式は右辺どおりに計算すると、 $\alpha \neq 0$ で桁落ちが生ずる。だが、 $\alpha \neq 0$ では、正弦関数の展開

$$\sin \frac{\alpha\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \alpha^{2k+1} \quad (23)$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2k+1} \quad (24)$$

および、ガンマ関数の逆数の級数展開⁶⁾

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \alpha^k \quad (25)$$

を用いて、 $\alpha=0$ の特異性を除去した次式

$$F_0(\alpha) = \frac{\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \alpha^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \alpha^{2k-1}}{\sum_{k=0}^{\infty} c_k \alpha^{2k}} \quad (26)$$

により計算を行えば、桁落ちなしに $F_0(\alpha)$ を求めることができる。ここで、 b_k は定数であり、とくに、 $b_0=1$, $b_1=-\gamma$ (γ : オイラーの定数) である。しかし、能率の点では、 $F_0(\alpha)$ の値は、最良近似式により

表 1 式(27) の p_k
Table 1 p_k in Eq.(27).

k	p_k
0	-0.5772156609E+00
1	-0.24464451218E+00
2	-0.1953547728E+00
3	0.1508473726E-01
4	-0.8364461684E-02
5	0.1081569568E-01
6	-0.9271719633E-03
7	0.6067631255E-03

表 2 式(27) の p_k
Table 2 p_k in Eq.(27).

k	p_k
0	-0.577215664901532860220+00
1	-0.244644554808197538240+00
2	-0.195367792744620024020+00
3	0.151986691825028580400-01
4	-0.885964714161336700770-02
5	0.120205002103903352840-01
6	-0.267094208992561187550-02
7	0.217564587281595581650-02
8	-0.956851859022201989550-03
9	0.484981344217806107640-03
10	-0.244270228880403503700-03
11	0.118709391758098470440-03
12	-0.561741544339847667810-04
13	0.241841480498575412310-04
14	-0.887039826542727732250-05
15	0.250598062558936846600-05
16	-0.471113725082327481030-06
17	0.433098560012704771050-07

表 3 式(28) の p_k および q_k
Table 3 p_k and q_k in Eq.(28).

k	p_k
0	0.8708816606E+02
1	-0.5453263463E+01
2	0.2782231392E+02

k	q_k
0	-0.1525731033E+03
1	-0.8022957874E+02
2	0.5687172243E+02
3	-0.1469870941E+02
4	0.1000000000E+01

計算することが好ましい。表 1 および表 2 に、それぞれ、単精度 (8 D) および倍精度 (18 D) 用として求められた $0 \leq \alpha \leq 1$ における $F_0(\alpha)$ の最良近似式

$$F_0(\alpha) \doteq \sum_{k=0}^M p_k \alpha^k \quad (27)$$

の係数を示す。また、表 3 および表 4 に、それぞれ、単精度および倍精度用として求められた $-1 \leq \alpha \leq 0$ における $F_0(\alpha)$ の最良近似式

表 4 式(28)の p_k および q_k
Table 4 p_k and q_k in Eq.(28).

k	P_k
0	-0.21707691635267164746D+04
1	-0.50216361016583012984D+03
2	-0.61613161322623305834D+03
3	-0.19271695307218957474D+03
4	0.16308624709452577494D+02
5	0.60387021869663956337D+01
6	0.19290392907715527504D+01
7	0.27934403515829363701D+00
8	0.23310859762278482276D-01

k	Q_k
0	0.38030538418421456929D+04
1	0.31177121876024752796D+04
2	-0.89532499282824651022D+03
3	-0.10835666633268598852D+03
4	0.85994490929898220547D+02
5	-0.14632404491692637657D+02
6	0.10000000000000000000D+01

表 5 式(31)の p_k および q_k
Table 5 p_k and q_k in Eq.(31).

k	P_k
0	0.1067578853E+01
1	-0.8981448106E-01
2	-0.9556585055E-01
3	0.5555279811E-01
4	-0.1961193269E-01
5	0.3994464604E-02
6	-0.7358819521E-03

k	Q_k
0	0.9969952474E+00
1	0.1000000000E+01

表 6 式(31)の p_k および q_k
Table 6 p_k and q_k in Eq.(31).

k	P_k
0	0.11182832928285096660D+07
1	0.28165405339868189812D+06
2	-0.12727727815913121887D+06
3	-0.13647239013405793331D+05
4	-0.68529837668496236200D+04
5	-0.11601401650639444585D+04

k	Q_k
0	0.10443473374397452853D+07
1	0.13983865935984416097D+07
2	0.35610610636008653189D+06
3	-0.31266171085026754472D+05
4	-0.43167371868994424222D+05
5	-0.11353180109735456701D+05
6	-0.16066316540915090647D+04
7	-0.88809248362118341122D+02
8	-0.92099367236500813374D-01
9	0.10000000000000000000D+01

$$F_0(\alpha) = \frac{\sum_{k=0}^M p_k(1+\alpha)^k}{\sum_{k=0}^N q_k(1+\alpha)^k} \quad (28)$$

の係数を示す。

つぎに、

$$F_1(\alpha) = \frac{\pi}{2\Gamma(3-\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} - \frac{1}{2\alpha} \quad (29)$$

についても、右辺どおりに計算すると、 $\alpha \rightarrow 0$ での桁落ちが生ずる。だが、 $\alpha \rightarrow 0$ では、式(23)および(25)を用いて得られる次式

$$F_1(\alpha) = \frac{\pi \sum_{k=1}^{\infty} b_k \alpha^{k-1} + (3-\alpha)c_0 - (2-\alpha)(1-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \alpha^{2k-1}}{2(2-\alpha)(1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \alpha^{2k}} \quad (30)$$

により計算を行えば、桁落ちなしに $F_1(\alpha)$ を求めることができる。しかし、能率の点では、 $F_1(\alpha)$ の値は、最良近似式により計算することが好ましい。表 5 および表 6 に、それぞれ、単精度および倍精度用として求められた $0 \leq \alpha \leq 1$ における $F_1(\alpha)$ の最良近似式

$$F_1(\alpha) = \frac{\sum_{k=0}^M p_k(1-\alpha)^k}{\sum_{k=0}^N q_k(1-\alpha)^k} \quad (31)$$

の係数を示す。また、表 7 および表 8 に、それぞれ、単精度および倍精度用として求められた $-1 \leq \alpha \leq 0$ における $F_1(\alpha)$ の最良近似式

$$F_1(\alpha) = \frac{\sum_{k=0}^M p_k(1+\alpha)^k}{\sum_{k=0}^N q_k(1+\alpha)^k} \quad (32)$$

表 7 式(32)の p_k および q_k
Table 7 p_k and q_k in Eq.(32).

k	P_k
0	-0.7330824430E+00
1	-0.1036917292E+01
2	-0.1518516495E+00
3	-0.2375914788E-01
4	-0.3240923931E-02
5	0.2036100339E-02

k	Q_k
0	-0.3077584227E+01
1	-0.2141853170E+01
2	0.1000000000E+01

表 8 式(32)の p_k および q_k
Table 8 p_k and q_k in Eq.(32).

k	p_k
0	-0.10076976201865770899D+03
1	-0.13799851345073051195D+03
2	-0.11464402339940752181D+02
3	0.29061739807401329852D+01
4	0.26324884377774076627D-01
5	0.21159311652379765295D+00
6	0.48119208988270148913D-01
7	0.68783880113669992594D-02
8	0.70230426577856310286D-03
9	0.92767385030689664191D-05

k	q_k
0	-0.42304577258470153403D+03
1	-0.27537537702581213316D+03
2	0.16328593247892711357D+03
3	0.66714726129968212133D+01
4	-0.79438632044506066572D+01
5	0.100000000000000000D+01

の係数を示す。

このようにすれば、 $F_n(\alpha)$ は、 $\alpha=0$ での特異性を除去して計算することができる。

【 $\phi(\alpha, x)$ の計算】 式(18)で定義した $\phi(\alpha, x)$ を 2 進丸め誤差程度で求めることにしよう。そのためには、参考文献 5) で述べたように、 $x^\alpha < 1/2$ あるいは $x^\alpha > 2$ のときには、式(18)の右辺のとおり計算を行い、 $1/2 \leq x^\alpha \leq 2$ すなわち $-\ln 2 \leq \alpha \ln x \leq \ln 2$ のときには、

$$\phi(\alpha, x) = -f(\alpha \ln x) \ln x \tag{33}$$

により計算を行えばよい。ただし、

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{1!} + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots \tag{34}$$

であり、 $f(t)$ の値は上式の右辺第 2 式により行えば、桁落ちなしで求められる。このようにして、 $\phi(\alpha, x)$ に対して、 $\alpha=0$ での特異性を除去することができる。

$f(t)$ を能率的に計算するためには、最良近似式を用いることが好ましく、その係数については、5) の表 3 および表 4 を見られたい。

3.3 式(19)の適用範囲

式(19)の第 3 項は、同符号の項をもつ級数ではないので、 x が大きくなると桁落ちが生ずるようになる。したがって、本方法は、 x が大きい場合には適用できない。そこで、本方法の適用範囲を求めることにする。本論文では、規準誤差以内で $C(\nu, x)$ の値が得られれば十分と考え、規準誤差以内で得ることができる範囲を、本方法の適用範囲とする。式(19)の加算を、式どおりの順に行った場合について、式(7)の条件を数値的に調べた。図 1 に、 $-10 \leq \nu < 1$ における結果を示す。実線以下が適用範囲である(式(7)は加算の順序により異なるが、大差ない)。図示されていない $\nu \leq -10$ では、 ν の絶対値が大きくなるほど適用範囲は広がる。このことは、そこでは、式(19)の右辺の級数において、 $k=0$ の項が主要項であることからわかるであろう。

式(19)の右辺の第 3 項の級数は、たとえば、 $x=1$ のときには、 k は単精度では 6~7 まで、倍精度では 10~11 までとれば、その精度内に収束している。

4. $S(\nu, x)$ の計算法

4.1 関数値のオーバ・フローの判定

式(2)の積分値が存在するためには、

$$\begin{cases} -1 < \nu < 1 \text{ では, } x \geq 0 \\ \nu \leq -1 \text{ では, } x > 0 \end{cases} \tag{35}$$

でなければならない。この条件の下で、関数値 $S(\nu, x)$ のオーバ・フローの有無を調べよう。

まず、 $-1 < \nu < 1$ の場合を考えよう。 $x=0$ ならば、 $S(\nu, x)$ は、後出の式(41)で表され、 $\nu \neq -1$ の

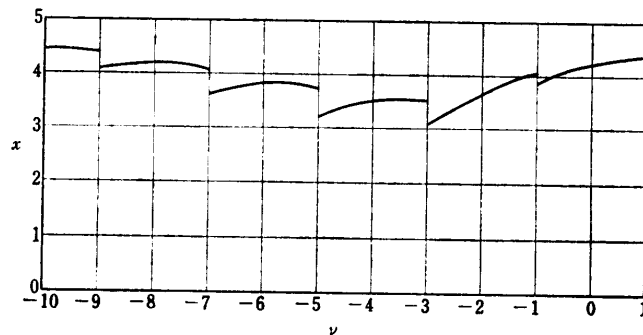


図 1 式(19)の適用範囲

Fig. 1 Region (under solid line) where Eq.(19) is applicable.

ときすら, $S(\nu, x) \doteq 1/(\nu+1)$ であるので, オーバ・フローは生じない. また,

$$|S(\nu, x)| < \max \{ (\pi^{\nu+1} - x^{\nu+1})/(\nu+1), (2\pi)^{\nu+1} - \pi^{\nu+1} / (\nu+1) \} \quad (36)$$

であることより, $x > 0$ ならば, $\nu \doteq -1$ のときすら, $S(\nu, x) \doteq \max \{ \ln(\pi/x), \ln 2 \}$ であるので, オーバ・フローは生じない.

$\nu = -1$ の場合には,

$$|S(\nu, x)| < \max \{ \ln(\pi/x), \ln 2 \} \quad (37)$$

であるので, オーバ・フローは生じない.

$\nu < -1$ の場合には,

$$|S(\nu, x)| < -x^{\nu+1}/(\nu+1) \quad (38)$$

が成り立つ. $-2 \leq \nu < -1$ では, オーバ・フローは生じない. $\nu < -2$ では, $|S(\nu, x)| < x^{\nu+1}$ であり, $x \doteq 0$ のとき, オーバ・フローの可能性がある. そこで,

$$(\nu+1) \ln x > \ln f_M \quad (39)$$

ならば, $S(\nu, x)$ の値はオーバ・フロー値であるとみなすことにする.

4.2 計算式

与えられた $\nu (\nu < 1)$ に対して,

$$\left. \begin{aligned} \nu &= -2n-1+\alpha \quad n = -1, 0, 1, 2, \dots \\ -1 &\leq \alpha < 1 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

を満足する整数 n および実数 α を決める.

$-1 < \nu < 1$ のとき,

$$\int_0^\infty t^{\nu-1} \sin t dt = \frac{\pi}{2\Gamma(1-\nu) \cos \frac{\nu\pi}{2}} \quad (41)$$

であり, $\nu > -1$ のとき,

$$\begin{aligned} &\int_0^x t^{\nu-1} \sin t dt \\ &= x^{\nu+1} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)! (\nu+2k+1)} \end{aligned} \quad (42)$$

であることより,

$$\begin{aligned} S(\nu, x) &= \int_0^\infty t^{\nu-1} \sin t dt - \int_0^x t^{\nu-1} \sin t dt \\ &= \frac{\pi}{2\Gamma(1-\nu) \cos \frac{\nu\pi}{2}} \\ &\quad - x^{\nu+1} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)! (\nu+2k+1)} \end{aligned} \quad (43)$$

と表される. $C(\nu, x)$ の場合と同様に, 上式は $-1 < \nu < 1$ だけでなく, $\nu < 1$ において成立する.

$n = -1$ に対しては, $0 \leq \nu < 1$ すなわち $-1 \leq \alpha < 0$

だけを考えればよい. この場合には, $S(\nu, x)$ の計算式として, 上式(43)を用いる. ただし, その第1項を $\tilde{G}(\alpha)$ とおけば, $\tilde{G}(\alpha)$ は, 式(23)を用いて,

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\alpha) &= \frac{\alpha\pi}{2\Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2\Gamma(1-\alpha) \sum_{k=0}^\infty c_k \alpha^{2k}} \end{aligned} \quad (44)$$

により計算するのが安全であろう. さらに, 能率の点では, $\tilde{G}(\alpha)$ の値は最良近似式により計算することが好ましい. 表9および表10に, それぞれ, 単精度および倍精度用として求められた $-1 \leq \alpha \leq 0$ における $\tilde{G}(\alpha)$ の最良近似式

表9 式(45)の p_k および q_k
Table 9 p_k and q_k in Eq.(45).

k	p_k
0	-0.1004783077E+03
1	0.6153279743E+02
2	0.3269824254E+02
3	0.6534477793E+01

k	q_k
0	-0.1004783079E+03
1	0.3535118649E+01
2	0.1015670026E+02
3	-0.6373623205E+01
4	0.1000000000E+01

表10 式(45)の p_k および q_k
Table 10 p_k and q_k in Eq.(45).

k	p_k
0	0.34578019691331454390D+06
1	-0.34120499994108239789D+06
2	-0.19882916331874425364D+05
3	0.12758174292860158484D+05
4	0.25494824646081134760D+04

k	q_k
0	0.34578019691331454366D+06
1	-0.14161525366998068655D+06
2	-0.17032216803850143158D+05
3	0.35835825103106891614D+05
4	-0.13854815372944695486D+05
5	0.26581303233458659492D+04
6	-0.62699682599478294134D+01
7	-0.12981663980579130064D+03
8	0.45097871178513707108D+02
9	-0.73393814980819312567D+01
10	0.100000000000000000D+01

$$\tilde{G}(\alpha) \doteq \frac{\sum_{k=0}^M p_k \alpha^k}{\sum_{k=0}^N q_k \alpha^k} \quad (45)$$

の係数を示す。

$n \geq 0$ に対しては、 $S(\nu, x)$ の計算式として、

$$S(\nu, x) = (-1)^n G_n(\alpha) + (-1)^n \frac{\phi(\alpha, x)}{(2n+1)!} - x^{-2n+\alpha} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)! (-2n+2k+\alpha)} \quad (46)$$

が得られる。ただし、

$$G_n(\alpha) = \frac{\pi}{2\Gamma(2n+2-\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{(2n+1)! \alpha} \quad (47)$$

である。 $\phi(\alpha, x)$ の計算法は、 $C(\nu, x)$ の場合と同じである。つぎに、 $G_n(\alpha)$ の具体的な計算法を述べる。

【 $G_n(\alpha)$ の計算】 $n \geq 1$ のとき、 $G_n(\alpha)$ に対して、次の漸化式

$$G_n(\alpha) = \frac{1}{(2n-\alpha)(2n+1-\alpha)} \left\{ G_{n-1}(\alpha) + \frac{4n+1-\alpha}{(2n+1)!} \right\} \quad (48)$$

が成り立つ。 $G_0(\alpha) > 0$ 、また、 $n \geq 1$ のとき、 $4n+1-\alpha > 0$ であるから、上式の計算では桁落ちがない。したがって、 $G_0(\alpha)$ が所要の精度で計算できればよい。

$$G_0(\alpha) = \frac{\pi}{2\Gamma(2-\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\alpha} \quad (49)$$

は、右辺どおりに計算すると、 $\alpha \neq 0$ で桁落ちを生ずる。そのときには、式(23)および(25)を用いて得られる次式

$$G_0(\alpha) = \frac{2c_0 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} b_k \alpha^{k-1} - 2(1-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \alpha^{2k-1}}{2(1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \alpha^{2k}} \quad (50)$$

により計算を行えば、桁落ちなしに $G_0(\alpha)$ を求めることができる。しかし、能率の点では、 $G_0(\alpha)$ の値は最良近似式により計算することが好ましい。表11および表12に、それぞれ、単精度および倍精度用として求められた $0 \leq \alpha \leq 1$ における $G_0(\alpha)$ の最良近似式

$$G_0(\alpha) \doteq \sum_{k=0}^M p_k \alpha^k \quad (51)$$

表11 式(51)の p_k
Table 11 p_k in Eq.(51).

k	p_k
0	0.4227843359E+00
1	0.1781396667E+00
2	-0.1722528708E-01
3	-0.2054426034E-02
4	-0.1077319589E-01
5	0.8281236136E-03
6	-0.1058445125E-02
7	0.1555557493E-03

表12 式(51)の p_k
Table 12 p_k in Eq.(51).

k	p_k
0	0.42278433509846713954D+00
1	0.17813978029026977128D+00
2	-0.17228012454369481991D-01
3	-0.20293432710086953820D-02
4	-0.10888990432723762871D-01
5	0.11315100631780326907D-02
6	-0.15394347023317456012D-02
7	0.63622863743358663451D-03
8	-0.32070558535626737414D-03
9	0.16456311943995781181D-03
10	-0.80460178218057009324D-04
11	0.39742906875610891083D-04
12	-0.18674889365664226449D-04
13	0.80433978454590550967D-05
14	-0.29434141118693496453D-05
15	0.82947817495573909663D-06
16	-0.15552057206815988973D-06
17	0.14251269717748703373D-07

表13 式(52)の p_k および q_k
Table 13 p_k and q_k in Eq.(52).

k	p_k
0	0.3913668581E+03
1	0.7862355531E+03

k	q_k
0	0.1823688289E+04
1	0.1324645422E+04
2	-0.4391740837E+03
3	0.6545005287E+02
4	0.1129487849E+02
5	-0.1554422410E+01
6	0.1000000000E+01

の係数を示す。また、表13および表14に、それぞれ、単精度および倍精度用として求められた $-1 \leq \alpha \leq 0$ における $G_0(\alpha)$ の最良近似式

$$G_0(\alpha) \doteq \frac{\sum_{k=0}^M p_k (1+\alpha)^k}{\sum_{k=0}^N q_k (1+\alpha)^k} \quad (52)$$

の係数を示す。

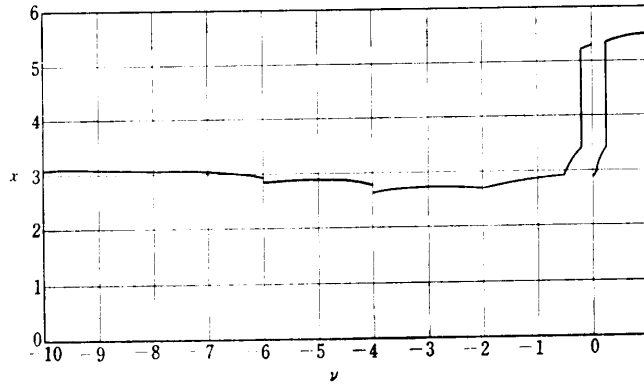


図 2 式(43)および(46)の適用範囲
Fig. 2 Region (under solid line) where Eqs. (43) and (46) are applicable.

表 14 式(52)の p_k および q_k
Table 14 p_k and q_k in Eq.(52).

k	P_k
0	0.824130197482231508200+03
1	0.173496382867131145460+04
2	0.107892295996492786750+03
3	-0.100427322081103033820+03
4	0.130006949015590289160+01
5	-0.364153557820813650980+01
6	-0.335924744455737990640+00
7	-0.244695545802445331090-01

k	Q_k
0	0.384027560308601903730+04
1	0.315905944230683880550+04
2	-0.896092264237532472510+03
3	-0.112255949479276298990+03
4	0.869267249189438375980+02
5	-0.146937479667519399430+02
6	0.10000000000000000000+01

4.3 式(43)および(46)の適用範囲

$C(\nu, x)$ の場合と同様に、規準誤差以内で計算することができる範囲を適用範囲とする。式(43)および(46)の加算を式どおりの順に行った場合について、式(7)の条件を数値的に調べた。図2に、 $-10 \leq \nu < 1$ における結果を示す。実線以下が適用範囲である。図示されていない $\nu \leq -10$ では、 ν の絶対値が大きくなるほど適用範囲は広がる。

式(43)の第2式の右辺第2項の級数および式(46)の右辺第3項の級数は、たとえば、 $x=1$ のときには、 k は単精度では5~6まで、倍精度では9~10までとれば、その精度内に収束している。

5. む す び

本論文では、 x が小さい場合の一般化された余弦積

分関数 $C(\nu, x)$ および正弦積分関数 $S(\nu, x)$ の計算方法を提案した。本方法は、現在のところ、精度および能率の点で最もすぐれていると考えられる。

本論文で示した相対誤差規準に関する最良近似式は、Remesの算法により、名古屋大学大型計算機センター FACOM M-382 の4倍精度演算を用いて求めたものである。

謝辞 おわりに、日頃ご討論いただく本学・鳥居達生教授に感謝します。

参 考 文 献

- 1) National Bureau of Standards: *Handbook of Mathematical Functions*, Appl. Math. Ser. 55, p. 262, U.S. Government Printing Office, Washington, D. C. (1964).
- 2) Longman, I. M.: Note on a Method for Computing Infinite Integrals of Oscillatory Functions, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 52, No. 4, pp. 764-768 (1956).
- 3) Alaylioglu, A., Evans, G. A. and Hyslop, J.: The Evaluation of Oscillatory Integrals with Infinite Limit, *J. Comp. Phys.*, Vol. 13, No. 3, pp. 433-438 (1973).
- 4) 吉田年雄, 二宮市三: 振動する関数の半無限自動積分ルーチンの作成, 情報処理学会第26回全国大会講演論文集(Ⅲ), pp. 1253-1254 (1983).
- 5) 吉田年雄, 二宮市三: x が小さい場合のベッセル関数 $Y_\nu(x)$ の数値計算, 情報処理学会論文誌, Vol. 23, No. 3, pp. 296-303 (1982).
- 6) Clenshaw, C. W.: *Mathematical Tables*, Vol. 5, *Chebyshev Series for Mathematical Functions*, p. 8, Her Majesty's Stationary Office, London (1962).

(昭和59年8月27日受付)
(昭和59年10月18日採録)