Corner the Queen problem の変種についての研究

宮寺 良平[1,a)] 福井 昌則[2,b)] 井上 理哲人[1,c)] 中屋 悠資[1,d)] 戸國 友貴[1,e)]

概要：チェス盤に Queen の駒をおいて，2 人のプレイヤーが交互に Queen を動かして，1 つの端に持って行った者が勝つというゲームがあり，Corner the Queen problem とよばれている．これは，石取りゲームの一種である Wythoff's game と数学的に同値である．私たちは，Queen の駒を別の駒に置き変えた問題を研究して，龍馬 (成り角)，龍王 (成り飛車) で Grundy 数の公式を見つけた．同種の問題であるチョコレート問題においても Grundy 数の公式を見つけた．龍王の場合は，Grundy 数がニム和を使った簡単な公式となる．

キーワード：Wythoff のゲーム　石取りゲーム　Corner the Queen 問題　Grundy 数　ニム和

1. 導入

今回扱うのは，先手後手の打つ手に差がない不偏ゲームとよばれる組み合わせゲームである．個別のゲームのルールに関しては，以後の節において述べるが，ここでは必要な一般論を述べる．ここでは引き分けのないゲームのみを扱うので，どの局面も次のどちらかになる．

定義 1.1. (*i*) *N-position*（先手必勝手）は，その状態から始めるとき，先手のプレイヤーが最適な戦略を使うことによって，先手が必ず勝利できる状態のことである．
(*ii*) *P-position*（後手必勝手）は，その状態から始めるとき，先手のプレイヤーがどのような戦略を使っても，後手のプレイヤーが最適な戦略を使うことによって，後手が必ず勝利できる状態のことである．

次に，必勝法を解析するために必要な Grundy 数について説明する．ここで，一手で進むことができる行き先を全て列挙する関数を move，集合に含まれない最小の非負整数を出力する関数を mex を次のように定義される．

定義 1.2. $\mathbf{p}$ に対して，一手で移動できる集合を $move(\mathbf{p})$ と表記する．

定義 1.3. (*i*) *mex* 関数とは，非負整数からなる集合 S に含まれていない数字の中で，最も小さい非負整数を出力する関数である．
(*ii*) まず，ゲーム終了時の Grundy 数を 0 と定義する．*Grundy* 数とは与えられた状態から一手で移動出来る全ての状態における *Grundy* 数からなる集合に含まれていない最小の非負整数であり，*Grundy* 数を G とすると，以下のように再帰的に定義される．
$G(\mathbf{p}) = mex\{G(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in move(\mathbf{p})\}$

例 1.1. mex の例

$$mex\{0,1,2,3\} = 4, mex\{1,1,2,3\} = 0,$$
$$mex\{0,2,3,5\} = 1, mex\{0,0,0,1\} = 2.$$

ここで，以下の定理が成り立つ．

定理 1.1. G を *Grundy* 数とする．そのとき次のことが成り立つ．
$\mathbf{h}$ が $\mathcal{P}$*-position*（後手必勝手）であるとき，またそのときに限り $G(\mathbf{h}) = 0$.

証明については，[2] に掲載されている．

2. Corner the Queen Problem

定義 2.1. Queen 問題とは，チェス盤の上に Queen の駒を置いて，2 人のプレイヤが交互に Queen を動かして，左上の端に持って行ったプレイヤが勝ちとなるゲームである．以下の図 1 のように座標を定義し，Queen は座標が減る方向，つまり図 2 の ∘ 印の方向に進むことができ，座標の増える方向，つまり図 2 の × 印の方向には進めないとする．

Queen の駒を用いたゲームは，石取りゲームの一種である Wythoff のゲームと数学的に同値であり，後手必勝となる座標はすでに研究されている (証明については [2] 参照). *Queen* の駒を用いたときの move(x, y) は式 (1) のようになる．

1 関西学院高等部
Kwansei Gakuin High School
2 EM Software
a) runners@kwansei.ac.jp
b) masanori.dev@gmail.com
c) 0731inoue@gmail.com
d) math271k@gmail.com
e) helpcut.1092@gmail.com

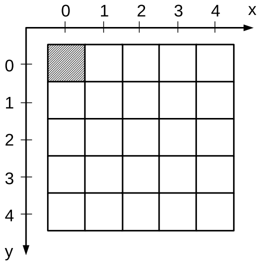

図 1 座標の定義

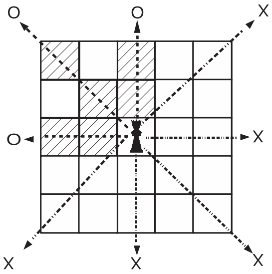

図 2 *Queen* の動き

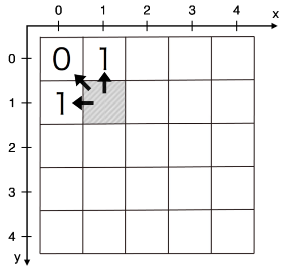

図 5 $(1,1)$ の行き先

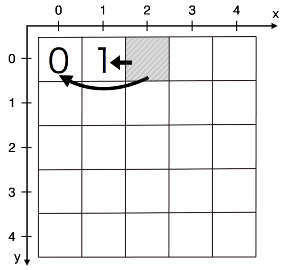

図 6 $(2,0)$ の行き先

$$move(x,y) = \{(u,y) : u < x\} \cup \{(x,v) : v < y\}$$
$$\cup \{(x-t, y-t) : 0 < t \leq \min(x,y)\} \quad (1)$$

Queen を用いたときの Grundy 数の具体的な計算例は以下の通りである．

まず，座標 $(0,0)$ の Grundy 数を 0 と定義する (図 3)．以下，Grundy 数を各座標について決めていくが，方法は再帰的と呼ばれるもので，座標の値が少ないものから Grundy 数を決めていき，次に Grundy 数を決めるときには，そこから移動できる (座標の値の小さい) ところにある Grundy 数全体に含まれない最小の非負整数を用いる．

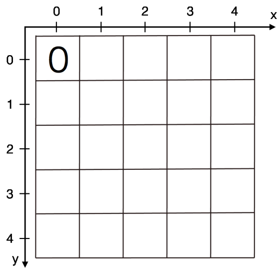

図 3 $(0,0)$ の *Grundy* 数

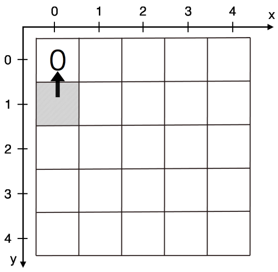

図 4 $(0,1)$ の行き先

図 4 の斜線部 (座標 $(0,1)$) の Grundy 数を求める．Queen は，図 4 のように座標 $(0,1)$ から座標 $(0,0)$ に進むことができ，座標 $(0,0)$ の Grundy 数は 0 であるから，座標 $(0,1)$ の Grundy 数は，行き先の Grundy 数の全体である $\{0\}$ に含まれない最小の非負整数である 1 となる．同様にして，座標 $(1,0)$ の Grundy 数は 1 となる．

次に，座標 $(1,1)$ の Grundy 数を求める．図 5 のように座標 $(0,0), (1,0), (0,1)$ に進むことができ，行き先の Grundy 数の全体は $\{0,1,1\}$ であるから，行き先に含まれない最小の非負整数は 2 となる．よって座標 $(1,1)$ の Grundy 数は 2 となる．次に，座標 $(2,0)$ の Grundy 数を考える．図 6 のように，座標 $(2,0)$ から座標 $(1,0), (0,0)$ に進むことができ，行き先の Grundy 数の全体は $\{1,0\}$ であるから，Grundy 数は 2 となる．次に，座標 $(2,1)$ の Grundy 数を考える．図 7 のように，座標 $(2,1)$ から座標 $(1,0), (2,0), (0,1), (1,1)$ に進むことができ，行き先の Grundy 数の全体は $\{1,2,1,2\}$ であるから，座標 $(2,1)$ の Grundy 数は 0 となる．

以上の計算方法を用いて Grundy 数を計算していくと，Grundy 数の表は以下の図 8 のようになる．

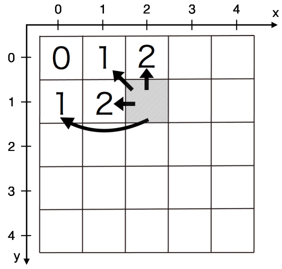

図 7 $(2,1)$ の行き先

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9
3	3	4	5	6	2	0	1	9	10	12	8
4	4	5	3	2	7	6	9	0	1	8	13
5	5	3	4	0	6	8	10	1	2	7	12
6	6	7	8	1	9	10	3	4	5	13	0
7	7	8	6	9	0	1	4	5	3	14	15
8	8	6	7	10	1	2	5	3	4	15	16
9	9	10	11	12	8	7	13	14	15	16	17
10	10	11	9	8	13	12	0	15	16	17	14

図 8 *Queen* 問題の *Grundy* 数

3. Corner the Queen Problem の変種

本節では，Queen 問題の変種について述べる．ここで，私たちは Queen の駒を別の駒に置き換えて研究を行った．

まず，駒を飛車に変更した場合について述べる．

定義 3.1. チェス盤の上で飛車を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイして，左上の座標 $(0,0)$ の位置に持って行ったプレイヤーが勝ちとなる．飛車は，は以下の図 9 のように動くことができる駒であり，石取りゲームの 2 山くずしと数学的に同値である．

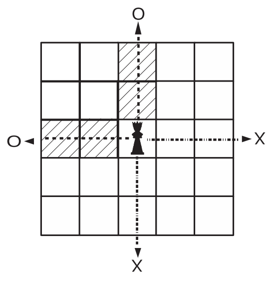

図 9 飛車の動き

飛車の駒を用いたときの $\mathrm{move}(x,y)$ は式 (2) のように

Vol.2016-GI-35 No.6
2016/3/8

なる．

$$move(x, y) = \{(u, y) : u < x\} \cup \{(x, v) : v < y\} \quad (2)$$

次に，駒を龍馬 (成り角) に変更した場合について述べる．

定義 3.2. チェス盤の上で龍馬 (将棋の成り角) を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイして，左上の座標 $(0, 0)$ の位置に持って行ったプレイヤーが勝ちとなる．龍馬は，以下の図 12 のように動くことができる．しかし座標が増える方向へは動けないために，図 10 で × の印がついている方向へ動くことはできない．

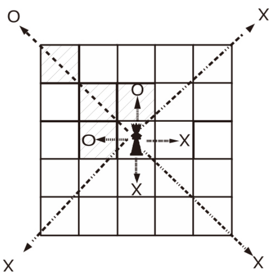

図 10 龍馬の動き

龍馬の move は式 (3) であり，Grundy 数の表は以下の図 11 のようになる．

$$move(x, y) = \{(x - t, y - t) : 0 < t \leq \min(x, y)\} \cup \{(x, y - 1)\} \cup \{(x - 1, y)\} \quad (3)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
2	0	3	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	1	2	0	3	2	3	2	3	2	3	2
4	0	3	1	2	4	5	4	5	4	5	4
5	1	2	0	3	5	6	7	6	7	6	7
6	0	3	1	2	4	7	5	4	5	4	5
7	1	2	0	3	5	6	4	7	6	7	6
8	0	3	1	2	4	7	5	6	8	9	8
9	1	2	0	3	5	6	4	7	9	10	11
10	0	3	1	2	4	7	5	6	8	11	9

図 11 龍馬問題の *Grundy* 数

私たちは，この Grundy 数についての公式を発見し，証明も完成している．公式は以下の通りである．

定理 3.1. （龍馬の Grundy 数）

(1) $y \leq x$ のとき
(1.1) $y = 0\ (mod\ 4)$ のとき
(1.1.1) x が偶数のとき $G(x, y) = y$.
(1.1.2) x が奇数のとき $G(x, y) = y + 1$
(1.2) $y = 1\ (mod\ 4)$ のとき
(1.2.1) x が偶数のとき $G(x, y) = y + 2$.
(1.2.2) x が奇数のとき $G(x, y) = y + 1$
(1.3) $y = 2\ (mod\ 4)$ のとき
(1.3.1) x が偶数のとき $G(x, y) = y - 1$.
(1.3.2) x が奇数のとき $G(x, y) = y - 2$
(1.4) $y = 3\ (mod\ 4)$ のとき
(1.4.1) x が偶数のとき $G(x, y) = y - 1$.
(1.4.2) x が奇数のとき $G(x, y) = y$
(2) $x \leq y$ のとき
(2.1) $x = 0\ (mod\ 4)$ のとき
(2.1.1) y が偶数のとき $G(x, y) = x$.
(2.1.2) y が奇数のとき $G(x, y) = x + 1$
(2.2) $x = 1\ (mod\ 4)$ のとき
(2.2.1) y が偶数のとき $G(x, y) = x + 2$.
(2.2.2) y が奇数のとき $G(x, y) = x + 1$
(2.3) $x = 2\ (mod\ 4)$ のとき
(2.3.1) y が偶数のとき $G(x, y) = x - 1$.
(2.3.2) y が奇数のとき $G(x, y) = x - 2$
(2.4) $x = 3\ (mod\ 4)$ のとき
(2.4.1) y が偶数のとき $G(x, y) = x - 1$.
(2.4.2) y が奇数のとき $G(x, y) = x$

証明は単純な数学的帰納法の繰り返しによって可能であるが，ページ数が多くなるので，本稿では証明を割愛する．

次に，駒を龍王 (成り飛車) に変更した場合について述べる．成り飛車問題とは次のようなものである．

定義 3.3. チェス盤の上で龍王 (成り飛車) を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイして，左上の座標 $(0, 0)$ の位置に持って行ったプレイヤーが勝ちとなる．ただし，座標の値が増える方向に進むことは出来ないとする．

龍王とは，将棋の飛車が成った駒であり，図 12 のような動き方をする．つまり，将棋の飛車と王の動きの両方ができる．しかし座標が増える方向へは動けないために，図 12 で × の印がついている方向へ動くことはできない．

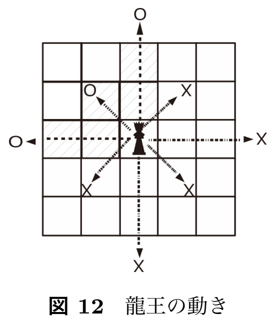

図 12 龍王の動き

龍王の move は式 (4) であり，Grundy 数の図は以下の図 13 のようになる．

$$move(x, y) = \{(u, y) : u < x\} \cup \{(x, v) : v < y\} \cup \{(x - 1, y - 1)\} \quad (4)$$

龍王の Grundy 数の公式を証明するために，いくつかの

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	0	5	4	7	6	9	8	11
2	2	0	4	1	6	3	8	5	10	7	12
3	3	4	0	2	1	6	5	8	7	10	9
4	4	5	1	6	2	0	3	9	11	12	8
5	5	3	6	4	0	1	9	2	12	11	7
6	6	7	8	5	3	2	1	0	4	13	14
7	7	8	5	9	10	11	0	1	2	3	6
8	8	6	9	7	11	10	2	3	1	0	4
9	9	10	7	8	12	13	4	11	0	1	2
10	10	11	12	13	8	7	14	4	3	2	1

図 13　龍王問題の *Grundy* 数

補題を必要とする．

補題 3.1.

$$k \oplus h = mex(\{(k-t) \oplus h : t = 1, 2, ..., k\} \\ \cup \{k \oplus (h-t) : t = 1, 2, ..., h\}). \tag{5}$$

証明.　これは良く知られたニム和 $\oplus$ に関する性質なので，証明は略する． □

補題 3.2.

$$3(k \oplus h) = mex(\bigcup_{u=0}^{2}\{3((k-t) \oplus h) + u : t = 1, 2, ..., k\} \\ \cup \bigcup_{u=0}^{2}\{3(k \oplus (h-t)) + u : t = 1, 2, ..., h\}). \tag{6}$$

証明.　補題 3.1 と mex の定義により

$$k \oplus h \notin \{(k-t) \oplus h : t = 1, 2, ..., k\} \\ \cup \{k \oplus (h-t) : t = 1, 2, ..., h\} \tag{7}$$

となるので，

$$3(k \oplus h) \notin \{3((k-t) \oplus h) : t = 1, 2, ..., k\} \\ \cup \{3(k \oplus (h-t)) : t = 1, 2, ..., h\}. \tag{8}$$

従って，$3(k \oplus h)$ が 3 の倍数であることから明らかに

$$3(k \oplus h) \notin \bigcup_{u=0}^{2}\{3((k-t) \oplus h) + u : t = 1, 2, ..., k\} \\ \cup \bigcup_{u=0}^{2}\{3(k \oplus (h-t)) + u : t = 1, 2, ..., h\} \tag{9}$$

次に，$3(k \oplus h) > s \geq 0$ となるような s を任意に選ぶ．すると，$s = 3t + u$ となるような整数 t, u (ただし，$u = 0, 1, 2$) がある．このとき，$k \oplus h > t \geq 0$ となり，補題 3.1 と mex の定義により

$$t \in \{(k-t) \oplus h : t = 1, 2, ..., k\} \\ \cup \{k \oplus (h-t) : t = 1, 2, ..., h\} \tag{10}$$

となり，

$$s = 3t + u \in \{3((k-t) \oplus h) + u : t = 1, 2, ..., k\} \\ \cup \{3(k \oplus (h-1)) + u : t = 1, 2, ..., h\} \tag{11}$$

となる．従って，mex の定義によりこの補題の結論を得る． □

定理 3.2. (龍王の Grundy 数)

$$G(x, y) = mod(x+y, 3) + 3(\lfloor \frac{x}{3} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{3} \rfloor) \tag{12}$$

ここで，$mod(x+y, 3)$ は $x+y$ を 3 で割った余りである．

証明.　数学的帰納法で証明する。帰納法の仮定として，(u, v) が，$u < x$ または $v < y$ を満たす場合には，式 (12) を満たすとする．

まず，$(x, y) = (3k, 3h)$ となる場合を考える。

$$move((x, y)) = \{(3k-t, 3h) : t = 1, 2, ..., 3k\} \\ \cup \{(3k, 3h-t) : t = 1, 2, ...3h\} \cup \{(3k-1, 3h-1)\} \tag{13}$$

Grundy 数の定義により，

$$G((x, y)) = mex(\{G((3k-t, 3h)) : t = 1, 2, ..., 3k\} \\ \cup \{G((3k, 3h-t)) : t = 1, 2, ..., 3h\} \\ \cup \{G((3k-1, 3h-1))\}) \tag{14}$$

帰納法の仮定により式 (14) は次の式に等しい。

$$mex(\{3((k-1) \oplus h) + 2, 3((k-1) \oplus h) + 1, \\ ..., 3(0 \oplus h) + 2, 3(0 \oplus h) + 1, 3(0 \oplus h)\} \\ \cup \{3(k \oplus (h-1)) + 2, 3(k \oplus (h-1)) + 1, \\ 3(k \oplus (h-1)), ..., 3(k \oplus 0) + 2, 3(k \oplus 0) + 1, 3(k \oplus 0)\} \\ \cup \{3((k-1) \oplus (h-1)) + 2\}) \\ = mex(\bigcup_{u=0}^{2}\{3((k-t) \oplus h) + u : t = 1, 2, ..., k\} \\ \cup \bigcup_{u=0}^{2}\{3(k \oplus (h-t)) + u : t = 1, 2, ..., h\} \\ \cup \{3(k \oplus h) + 2\}). \tag{15}$$

$3(k \oplus h) + 2 \neq 3(k \oplus h)$ であるから，補題 3.2 により，(15) は $3(k \oplus h)$ に等しい．$(x, y) = (3k+1, 3h), (3k+2, 3h), ...$ などの場合の証明も同様である。 □

4. チョコレートゲーム

本節では，チョコレートゲームについて述べる．以下の図 14 のような長方形状の板チョコレートにおいて，黒い正方形の部分は毒が入っていて食べられないが，他の正方形の部分は甘くて美味しい．そのチョコレートを，2 人のプレイヤが交互に線に沿って縦もしくは横一直線にカットし

て，毒の入った正方形の部分を含まない方を食べていき，毒の入った正方形の部分だけを残したプレイヤが勝ちとなるゲームである．上述した飛車問題は，石取りゲームの 2 山くずし (Nim) と同値であるが，長方形状のチョコレートも Nim と同値である．そして，以下の図 15 のように座標を定義し，必勝法を解析することがチョコレートゲームの目的である．

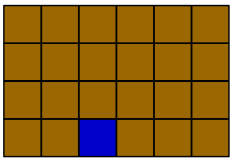

図 14 チョコレートゲーム

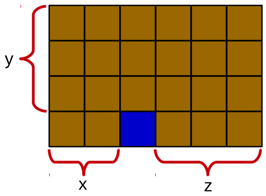

図 15 座標の定義

図 14 のチョコレートゲームはすでに研究されており，必勝法もよく知られている．そこで，我々は以下の図 16 のように変形したチョコレートゲームを研究している．図 16 の階段状チョコレートゲームは，垂直方向のカットにより，水平方向のカットの回数が減る可能性がある．そして，座標を図 17 のように定義する．

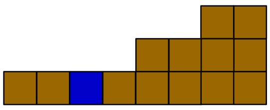

図 16 階段状チョコレートゲーム

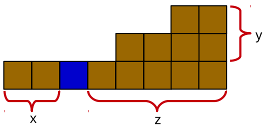

図 17 座標の定義

ここで，直和を定義する．直和はチョコレートゲームの必勝法を研究する際に非常に有用である．

定義 4.1. 二つのゲーム G, H の直和を $G+H$ と表す．これは，プレイヤーが自分の番になると，2 つのゲーム G または，H のどちらか一方だけを選んで，プレーすることによって成立するゲームである．

例えば，図 16 において，各チョコレートゲームは，毒の入った正方形の部分の左側のチョコレートと，毒の入った正方形の部分の右側のチョコレートの直和になっていると考えることができる．このことによって，毒の入った正方形の部分の左側と右側のチョコレートを分割して，それぞれの Grundy 数について研究することが可能となる．

5. Grundy 数が $G(y,z) = y \oplus z$ となるチョコレートゲーム

本節では，Grundy 数が $G(y,z) = y \oplus z$ となるチョコレートゲームについて述べる．ここでは前の節で扱った，図 16 のチョコレートの右の部分にあたるものを扱うので，図 17 のように座標 y, z を決める．

以下の図 18，図 19 のチョコレートは，Grundy 数が $G(y,z) = y \oplus z$ となる．簡単に言えば，z 方向に偶数個右へ行くたびに 1 段上がるタイプのチョコレートがこの Grundy 数の条件を満たす．このチョコレートの詳細については，[4] に記載されている．

例 5.1. チョコレートの例

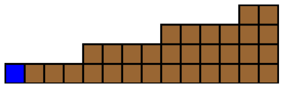

図 18

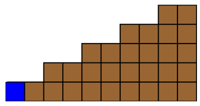

図 19

6. Grundy 数がニム和 $y \oplus z$ と関係がないチョコレートゲーム

第 5 節では，Grundy 数がニム和と一致するタイプのチョコレートについて述べたが，本節では Grundy 数がニム和に一致しないタイプのチョコレートについて述べる．例えば，以下の図 20 のようなタイプのチョコレートの場合，Grundy 数はニム和と一致しない．

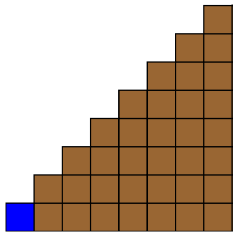

図 20 z 方向に 1 進むと 1 段上がるタイプのチョコレート

このチョコレートに関しては次の定理が成り立つ．

定理 6.1. 図 20 のチョコレートの Grundy 数 $G(\{y,z\})$ は次の式を満たす．ここで，p, q, r は非負整数である．

$$G(2p, 2q) = 2q + p \tag{16}$$

$$G(2p+1, 2q) = 2q - p - 1 - \max(0, 2p - q + 1) \tag{17}$$

$$G(2p, 2q+1) = 2q - p + 1 - \max(0, 2p - q) \tag{18}$$

$$G(2p+1, 2q+1) = 2q + p + 2 \tag{19}$$

$$G(2p, 2(p+r)) = 3p + 2r \tag{20}$$

$$G(2p+1, 2(p+r)) = p + 2r - 1 - \max(0, p - r + 1) \tag{21}$$

$$G(2p, 2(p+r)+1) = p + 2r + 1 - \max(0, p - r) \tag{22}$$

$$G(2p+1, 2(p+r)+1) = 3p + 2r + 2 \tag{23}$$

以下の図 21，図 22，図 23 は図 20 を右に 90 度回転させたチョコレートにおける Grundy 数を表している．定理 6.1 の証明には数学的帰納法を用いるが，証明がかなり長いため，紙面の都合上，図 22，図 23 を用いて，証明の流れについて説明する．

図 22 において，Grundy 数 $G(\{6,16\})$ は，

Vol.2016-GI-35 No.6
2016/3/8

z\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0																		
1	1	2																	
2	2	1	3																
3	3	4	1	5															
4	4	3	5	1	6														
5	5	6	4	7	1	8													
6	6	5	7	4	8	1	9												
7	7	8	6	9	4	10	1	11											
8	8	7	9	6	10	4	11	1	12										
9	9	10	8	11	7	12	4	13	1	14									
10	10	9	11	8	12	7	13	4	14	1	15								
11	11	12	10	13	9	14	7	15	4	16	1	17							
12	12	11	13	10	14	9	15	7	16	4	17	1	18						
13	13	14	12	15	11	16	10	17	7	18	4	19	1	20					
14	14	13	15	12	16	11	17	10	18	7	19	4	20	1	21				
15	15	16	14	17	13	18	12	19	10	20	7	21	4	22	1	23			
16	16	15	17	14	18	13	19	12	20	10	21	7	22	4	23	1	24		
17	17	18	16	19	15	20	14	21	13	22	10	23	7	24	4	25	1	26	
18	18	17	19	16	20	15	21	14	22	13	23	10	24	7	25	4	26	1	27

図 21　Grundy 数の表

z\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0																	
1	1	2																
2	2	1	3															
3	3	4	1	5														
4	4	3	5	1	6													
5	5	6	4	7	1	8												
6	6	5	7	4	8	1	9											
7	7	8	6	9	4	10	1	11										
8	8	7	9	6	10	4	11	1	12									
9	9	10	8	11	7	12	4	13	1	14								
10	10	9	11	8	12	7	13	4	14	1	15							
11	11	12	10	13	9	14	7	15	4	16	1	17						
12	12	11	13	10	14	9	15	7	16	4	17	1	18					
13	13	14	12	15	11	16	10	17	7	18	4	19	1	20				
14	14	13	15	12	16	11	17	10	18	7	19	4	20	1	21			
15	15	16	14	17	13	18	12	19	10	20	7	21	4	22	1	23		
16	16	15	17	14	18	13	19	12	20	10	21	7	22	4	23	1	24	
17	17	18	16	19	15	20	14	21	13	22	10	23	7	24	4	25	1	26

図 22　({6,16}) の move

$\{G(\{y,z\}); \{y,z\} \in move(\{6,16\})\}$

$$= \{G(\{5,16\}), G(\{4,16\}), ..., G(\{0,16\})\} \quad (24)$$

$$\cup \{G(\{6,15\}), G(\{6,14\}), ..., G(\{6,7\})\} \quad (25)$$

$$\cup \{G(\{6,6\}), G(\{5,5\}), ..., G(\{0,0\})\}. \quad (26)$$

ここで, 式 (24), 式 (25), 式 (26) にある Grundy 数を帰納法の仮定により計算すると, 結果としてできる数の集合はそれぞれ $\{13,18,14,17,15,16\}$, $\{12,17,10,15,7,13,4,11,1\}$, $\{9,8,6,5,3,2,0\}$ で, これらの数の集合は, 図 22 においては座標 $\{6,16\}$ のそれぞれ左側, 上側, 上方から左上に向かって並んでいる数字である. よって, Grundy 数 $G(\{6,16\})$ の値は, これらの数の集合に含まれない最小の非負整数であるから, 19 となる. すなわち, $G(\{6,16\}) = 19$.

図 23 において, Grundy 数 $G(\{5,12\})$ は,

$\{G(\{y,z\}); \{y,z\} \in move(\{5,12\})\}$

$$= \{G(\{4,12\}), G(\{3,12\}), ..., G(\{0,12\})\} \quad (27)$$

$$\cup \{G(\{5,11\}), G(\{5,10\}), ..., G(\{5,6\})\} \quad (28)$$

$$\cup \{G(\{5,5\}), G(\{4,4\}), ..., G(\{0,0\})\}. \quad (29)$$

ここで, 式 (27), 式 (28), 式 (29) の Grundy 数を帰納法の仮定により計算すると, 結果としてできる数の集合は $\{14,10,13,16,11,12\}$, $\{14,7,12,4,10,1\}$, $\{8,6,5,3,2,0\}$

z\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0													
1	1	2												
2	2	1	3											
3	3	4	1	5										
4	4	3	5	1	6									
5	5	6	4	7	1	8								
6	6	5	7	4	8	1	9							
7	7	8	6	9	4	10	1	11						
8	8	7	9	6	10	4	11	1	12					
9	9	10	8	11	7	12	4	13	1	14				
10	10	9	11	8	12	7	13	4	14	1	15			
11	11	12	10	13	9	14	7	15	4	16	1	17		
12	12	11	13	10	14	9	15	7	16	4	17	1	18	
13	13	14	12	15	11	16	10	17	7	18	4	19	1	20

図 23　({5,12}) の move

である. これらの数の集合は図 23 において, $\{5,12\}$ の座標 $\{6,16\}$ のそれぞれ左側, 上側, 上方から左上に向かって並んでいる数字である.

よって, Grundy 数 $G(\{5,12\})$ の値は, これらの数の集合に含まれない最小の非負整数であるから, 9 となる. すなわち, $G(\{5,12\}) = 9$ となる.

ここで紹介した方法を用いて定理 6.1 の証明を完成させたが, かなりの分量になってしまう. また, 例えばここでは図はないが, z 方向に 3 進むと 1 段上がるタイプのチョコレートも研究したが, 公式の証明はさらに分量が多くなることが予想されるので, 証明方法を工夫する必要がある.

参考文献

[1] M. H. Albert, 組み合せゲーム理論入門-勝利の方程式-, 共立出版, 2011. (M. H. Albert, R. J. Nowakowski and D. Wolfe, Lessons In Play, A K Peters.)

[2] 佐藤文広, 石取りゲームの数学-ゲームと代数の不思議な関係-, 数学書房, 2014.

[3] 福井昌則, 宮寺良平, 数式処理システムと組み合せゲーム論, 数理解析研究所講究録 Vol.1955, pp.81-90, 2015.

[4] R.Miyadera and S.Nakamura,IMPARTIAL CHOCOLATE BAR GAMES, INTEGERS -electronic journal of combinatorial number theory-,15,2015.

[5] 宮寺良平, 福井昌則, 戸國友貴, 萩倉丈, 森澤太智, 中屋悠資, 澤田健一郎, 数学的ゲームと教育, ゲーム学会「ゲームと教育」研究部会第 9 回研究会報告, pp.4-10, 2015.

[6] 福井昌則, 中村駿佑, 宮寺良平, 不等式を満たすチョコレートゲームの必勝法解析, 研究報告 ゲーム情報学 (GI),2015-GI-33(15),1-5.