 Vol.2016-AL-157 No.3
2016/3/6

ネットワーク型交渉ゲームの安定化アルゴリズム

伊藤 健洋[1]　垣村 尚徳[2]　神山 直之[3]　小林 佑輔[4]　岡本 吉央[5]

概要：ネットワーク型環境における交渉問題をゲーム理論的に研究する．そのような状況で安定解が存在すると常に言えるわけではないため，ネットワークに修正を加えて，安定解が存在するようにしたい．そのような修正は最小限に留めたいので，考える問題はグラフ上の組合せ最適化問題となる．過去の研究において，辺削除については，問題が NP 困難になることが示されていた．本研究では，その他の可能な変更，つまり，辺追加，点削除，点追加に関して，問題が多項式時間で解けることを証明する．また，重み付きバージョンにおいて，辺追加と点削除がともに NP 困難となることを証明する．

1. はじめに

経済学やゲーム理論において，マッチング市場は中心的な役割を果たし，多くの研究が行われてきた．その中でも，マッチング・ゲームと呼ばれる，ネットワークにおけるマッチングから生じる譲渡可能効用を持つ協力ゲームを扱う．(これは再配分を伴う安定ルームメイト問題の協力ゲームとしてのモデル化でもある．) そのようなゲームの例を Eriksson と Karlander [12] が挙げている．

譲渡可能効用を持つ協力ゲームとして，**マッチング・ゲーム**では，ネットワーク (すなわち，無向グラフ) が与えられる．グラフの各頂点がゲームのプレイヤーに対応する．**マッチング**とは，プレイヤーの組の集合で，各プレイヤーが高々 1 組にしか参加せず，組が作られるのは 2 人のプレイヤーの間に辺があるときのみとしたものである．組を作る効用を考慮するために，グラフの辺に重みを付けることも多い．提携の特性関数値は提携上のマッチングの最大効用として定義される．

マッチング・ゲームは多くの研究者によって扱われ，それに対する解概念がアルゴリズムの視点から研究されている [2], [6], [7], [9], [13], [16], [17]．特に，与えられたマッチング・ゲームのコアが非空であることを判定する多項式時間アルゴリズムが知られている [10]．コアが非空であるゲームは望ましい性質を多く持ち，その 1 つは「安定」な利得の存在である．考えるネットワークが二部グラフであるとき，コアは常に非空である．対応するゲームは**割当ゲーム**と呼ばれ，よく研究されている [25]．

その一方で，コアが空であるとき，どの利得も安定ではない．したがって，コアが非空になるようにゲーム自体を変更することがよくある．既存研究では，課税 [21], [27], 安定性の費用 [3]，最小コア [17] といった手法が提案されている．本研究では，ネットワークの構造的変更を考える．これは，後で説明するネットワーク型交渉問題を考えると，自然な変更である．ゲーム自体が大きく変わらないように，変更は小さい方がよい．

変更には可能な方法がいくつかあるが，ここでは次の 4 つを考える．

辺削除：　グラフから辺の集合を削除する．この場合，できる限り少数の辺を削除したい．

辺追加：　グラフに辺の集合を追加する．この場合，できる限り少数の辺を追加したい．

点削除：　グラフから頂点の集合を削除する．頂点を削除するとき，それに接続するすべての辺も削除する．この場合，できる限り少数の頂点を削除したい．

点追加：　グラフに頂点の集合を追加する．頂点を追加するとき，新しい頂点から既にある頂点へ辺を追加してもよい．この場合，できる限り少数の頂点を追加したい．

既存研究では辺削除のみ扱われている．すなわち，問題は最小個数の辺を削除し，非空なコアを持つグラフを作ることである．Biró ら [6] は重みがある場合，問題が **NP** 困難であることを証明した．後に，Bock ら [8] は (上で導入した) 重みがない場合でも問題が **NP** 困難であり，一意ゲーム予想 [18] の下で近似比 2 を達成することが困難であることも証明した．近似アルゴリズムも提案されているが [8], [20]，定数近似アルゴリズムの存在は未解決である．

[1] 東北大学
[2] 東京大学
[3] 九州大学
[4] 筑波大学
[5] 電気通信大学

表 1　結果の概要．∗ 印は本論文の結果である．

重みなし	辺	点
削除	**NP** 困難 [8]	多項式時間 [∗]
追加	多項式時間 [∗]	多項式時間 [∗]
重みあり	辺	点
削除	**NP** 困難 [6]	**NP** 困難 [∗]
追加	**NP** 困難 [∗]	—

結果

本研究は残りの 3 つの場合，すなわち，辺追加，点削除，点追加を扱う．そのすべてに対して，問題が多項式時間で解けることを証明する．これによって，問題の変種に対する計算複雑性の分類を完全に与え，既存研究にある辺削除のみが困難な場合であることを解明した．

多項式時間アルゴリズムを得るために，いわゆる Gallai–Edmonds 分解を積極的に利用する．この分解はグラフにおける最大マッチングの構造に関する有益な情報を持っている．また，後で説明する通り，線形計画法の理論を利用して，考える問題とグラフの分数マッチングを関連付ける．

点追加では，1 頂点を追加したとしても，同時に多くの辺を追加することが可能である．しかし，後で説明する通り，点追加に対する提案するアルゴリズムでは，すべての許容解の中から追加する頂点数だけでなく追加する辺数も最小のものを出力する．

本研究では，重みありの場合も考える．辺追加の場合，追加できる各辺に非負実数が割り当てられている．点削除の場合，各頂点に非負実数が割り当てられている．この実数は追加/削除の費用を表し，可能な変更がどれも同様に行なえるわけではない場合をモデル化している．この設定で，辺追加と点削除がともに **NP** 困難であることを証明する．(紙幅の都合上，この結果の証明を本稿では省略する．)

結果を表 1 にまとめる．

本研究と同時に，Ahmadian ら [1] は点削除を研究し，それが多項式時間で解けること，および，重みがあるとき **NP** 困難となることを証明した．さらに，重みがあるときの近似アルゴリズムも提案している．

ネットワーク型交渉問題との関係

Bateni ら [4] はマッチング・ゲームのコア非空性と Kleinberg と Tardos [19] によるネットワーク型交渉問題における望ましい性質に関係があることを証明した．その関係をここで簡単に紹介する．

Kleinberg と Tardos [19] はネットワーク型交渉問題の数学的基盤を与えた．彼らのモデルでは，ネットワークの各頂点がプレイヤーに対応し，各辺が 2 プレイヤー間の単位量取引に対応する．そして，各プレイヤーはネットワークにおける近傍の高々 1 人としか取引を行うことができない．これにより，交渉の結果はネットワークのマッチングと各プレイヤーが得る値の組として表現される．あるプレイヤーが他のプレイヤーと組になるとき，単位利得がこの 2 プレイヤーの間で分割されて，彼らの得る値となる．どのプレイヤーとも組にならないプレイヤーの得る値は 0 である．Nash [23] が研究した古典的な 2 プレイヤーの場合は，2 頂点・1 辺から成るネットワークに対応する．

交渉の結果が与えられたときに，プレイヤーが現在のマッチングを逸脱することを考えたい．すなわち，プレイヤー A が他のプレイヤー B と組を作るインセンティブがあるのは，ネットワークにおいて，B が A の近傍であり，A と B が取引を行うことにして，B の値が変わらないならば，A の値が上昇するときである．そのようなインセンティブを持つプレイヤーがいないとき，交渉の結果は安定であると呼ばれる．その一方で，交渉の結果が平衡にあるとは，マッチングの辺で結ばれた 2 人のプレイヤーの値が Nash 交渉解によって与えられることである．Kleinberg と Tardos [19] の主結果によると，安定な交渉の結果が存在することと平衡にある交渉の結果が存在することは同値である．Bateni ら [4] は，それがまた，同じネットワーク上のマッチング・ゲームが非空なコアを持つことと同値であることを証明した．

この同値性に基づいて，Bock ら [8] に従い，マッチング・ゲームが非空なコアを持つようにネットワークを変更する過程を**安定化**と呼び，非空なコアを持つマッチング・ゲームを生じるグラフのことを**安定**であると呼ぶ．

ここで，最小コアや安定性の費用を考える際に現れる変更過程よりも本研究が考察対象とする構造的変更がネットワーク型交渉問題の探求において適切であることを強調したい．前者に対する変更は特性関数がマッチング・ゲームから生じたという構造を保存しないため，ネットワーク型交渉問題に対する帰結を導かないのである．

線形計画法との関係

グラフや組合せ論から生じる協力ゲームのコア非空性を研究する際，線形計画法の理論が鍵となることが知られている．マッチング・ゲームに対して，これはグラフのマッチング数と分数マッチング数の関係に翻訳される．

グラフのマッチングは，グラフの各辺へ 0 か 1 を割り当てるとき，グラフの各頂点に接続する辺に割り当てられた値の和が 1 以下となるようなものと見なせる．グラフの**分数マッチング**とは，グラフの各辺へ非負実数を割り当てるベクトルで，グラフの各頂点に接続する辺に割り当てられた値の和が 1 以下となるようなものとして定義される．**マッチング数**とは，グラフにおけるマッチングの最大サイズで，辺への 0 と 1 の割り当てで，マッチングに対応するものの総和の最大値と見なせる．同様に，**分数マッチング数**は，分数マッチングにおいて辺に割り当てられた値の総和の最大値として定義される．

マッチング数の計算は自然に 0/1 整数線形計画問題として定式化され，分数マッチング数の計算は整数制約のない

線形計画問題として定式化される．

定義より，分数マッチング数は常にマッチング数以上である．Deng ら [10] の結果によると，これら 2 つが等しいこととマッチング・ゲームのコアが非空であることは同値である．さらに，コアが非空であるとき，それは分数マッチング数の定式化で現れる線形計画問題の双対問題の最適解集合に一致する．二部グラフである場合 (つまり，割当ゲームの場合) は既に，Shapley と Shubik [25] によって証明されていた．

最適化において，分数マッチング数とマッチング数の差は**整数性ギャップ**と呼ばれ，厳密であれ近似であれ，最適化アルゴリズムを設計する際に重要な役割を果たす．本研究の結果は入力グラフを変更して整数性ギャップを 0 にすることに対応し，この視点をアルゴリズム設計に用いる．

2. 準備

マッチング数と安定グラフ

本稿では，単純無向グラフ G の頂点集合が V であり，辺集合が E であるとき，$G = (V, E)$ と表記する．頂点 $u, v \in V$ の間の辺は $\{u, v\}$ と表記する．頂点集合 V の部分集合 X に対して，$E(X) := \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in X\}$ と定義し，X が誘導する G の部分グラフを $G[X]$ で表す．すなわち，$G[X] = (X, E(X))$ である．頂点 $v \in V$ に対して，$\delta(v)$ で v に接続する辺全体の集合を表す．部分集合 $X \subseteq V$ に対して，$\delta(X) := \bigcup_{v \in X} \delta(v) \setminus E(X)$ と定義する．すなわち，$\delta(X)$ は X から出る辺全体の集合である．部分集合 $X \subseteq V$ に対して，**近傍集合** $N(X)$ を $V \setminus X$ の頂点 v で，$\{u, v\} \in E$ となるような頂点 $u \in X$ が存在するもの全体の集合として定義する．集合 V の部分集合 X で $|X| = 2$ を満たすものをすべて集めたものを $\binom{V}{2}$ で表す．部分集合 $F \subseteq \binom{V}{2} \setminus E$ に対して，G に F の辺を追加してできるグラフを $G + F$ で表す．すなわち，$G + F = (V, E \cup F)$ である．部分集合 $X \subseteq V$ に対して，G から X の頂点を除去してできるグラフを $G - X$ で表す．すなわち，$G - X = (V \setminus X, E \setminus \bigcup_{v \in X} \delta(v))$ である．各辺 $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ に対して，$G + e := G + \{e\}$ と定義し，各頂点 $v \in V$ に対して，$G - v := G - \{v\}$ と定義する．部分集合 $M \subseteq E$ が G の**マッチング**であるとは，M のどの 2 辺も共通端点を持たないことである．要素数最大のマッチングを**最大マッチング**と呼ぶ．最大マッチングの要素数を**マッチング数**と呼び，$\nu(G)$ で表す．**完全マッチング**とは，$|M| = |V|/2$ を満たすマッチング M のことである．

グラフ G の最大マッチングを見つける問題は次の整数計画問題 IP(G) として定式化できる．

$$\nu(G) = \max \left\{ \sum_{e \in E} x(e) \;\middle|\; \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x(e) \le 1 \ (v \in V), \\ x \in \{0, 1\}^E \end{array} \right\}.$$

問題 IP(G) の線形計画緩和 LP(G) を考える．

$$\nu_f(G) := \max \left\{ \sum_{e \in E} x(e) \;\middle|\; \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x(e) \le 1 \ (v \in V), \\ x \in \mathbb{R}_+^E \end{array} \right\}.$$

ここで，$\mathbb{R}_+$ は非負実数全体の集合である．問題 LP(G) の最適値 $\nu_f(G)$ を G の**分数マッチング数**と呼ぶ．ここで，$\nu_f(G) \ge \nu(G)$ が成り立つ．問題 LP(G) の双対問題 DP(G) は次のように書ける．

$$\tau_f(G) := \min \left\{ \sum_{v \in V} y(v) \;\middle|\; \begin{array}{l} y(u) + y(v) \ge 1 \ (\{u, v\} \in E), \\ y \in \mathbb{R}_+^V \end{array} \right\}.$$

線形計画法の強双対定理より，$\nu_f(G) = \tau_f(G)$ が成り立つ．

問題 DP(G) は G の最小点被覆を見つける問題の線形計画緩和であることに注意する．ここで，**点被覆**とは，部分集合 $X \subseteq V$ で，G のどの辺も X の頂点に接続しているもののことである．点被覆の最小要素数を $\tau(G)$ で表す．

グラフ G が安定であることは，G における交渉問題に安定な交渉結果が存在することであり，それは G 上のマッチング・ゲームのコアが非空であることと同値であった．先に述べた通り，G が安定であることは次のように特徴づけられる．

命題 1 ([10])．グラフ G が安定であるとき，そのときに限り，$\nu_f(G) = \nu(G)$ となる．

したがって，グラフ G の安定化は G を変更して得られたグラフ G' が $\nu_f(G') = \nu(G')$ を満たすようにすることである．例えば，辺を追加する場合，部分集合 $F \subseteq \binom{V}{2} \setminus E$ で，$\nu_f(G + F) = \nu(G + F)$ となるものを見つけたい．

Gallai–Edmonds 分解

部分集合 $M \subseteq E$ に対して，M の端点全体の集合を ∂M で表す．すなわち，$\partial M = \bigcup_{e \in M} e$ である．頂点 v が $v \in \partial M$ を満たすとき，v は M によって**被覆される**という．そうでないとき，v は M によって**露出される**という．頂点 $v \in V$ が**本質的**であるとは，v が G のすべての最大マッチングによって被覆されることである．そうでないとき，v は**非本質的**である．

定義 1. (Gallai–Edmonds 分解 [11], [14], [15]) 頂点集合 V の分割 (B, A, D) を次のように定義する．

- B は非本質的頂点全体の集合である．
- $A = N(B)$，すなわち，A は B の近傍集合である．
- $D = V \setminus (B \cup A)$.

分割 (B, A, D) を G の **Gallai–Edmonds 分解**と呼ぶ．

グラフの Gallai–Edmonds 分解は一意に存在し，多項式時間で見つけられることが知られている (例えば [22] 参照)．定義より，$A \cup D$ の頂点はどれも G の最大マッチング M に被覆され，M によって露出される頂点は B にしか現れない．

さらに，有名な Tutte–Berge 公式も Gallai–Edmonds 分

解を用いて書ける．

命題 2. (Tutte–Berge 公式 [5], [26]) $G[B]$ の連結成分の数を $\mathrm{comp}(G[B])$ で表すと，次が成り立つ．

$$\nu(G) = \frac{1}{2}\left(|V| - \mathrm{comp}(G[B]) + |A|\right).$$

Bock ら [8] は Gallai–Edmonds 分解を用いて差 $\nu_f(G) - \nu(G)$ を特徴づけ，辺削除安定化集合の大きさの下界を導出した．本節の残りで，Gallai–Edmonds 分解を用いて，$\mathrm{LP}(G)$ と $\mathrm{DP}(G)$ に対する最適解を明示的に与える (命題 4)．後に，これを用いて，他の変種に対する最小安定化集合を導く．$\mathrm{LP}(G)$ に対する結果は [24] で与えられていることを補足する．そのために，まず Gallai–Edmonds 分解の基本的な性質をまとめる (例えば [22] 参照)．

(a) $G[B]$ の各連結成分 H は因子臨界的である．ここで，グラフ G' が**因子臨界的**であるとは，G' の任意の頂点 v に対して $G' - v$ が完全マッチングを持つことである．つまり，H の頂点数は奇数である．

(b) 任意の最大マッチング M に対して，$G[B]$ の各連結成分 H は以下のいずれか一方のみを満たす．(i) H には M によって露出される頂点が 1 つ存在し，H から出ていく M の辺は存在しない．(ii) H には M によって露出される頂点が存在せず，H から出ていく M の辺は 1 つである．

$G[B]$ の孤立点全体の集合を B_1 とする．$G[B]$ の他の**非自明**な連結成分 (つまり，頂点数が 3 以上である連結成分) の頂点集合を $B_3 = B \setminus B_1$ とする．本稿では，分割 (B_1, B_3, A, D) を Gallai–Edmonds 分解と呼ぶこともある．

グラフ G の最大マッチング M に対して，M **交互閉路** C とは，M の辺が交互に現れる閉路である．ただし，長さが奇数の場合は，1 頂点を除いてそうであればよい．M **交互道**も同様に定義する．Gallai–Edmonds 分解の構造から，次の補題が得られる．

補題 1. $G[B_3]$ の連結成分 H が M によって露出される頂点 v を持つとき，H には v を通る奇数長の M 交互閉路が存在する．

B_1 と A を結ぶ辺によって誘導される二部グラフを $G[B_1, A]$ で表す．G の最大マッチングが B_1 **最適**であるとは，$|\partial M \cap B_1| = \nu(G[B_1, A])$ を満たすこと，すなわち，B_1 につながる M の辺数が最大化されていることとする．最大マッチングを見つける増加道型アルゴリズムにより，B_1 最適マッチングは多項式時間で見つけられる．

命題 3. G の B_1 最適マッチングは常に存在し，多項式時間で発見できる．

B_1 最適マッチングの助けを借りて，$\mathrm{LP}(G)$ と $\mathrm{DP}(G)$ の最適解を与えられるようになる．

命題 4. M は G の B_1 最適マッチングであり，M によって露出される $G[B_3]$ の頂点が $v_1, v_2, \ldots, v_p$ であるとする．

(1) 頂点を共有しない奇数長 M 交互閉路 $C_1, C_2, \ldots, C_p$ において，任意の $i = 1, 2, \ldots, p$ に対して，C_i が v_i を含むとする．このとき，次で定義されるベクトル $x \in \mathbb{R}_+^E$ は $\mathrm{LP}(G)$ の最適解である．

$$x(e) = \begin{cases} 1 & (e \in M \setminus \bigcup_{i=1}^p EC_i \text{ のとき}), \\ 1/2 & (e \in \bigcup_{i=1}^p EC_i \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

ただし，任意の $i = 1, 2, \ldots, p$ に対して EC_i は C_i の辺集合を表す．

(2) $G[B_1, A]$ の最小点被覆を Y とする．このとき，次で定義されるベクトル $y \in \mathbb{R}_+^V$ は $\mathrm{DP}(G)$ の最適解である．

$$y(v) = \begin{cases} 1 & (v \in A \cap Y \text{ のとき}), \\ 0 & (v \in B_1 \setminus Y \text{ のとき}), \\ 1/2 & (\text{その他}). \end{cases}$$

(3) $\mathrm{LP}(G)$ と $\mathrm{DP}(G)$ の最適値は次に等しい．

$$\frac{1}{2}\bigl(|V \setminus B_1| + \nu(G[B_1, A])\bigr). \qquad (1)$$

証明. 言明中で定義された x と y がそれぞれ $\mathrm{LP}(G)$ と $\mathrm{DP}(G)$ の許容解であり，かつ，目的関数値が式 (1) の値に等しいことを示す．

各頂点 $v \in V$ に対して $\sum_{e \in \delta(v)} x(e) \in \{0, 1\}$ であるため，x は $\mathrm{LP}(G)$ の許容解である．また，$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 0$ であるとき，そのときに限り，$v \in B_1 \setminus \partial M$ となるので，x の目的関数値は

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} x(e) &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \sum_{e \in \delta(v)} x(e) \\ &= \frac{1}{2}\bigl(|D| + |A| + |B_3| + |B_1 \cap \partial M|\bigr) \end{aligned}$$

となる．つまり，$|V| = |D| + |A| + |B_3| + |B_1|$ かつ $|B_1 \cap \partial M| = \nu(G[B_1, A])$ なので，これは式 (1) の値に等しい．

一方で，y が $\mathrm{DP}(G)$ の許容解であることは次のように分かる．辺の 1 端点 v が $v \in B_1 \setminus Y$ と $y(v) = 0$ を満たすとき，Y は $G[B_1, A]$ の点被覆なので，もう一方の端点 u は $A \cap Y$ の要素である．ゆえに，$y(u) = 1$ となる．したがって，任意の辺 $\{u, v\}$ に対して $y(u) + y(v) \geq 1$ が成立する．目的関数値は

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} y(v) &= \frac{|D|}{2} + \frac{|A \setminus Y|}{2} + |A \cap Y| + \frac{|B_1 \cap Y|}{2} + \frac{|B_3|}{2} \\ &= \frac{1}{2}\bigl(|D| + |A| + \nu(G[B_1, A]) + |B_3|\bigr) \end{aligned}$$

となる．ここで，最後の等号は $|A \cap Y| + |B_1 \cap Y| = |Y| = \nu(G[B_1, A])$ から導かれる．よって，y の目的関数値は式 (1) の値に等しい．

つまり，この 2 つは式 (1) の値に等しく，線形計画法の

双対定理より，最適解であることが分かる． □

分数マッチング数 $\nu_f(G)$ とマッチング数 $\nu(G)$ の差を

$$d(G) := \nu_f(G) - \nu(G)$$

で表す．命題 2 と 4 を組み合わせると，Gallai–Edmonds 分解によって $d(G)$ を表すことができる．

命題 5. 次が成り立つ．

$$d(G) = \frac{1}{2}\bigl(\mathrm{comp}(G[B_3]) - |A| + \nu(G[B_1, A])\bigr). \quad (2)$$

Bock ら [8] は B_1 最適マッチングによって露出される頂点を持つ $G[B_3]$ の連結成分数が $2d(G)$ に等しいことを証明した．命題 5 より，これは $\mathrm{comp}(G[B_3]) - |A| + \nu(G[B_1, A])$ に等しい．

3. 辺追加

部分集合 $F \subseteq \binom{V}{2} \setminus E$ が**辺追加安定化集合**であるとは，$\nu(G+F) = \nu_f(G+F)$ を満たすことである．本節では，辺追加安定化集合が存在するか判定し，存在する場合に最小サイズの辺追加安定化集合を見つける問題を議論する．

まず，G が辺追加安定化集合を持つための必要条件を考える．

定理 1. $|V|$ が奇数であり，かつ，$\nu(G[B_1, A]) = |B_1|$ であるとき，G には辺追加安定化集合が存在しない．

証明. $\nu(G[B_1, A]) = |B_1|$ という仮定より，命題 4 にある最適値 (1) は $n/2$ に等しい (ただし，$n = |V|$)．したがって，任意の部分集合 $F \subseteq \binom{V}{2} \setminus E$ に対して，

$$\nu_f(G+F) \geq \nu_f(G) = \frac{n}{2}$$

が成り立つ．一方で，n が奇数であるため，任意の部分集合 $F \subseteq \binom{V}{2} \setminus E$ に対して

$$\nu(G+F) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$$

が成り立つ．つまり，G には辺追加安定集合が存在しない． □

次に，G が定理 1 の条件を満たさないとき，辺追加安定化集合の最小サイズが $d(G)$ によって定まることを示す．

定理 2. $|V|$ が偶数であるか，または，$\nu(G[B_1, A]) < |B_1|$ であるとき，G は辺追加安定化集合を持ち，その最小サイズは $\lceil d(G) \rceil$ に等しい．

証明のために，まず，次の補題で，与えられたグラフに辺を 1 つ追加することを考える．そして，定理 2 の証明を行う．

補題 2. 任意の辺 $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ に対して，次が成り立つ．

$$d(G) - d(G+e) \leq 1.$$

証明. まず，

$$\nu(G+e) \leq \nu(G) + 1 \quad (3)$$

が成り立つ．なぜならば，$G+e$ の最大マッチングから，G のマッチングでサイズが $\nu(G+e) - 1 > \nu(G)$ 以上のものを構成できるからである．一方，LP(G) の許容解 x は，$x(e) = 0$ と置くと，LP$(G+e)$ の許容解になるので，

$$\nu_f(G+e) \geq \nu_f(G) \quad (4)$$

が得られる．したがって，式 (3) と式 (4) より，

$$\begin{aligned} & d(G) - d(G+e) \\ & \quad = (\nu_f(G) - \nu_f(G+e)) - (\nu(G) - \nu(G+e)) \leq 1 \end{aligned}$$

が得られ，証明が完了する． □

定理 2 の証明. まず，$\lceil d(G) \rceil$ 個以上辺を追加する必要があることを示す．サイズ p の辺追加安定化集合を $F = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ とする．さらに，$F_0 := \emptyset$ として，各 $i = 1, 2, \ldots, p$ に対して，$F_i := \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ とする．このとき，補題 2 を繰り返し適用することで，

$$d(G) - d(G+F) = \sum_{i=1}^{p} \left(d(G+F_{i-1}) - d(G+F_i)\right) \leq p$$

が得られる．$d(G+F) = 0$ であり，p は整数であるので，$\lceil d(G) \rceil \leq p$ となる．よって，辺追加安定化集合の最小サイズは $\lceil d(G) \rceil$ 以上である．

M を G の B_1 最適マッチングとする．このとき，M によって $G[B_3]$ の頂点が $2d(G)$ 個露出される (第 2 節の最後参照)．次の 2 つの場合を考えることで，サイズ $\lceil d(G) \rceil$ の辺追加安定化集合を見つける．

はじめに，$2d(G)$ が偶数の場合を考える．$G[B_3]$ における露出頂点を使って互いに素である $d(G)$ 個の組を任意に作り，その組の集合を F^* で表す．F^* のサイズは $d(G)$ である．$M \cup F^*$ は $G + F^*$ のマッチングで，そのサイズは $\nu(G) + |F^*|$ であるため，

$$\nu(G+F^*) \geq \nu(G) + |F^*| \quad (5)$$

となることが分かる．命題 4 にあるような DP(G) の半整数最適解を y とする．F^* の各組の端点の値は 1/2 であるため，y は DP$(G+F^*)$ の許容解でもある．つまり，$\tau_f(G+F^*) \leq \tau_f(G)$ となり，線形計画法の双対定理より，

$$\nu_f(G+F^*) \leq \nu_f(G) \quad (6)$$

が得られる．したがって，式 (5)，式 (6) と $|F^*| = d(G)$ より，

$$\begin{aligned} d(G+F^*) &= \nu_f(G+F^*) - \nu(G+F^*) \\ &\leq \nu_f(G) - (\nu(G) + |F^*|) = 0 \end{aligned}$$

の成立が分かる．すなわち，F^* は辺追加安定化集合である．

次に，$2d(G)$ が奇数の場合を考える．このとき，

$$\nu(G[B_1, A]) < |B_1|$$

となる．なぜならば，そうでないとすると，仮定より $|V|$ が偶数でなくてはならないが，$|V| = 2|M| + 2d(G)$ であるため，矛盾が導かれる．$G[B_3]$ における露出頂点と B_1 における露出頂点 s を使って $d(G)$ 個の組を任意に作り，その組の集合を F^* で表す．F^* のサイズは $(2d(G)+1)/2 = \lceil d(G) \rceil$ に等しい．先の場合と同様に，$M \cup F^*$ が $G + F^*$ のマッチングであることから，

$$\nu(G + F^*) \geq \nu(G) + |F^*| \tag{7}$$

が得られる．さらに，命題 4 にあるような $\mathrm{DP}(G)$ の半整数最適解を y として，$y(s)$ の値を 1/2 だけ増加させると，y は $\mathrm{DP}(G + F^*)$ の許容解になる．したがって，

$$\begin{aligned} \nu_f(G + F^*) &= \tau_f(G + F^*) \\ &\leq \tau_f(G) + 1/2 = \nu_f(G) + 1/2 \end{aligned} \tag{8}$$

となり，したがって，式 (7) と式 (8) より

$$\begin{aligned} d(G + F^*) &= \nu_f(G + F^*) - \nu(G + F^*) \\ &\leq (\nu_f(G) + 1/2) - (\nu(G) + |F^*|) = 0 \end{aligned}$$

が得られる (ここで，$|F^*| = d(G) + 1/2$ を用いた)．ゆえに，F^* は辺追加安定化集合である．

以上，どちらの場合においても，F^* はサイズ $\lceil d(G) \rceil$ の辺追加安定化集合であり，この値は最小である． □

定理 1 と 2 から，最小辺追加安定化集合を見つける多項式時間アルゴリズムが見つけられる．

辺追加安定化集合発見アルゴリズム

ステップ 0. G の Gallai–Edmonds 分解 (B_1, B_3, A, D) of G を見つける．

ステップ 1. $G[B_1, A]$ の最大マッチング M^* を見つける．$|V|$ が奇数であり，$\nu(G[B_1, A]) = |B_1|$ であるならば，「G には辺追加安定化集合がない」と出力する．そうでないとき，ステップ 2 に進む．

ステップ 2. B_1 最適マッチング M を見つける．

ステップ 3. B_3 の露出頂点 (と $d(G)$ が奇数の場合は B_1 の露出頂点 1 つ) から，$\lceil d(G) \rceil$ 個の組を作り，出力する．

Gallai–Edmonds 分解と $G[B_1, A]$ の最大マッチング M^* は多項式時間で見つかる．さらに，命題 3 より，ステップ 2 の B_1 最適マッチング M も多項式時間で見つかる．ステップ 3 は簡単なので，次の定理が得られる．

定理 3. 辺追加安定化集合があるか判定し，そうである場合，最小サイズ辺追加安定化集合を見つける多項式時間アルゴリズムが存在する． □

4. 点削除

部分集合 $X \subseteq V$ が**点削除安定化集合**であるとは，$\nu(G-X) = \nu_f(G-X)$ が成り立つことである．$\nu(G-V) = 0 = \nu_f(G-V)$ であるため，点削除安定化集合は必ず存在する．本節では，最小サイズ点削除安定化集合を見つける問題を議論する．

本節の主定理は以下の通りである．

定理 4. 点削除安定化集合の最小サイズは $2d(G)$ である．

定理 4 を証明するために，まずグラフから頂点を 1 つ削除することを考える．グラフ G の Gallai–Edmonds 分解を (B_1, B_3, A, D) として，$B = B_1 \cup B_3$ とする．

補題 3. 各頂点 $v \in V$ に対して，次が成り立つ．

$$d(G) - d(G - v) \leq \begin{cases} 0 & (v \in V \setminus B \text{ のとき}), \\ 1/2 & (v \in B \text{ のとき}). \end{cases}$$

証明. Gallai–Edmonds 分解の定義より，$v \in V \setminus B$ の場合は難しくないので，$v \in B$ の場合のみを考える．

頂点 v は非本質的であるため，

$$\nu(G - v) = \nu(G) \tag{9}$$

が成り立つ．ここで，

$$\nu_f(G - v) \geq \nu_f(G) - \frac{1}{2} \tag{10}$$

を証明する．式 (10) が正しければ，式 (9) を用いると，$d(G) - d(G-v) = (\nu_f(G) - \nu_f(G-v)) - (\nu(G) - \nu(G-v)) \leq 1/2$ が得られ，証明が完了する．

後は，式 (10) を証明すればよい．M を G の B_1 最適マッチングとする．命題 4 のように $\mathrm{LP}(G)$ の半整数最適解 x を定義する．任意の $u \in V$ に対して $\sum_{e \in \delta(u)} x(e) \in \{0, 1\}$ となることに注意する．$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 0$ ならば，x を $E \setminus \delta(v)$ に制限すると，$\mathrm{LP}(G - v)$ の許容解で，目的関数値が $\nu_f(G)$ に等しいものが得られる．よって，$\nu_f(G - v) \geq \nu_f(G)$ となり，つまり，$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1$ と仮定することができる．このとき，v には，2 辺 e, f で $x(e) = x(f) = 1/2$ を満たすものか，あるいは，M の 1 辺で $x(e) = 1$ を満たすものが接続する．この 2 つの場合を分けて考える．

まず，v に 2 辺 e, f で $x(e) = x(f) = 1/2$ を満たすものが接続する場合を考える．x の構造より，頂点 v は奇数長の M 交互閉路 C で，任意の $e \in EC$ に対して $x(e) = 1/2$ となるものに含まれている (EC は C の辺集合とする)．閉路 C には，v を露出する，サイズ $(|EC| - 1)/2$ のマッチング M_C が存在する．ベクトル x' in $\mathbb{R}_+^E$ を

$$x'(e) = \begin{cases} 1 & (e \in EC \cap M_C \text{ のとき}), \\ 0 & (e \in EC \setminus M_C \text{ のとき}), \\ x(e) & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，x' は $\mathrm{LP}(G)$ の許容解であり，$\sum_{e\in E} x'(e) = \nu_f(G) - 1/2$ を満たす．x' を $E \setminus \delta(v)$ に制限することで，$\mathrm{LP}(G-v)$ の許容解が得られ，$\sum_{e\in\delta(v)} x'(e) = 0$ が成り立つので，$\mathrm{LP}(G-v)$ における目的関数値は $\nu_f(G)-1/2$ である．したがって，$\nu_f(G-v) \geq \nu_f(G) - 1/2$ が得られる．

あとは，v に M の 1 辺で $x(e) = 1$ を満たすものが接続する場合を考えればよい．$v \in B$ なので，G において v を露出する最大マッチング M_v が存在する．対称差 $M\Delta M_v$ には v から頂点 $w \notin \partial M$ へ至る M 交互道 P が存在する．$C_1, \ldots, C_p$ を命題 4 で定義された M 交互閉路とする．ある C_i に e が含まれるとき，そのときに限り，$x(e) = 1/2$ が成り立つことに注意する．

まず，P がどの C_i とも交わらない場合を考える．このとき，P の辺集合を EP とすると，各 $e \in EP$ に対して $x(e) \in \{0, 1\}$ が成り立つ．ベクトル $x' \in \mathbb{R}^E_+$ を

$$x'(e) = \begin{cases} 0 & (e \in EP \cap M \text{ のとき}), \\ 1 & (e \in EP \setminus M \text{ のとき}), \\ x(e) & (\text{その他}) \end{cases} \tag{11}$$

で定義すると，x' は $\mathrm{LP}(G)$ の許容解である．さらに，P の長さは偶数なので，$\sum_{e\in E} x'(e) = \sum_{e\in E} x(e) = \nu_f(G)$ が成り立つ．x' を $E \setminus \delta(v)$ に制限すると $\mathrm{LP}(G-v)$ の許容解になり，$\sum_{e\in\delta(v)} x'(e) = 0$ が成り立つので，$\mathrm{LP}(G-v)$ に関する目的関数値は $\nu_f(G)$ である．したがって，$\nu_f(G-v) \geq \nu_f(G)$ が成立する．

次に，P がある C_i と交わる場合を考える．P がちょうど 1 つの C_i (それを C とする) とだけ交わると仮定してよい．実際，v から始めて P を辿っていき，P がある C_i と最初に交わるときを考える．そのとき，v から C_i までの P の部分道と C_i の合併は，v から C_i の露出頂点に至る偶数長の M 交互道を含んでいて，それを P と交換してもよい．ベクトル $x' \in \mathbb{R}^E_+$ を

$$x'(e) = \begin{cases} 0 & (e \in (EP \cap M) \cup (EC' \setminus M) \text{ のとき}), \\ 1 & (e \in (EP \setminus M) \cup (EC' \cap M) \text{ のとき}), \\ x(e) & (\text{その他}) \end{cases} \tag{12}$$

として定義する (EC は C の辺集合で，$EC' = EC \setminus EP$ とする)．このとき，x' は $\mathrm{LP}(G)$ の許容解である．さらに，$\sum_{e\in EP\cup EC} x'(e) = \sum_{e\in EP\cup EC} x(e) - 1/2$ であるので，$\sum_{e\in E} x'(e) = \nu_f(G) - 1/2$ が成り立つ．x' を $E \setminus \delta(v)$ に制限すると $\mathrm{LP}(G-v)$ の許容解が得られ，$\sum_{e\in\delta(v)} x'(e) = 0$ が成り立つので，$\mathrm{LP}(G-v)$ に関する目的関数値は $\nu_f(G)-1/2$ である．ゆえに，$\nu_f(G-v) \geq \nu_f(G) - 1/2$ が成り立つ．したがって，どちらの場合においても，$\nu_f(G-v) \geq \nu_f(G) - 1/2$ が成り立つ． □

定理 4 の証明． まず，$d(G)$ 個以上の頂点を除去する必要があることを証明する．サイズ p の点除去安定化集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ を考える．$X_0 := \emptyset$ として，各 $i = 1, 2, \ldots, p$ に対して $X_i := \{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$ と定義する．このとき，補題 3 より，$d(G) - d(G-X) = \sum_{i=1}^{p} (d(G - X_{i-1}) - d(G - X_i)) \leq p/2$ となる．$d(G - X) = 0$ であるので，$p \geq 2d(G)$ が得られる．

M を G における B_1 最適マッチングとする．このとき，$G[B_3]$ には，M によって露出される頂点が $2d(G)$ 個存在する．それらの集合を X^* で表すと，X^* のサイズは $2d(G)$ であり，$\nu(G - X^*) = \nu(G)$ が成り立つ．この X^* が点除去安定化集合であることを示す．

命題 4 より，$\mathrm{DP}(G)$ の半整数最適解 y で，任意の頂点 $v \in B_3$ に対して $y(v) = 1/2$ を満たすものが存在する．y を $V \setminus X^*$ に制限することで得られるベクトルは $\mathrm{DP}(G - X^*)$ の許容解で，その目的関数値は

$$\tau_f(G) - \frac{1}{2}|X^*| = \nu_f(G) - \frac{1}{2}|X^*| = \nu_f(G) - d(G)$$

である．したがって，$\tau_f(G - X^*) \leq \nu_f(G) - d(G)$ となる．$\nu_f(G - X^*) = \tau_f(G - X^*)$ なので，$d(G - X^*) = \nu_f(G - X^*) - \nu(G - X^*) \leq (\nu_f(G) - d(G)) - \nu(G) = 0$ が得られる．これによって，X^* が最小サイズ $d(G)$ の点除去安定化集合であることが分かった． □

定理 4 から最小点除去安定化集合を見つける多項式時間アルゴリズムが導かれる．そのアルゴリズムでは，G の B_1 最適マッチング M を見つけて，M によって露出される $G[B_3]$ の頂点全体を出力する．命題 3 より，G の B_1 最適マッチングは多項式時間で見つかる．したがって，次の定理が得られる．

定理 5. 最小点除去安定化集合は多項式時間で発見できる． □

5. 点追加

頂点の集合 X に対して，G に X と X から出る辺を追加することで得られるグラフを $G + X$ と書く．$G + X$ は一意に決まらないが，下の議論は点追加によって得られる任意のグラフに対して成立する．$X = \{v\}$ であるときは単に $G + v$ と書く．**点追加安定化集合**は頂点の集合 X で，X と X から出るいくつかの辺を追加してできるグラフが安定であるもののことである．

第 3 節および第 4 節と同様に，1 頂点の追加に関する次の補題を導く．ページ数制限の都合上，証明は省略する．

補題 4. 任意の頂点 v に対して，$d(G) - d(G + v) \leq 1/2$ が成り立つ．

補題 4 から，定理 4 に似た命題が得られ，すなわち，点追加安定化集合のサイズが $2d(G)$ 以上でなくてはならないことが分かる．さらに，サイズ $2d(G)$ の点追加安定化集合は次のように見つけられる．定理 4 と同様に G の B_1 最適

マッチングによって露出される $G[B_3]$ の $2d(G)$ 個の頂点の集合を X とする．G に $2d(G)$ 個の頂点を新たに追加し，それら 1 つ 1 つと X の異なる頂点を 1 つの辺で結ぶ．このとき，得られるグラフは安定になる．

定理 6. 点追加安定化集合の最小サイズは $2d(G)$ に等しい．さらに，最小点追加安定化集合は多項式時間で見つかる． □

このアルゴリズムで追加される辺の数は $2d(G)$ であり，追加される頂点と辺の総数を最小化する場合でも，これは最適である．

謝辞 本研究は，科研費 25330003, 15H00849, 25730001, 24106002, 24700004, 24106005, 24700008, 24220003, 15K00009, JST さきがけ，JST ERATO 河原林巨大グラフプロジェクトの支援を受けて行われた．

参考文献

[1] Ahmadian, S., Sanita, L. and Hosseinzadeh, H.: Stabilizing network bargaining games by blocking players, *Proceedings of 18th IPCO* (2016). To appear.

[2] Aziz, H. and de Keijzer, B.: Shapley meets Shapley, *Proceedings of 31st STACS*, pp. 99–111 (2014).

[3] Bachrach, Y., Elkind, E., Meir, R., Pasechnik, D. V., Zuckerman, M., Rothe, J. and Rosenschein, J. S.: The cost of stability in coalitional games, *Proceedings of 2nd SAGT*, pp. 122–134 (2009).

[4] Bateni, M., Hajiaghayi, M., Immorlica, N. and Mahini, H.: The cooperative game theory foundations of network bargaining games, *Proceedings of 37th ICALP, Part I*, pp. 67–78 (2010).

[5] Berge, C.: Sur le couplage maximum d'un graphe, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences [Paris]*, Vol. 247, pp. 258–259 (1958).

[6] Biró, P., Bomhoff, M., Golovach, P. A., Kern, W. and Paulusma, D.: Solutions for the stable roommates problem with payments, *Theoretical Computer Science*, Vol. 540, pp. 53–61 (2014).

[7] Biró, P., Kern, W. and Paulusma, D.: Computing solutions for matching games, *International Journal of Game Theory*, Vol. 41, No. 1, pp. 75–90 (2012).

[8] Bock, A., Chandrasekaran, K., Könemann, J., Peis, B. and Sanità, L.: Finding small stabilizers for unstable graphs, *Mathematical Programming, Series B*, Vol. 154, No. 1-2, pp. 173–196 (2015).

[9] Chen, N., Lu, P. and Zhang, H.: Computing the nucleolus of matching, cover and clique games, *Proceedings of 26th AAAI* (2012).

[10] Deng, X., Ibaraki, T. and Nagamochi, H.: Algorithmic aspects of the core of combinatorial optimization games, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 24, No. 3, pp. 751–766 (1999).

[11] Edmonds, J.: Paths, trees, and flowers, *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 17, pp. 449–467 (1965).

[12] Eriksson, K. and Karlander, J.: Stable outcomes of the roommate game with transferable utility, *International Journal of Game Theory*, Vol. 29, No. 4, pp. 555–569 (2001).

[13] Faigle, U., Kern, W., Fekete, S. P. and Hochstättler, W.: The nucleon of cooperative games and an algorithm for matching games, *Mathematical Programming*, Vol. 83, pp. 195–211 (1998).

[14] Gallai, T.: Kritische Graphen II, *A Magyar Tudományos Akadémia – Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*, Vol. 8, pp. 373–395 (1963).

[15] Gallai, T.: Maximale Systeme unabhänginger Kanten, *A Magyar Tudományos Akadémia – Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*, Vol. 9, pp. 401–413 (1964).

[16] Hochstättler, W., Jin, H. and Nickel, R.: Note on an auction procedure for a matching game in polynomial time, *Proceedings of 2nd AAIM*, pp. 387–394 (2006).

[17] Kern, W. and Paulusma, D.: Matching games: The least core and the nucleolus, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 28, No. 2, pp. 294–308 (2003).

[18] Khot, S.: On the power of unique 2-prover 1-round games, *Proceedings of 34th STOC*, pp. 767–775 (2002).

[19] Kleinberg, J. M. and Tardos, É.: Balanced outcomes in social exchange networks, *Proceedings of 40th STOC*, pp. 295–304 (2008).

[20] Könemann, J., Larson, K. and Steiner, D.: Network bargaining: Using approximate blocking sets to stabilize unstable instances, *Theory of Computing Systems*, Vol. 57, No. 3, pp. 655–672 (2015).

[21] Kwon, Y. K. and Yu, P. L.: Stabilization through taxation in n-person games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 23, No. 2, pp. 277–284 (1977).

[22] Lovász, L. and Plummer, M. D.: *Matching Theory*, Annals of Discrete Mathematics, Vol. 29, North-Holland, Amsterdam (1986).

[23] Nash, J. F.: The bargaining problem, *Econometrica*, Vol. 18, No. 2, pp. 155–162 (1950).

[24] Pulleyblank, W.: Fractional matchings and the Edmonds-Gallai theorem, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 16, No. 1, pp. 51 – 58 (1987).

[25] Shapley, L. and Shubik, M.: The assignment game I: The core, *International Journal of Game Theory*, Vol. 1, No. 1, pp. 111–130 (1971).

[26] Tutte, W. T.: The factorization of linear graphs, *The Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 22, pp. 107–111 (1947).

[27] Zick, Y., Polukarov, M. and Jennings, N. R.: Taxation and stability in cooperative games, *Proceedings of 12th AAMAS*, pp. 523–530 (2013).