

拡散方程式に対する最適な差分スキーム†

小 嶋 卓††

本論文は拡散方程式に対する最適化された差分スキームに関するものである。典型的ないくつかの無条件安定なスキームはインパルス応答問題のように高次のモードを励起すると振動する性質をもっている。この振動は厳密解には存在しない負の固有値に起因している。六つの典型的なスキームを取り上げ、固有値の分布を計算した。この固有値の分布が厳密解に最も似ていることが最良といえる。多くのスキームが固有値の平均二乗誤差が極小になる点をもつことを明らかにし、固有値の平均二乗誤差の最小化の考えの下に、汎用差分スキームのインプリシットファクタを最適化することにより、新しいスキームを得た。

1. ま え が き

偏微分方程式の数値解法には差分法、有限要素法、重みつき残差法、境界要素法などが知られている。このうち差分法や有限要素法などはその定式化の方法により、explicit な方法と implicit な方法に分けられる。どちらを選ぶか、また implicit な方法のなかでも、どの程度 implicit にするか（この係数を implicit factor と呼ぶ）については適当な指針がこれまでに示されておらず、シミュレーションを行う場合、試行錯誤的に決められているのが実情である。

安定条件については古くから研究されているが、安定だからといって、必ずしも元の方程式の物理的性質を満足する解が得られるとは限らない。たとえば振動が現れないはずの拡散方程式に対して、無条件安定な Crank-Nicolson のスキームを適用し、時間のきざみと空間のきざみの2乗との比率を大きくすると振動が現れる^{12), 16)}。

このように implicit factor や時間と空間のきざみの選び方がきわめて重要であるにもかかわらず、適当な指針となる考え方が示されていない。その理由には元の方程式により、また境界条件により事情が異なり、一般論になりにくいことがあげられる。一方、実際の計算に当たって計算機の速度や容量の制約から、implicit factor や時間のきざみが決められている場合が多いと思われるが、計算機の速度や容量の制約が大幅に緩和されてきた今日、解法本来の最適な implicit factor や最適な時間、空間のきざみの値を明らかにしておく必要が出てきている。

本研究はこのような背景から、まず拡散方程式を取り上げ（空間一次元の非定常問題）、従来から提案されている各種の離散スキーム（差分法、有限要素法、重みつき残差法）を含む汎用の差分スキームに対して、最適な implicit factor や最適な時間と空間のきざみを明らかにした。この場合、最適性の基準は、安定であること、元の方程式の物理的性質（ここでは非振動条件）を満たすこと、および近似離散スキームの固有値の分布が元の方程式の解析解のものに近いこと（ここでは固有値の平均二乗誤差の最小）である。

2. 厳密解と局所的フーリエ数

拡散方程式（熱伝導方程式）は

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq L) \quad (2.1)$$

で表される。y は濃度（または温度）で、a は拡散係数（または熱拡散率である。ここでは初期値問題を中心に考え、境界条件は、

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad (2.2)$$

とする。この場合の厳密解はフーリエの方法により

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a(n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (2.3)$$

となる。C_n は初期条件から決まる定数である。

後述の離散スキームとの比較を行うため、時間や空間を格子点上のみで与え、その点上の解を取り出すことにする。時間きざみ Δt, 空間きざみ Δx = L/N とし、y(x, t) = y(iΔx, kΔt) を y_i^k と略記する。このとき格子点上の解は

$$y_i^k = \sum_{n=1}^{N-1} C_n (\lambda_n^*)^k u_{n,i} \quad (2.4)$$

ただし

$$\lambda_n^* = e^{-a(\Delta t / \Delta x^2)(n\pi/N)^2}, \quad u_{n,i} = \sin \frac{n\pi i}{N} \quad (2.5)$$

$$\lambda_n^* = e^{-a(\Delta t / \Delta x^2)(n\pi/N)^2}, \quad u_{n,i} = \sin \frac{n\pi i}{N} \quad (2.6)$$

† An Optimum Finite Difference Scheme for the Diffusion Equation by TAKASHI KOJIMA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Shizuoka University).

†† 静岡大学工学部情報工学科

この λ_n^* は後述の各種離散スキームの固有値に対応しており、 $u_{n,i}$ は固有ベクトルの要素に対応している。

λ_n^* の指数関数の肩に出てくる時間と空間のきざみに関する定数を

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \equiv F \quad (2.7)$$

と定義する。この定数は無次元の単位をもち、熱学というフーリエ数¹⁹⁾と同じ物理的意味をもっている。ただし時間や空間は一般的な量ではなく、時間や空間のきざみ値であるため、ミクロな意味でのフーリエ数であることから、ここでは局所的フーリエ数と呼ぶことにする。

3. 各種の離散スキームと固有値の分布

元の方程式(2.1)に対する汎用離散スキームは

$$D_t y_i^t = F \{ \theta D_x^2 y_i^{t+1} + (1-\theta) D_x^2 y_i^t \} \quad (3.1)$$

と表される^{11-3), 6), 7)}。ここで D_t は時間に対する1階の前進差分演算子、 D_x^2 は空間に対する2階の中心差分演算子である。 θ は一種の重みづけの係数であり、 $\theta=0$ なら explicit なスキーム、 $\theta=1/2$ なら Crank-Nicolson のスキームといったように、その値でスキームに名前が付いている。この値はスキームの implicit な度合を示すことから、ここでは implicit factor と呼ぶことにする。具体的に検討したスキームは次の6種とした。Dufort-Frankel のスキームのような特殊なものは除外した。

- a) $\theta=0$ explicit なスキーム
- b) $\theta=1$ Laasonen のスキーム³⁾ (O'Brien のスキーム⁷⁾, 完全陰型)
- c) $\theta=1/2$ Crank-Nicolson のスキーム
- d) $\theta=1/2-1/12F$ Gelfand-Lokutsiefski のスキーム^{4), 6)} (Douglass のスキーム⁵⁾)
- e) $\theta=2/3-1/6F$ 有限要素法⁹⁾
- f) $\theta=2/3-1/8F$ 重みつき残差法⁹⁾

一般的にこれらの θ は $\theta = \rho - \sigma/F$ と書ける。有限要素法の $\rho=2/3$ は Zienkiewicz の推奨する値¹²⁾ であり、 $\sigma=1/6$ はシン普森則演算子の値¹³⁾ である。重みつき残差法の $\sigma=1/8$ はステップ関数を重みづけ関数とした値⁹⁾ である。また $\sigma=0$ は集中質量型のスキーム、 $\sigma \neq 0$ は整合質量型のスキームと呼ばれている^{10), 13)}。

さて(3.1)を行列とベクトルで表現することにする、

$$A y^{t+1} = B y^t \quad (3.2)$$

$$A = I - F \theta D_x^2$$

$$B = I + F(1-\theta) D_x^2$$

$$D_x^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

のようになり、 $A^{-1}B$ の固有値がこの離散スキームの挙動を決めることになる。 $A^{-1}B$ は D_x^2 の有理式であるので、フロベニウスの定理より、 $A^{-1}B$ の固有値は D_x^2 の固有値をその有理式に代入したものとなる。 D_x^2 の固有値を μ_n 固有ベクトルの要素を $u_{n,i}$ とすると

$$\mu_n = -4 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2N} \right), \quad u_{n,i} = \sin \left(\frac{ni\pi}{N} \right) \quad (3.3)$$

となる。結局 $A^{-1}B$ の固有値 λ_n は次のようになる。

$$\lambda_n = \left\{ 1 - 4F(1-\theta) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2N} \right) \right\} / \left\{ 1 + 4F\theta \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2N} \right) \right\} \quad (3.4)$$

固有ベクトルはフロベニウスの定理より $u_{n,i}$ と同じである。

具体的にどのような θ のとき、どのような固有値の分布になるかを調べてみた。前に述べた6種のスキームについて、 F を $1/8$ から $1/8$ きざみで1まで(3.4)を計算してプロットしたものが図1(a)~(f)である。ただし、(e)と(f)については後述の最適化を行ったものである。図1(g)は厳密解(2.5)から計算したものである。また図1(h)は後述の新しい最適なスキームのものである。固有値が負となると $(\lambda_n)^t$ は1ステップごとに符号が変わり、そのモードが振動を起こすことになる。また -1 よりも小さくなると発散する。

厳密解の分布パターンをみると拡散方程式の解には振動する成分が含まれていない。したがって、近似離散スキームの固有値も非負であることが望ましい。このすべての固有値が非負(非振動)の条件を満たすスキームは図からわかるとおり、Laasonen のスキームと新しい最適型のスキームだけである。他のものは F を大きくすると少なからず負の固有値をもつ。

4. 固有値の平均二乗誤差

厳密解から導かれる固有値 λ_n^* と離散スキームから導かれる固有値 λ_n との平均二乗誤差 E を次式で定義する。

$$E(F, N) = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} (\lambda_n - \lambda_n^*)^2}{(N-1)} \quad (4.1)$$

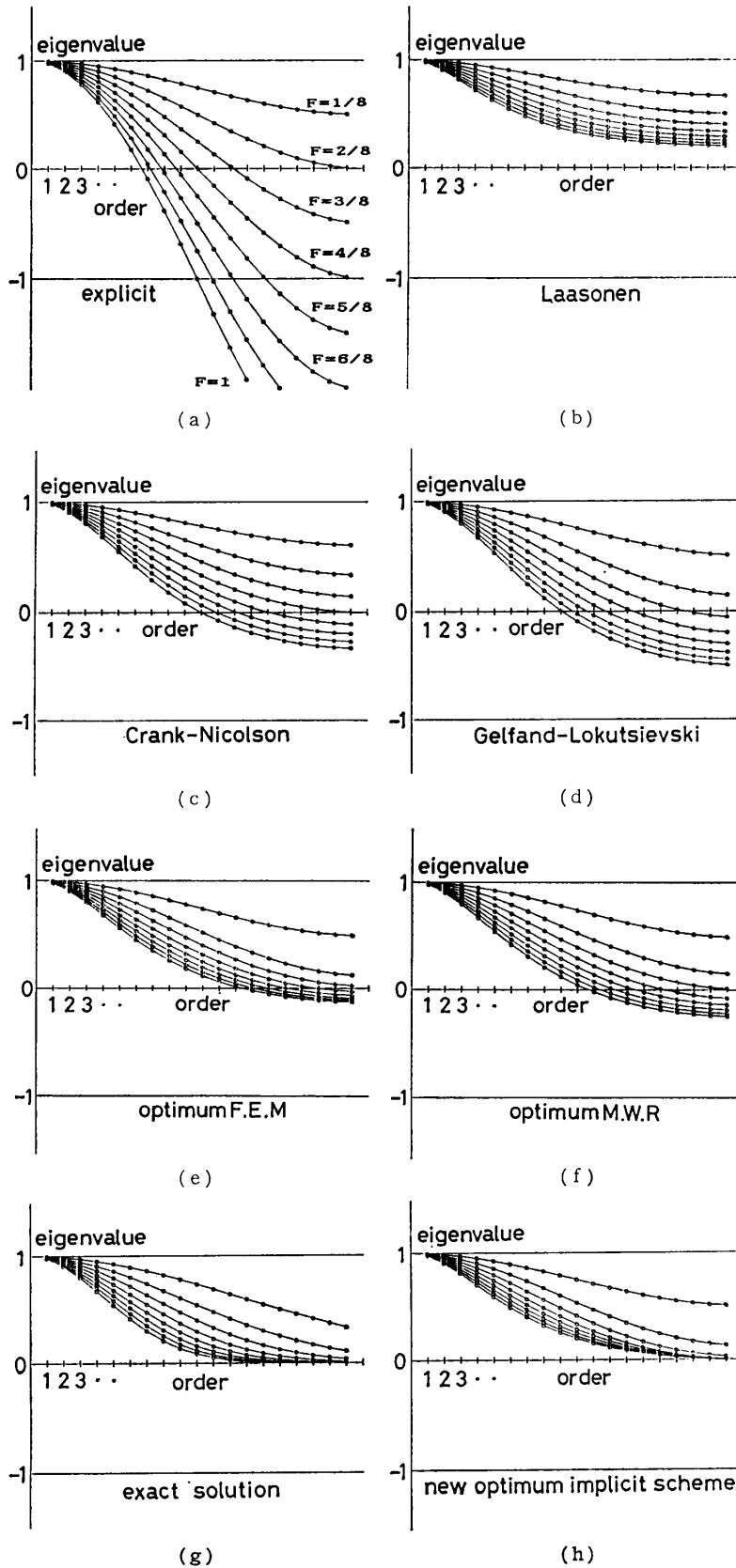


図 1 いろいろな F に対する各種の離散スキームの固有値の分布
 Fig. 1 Distribution pattern of eigenvalues for each discrete scheme with various F .
 $N=20$, $F=1/8, 2/8, \dots, 7/8, 1$ (8 cases) for each scheme.

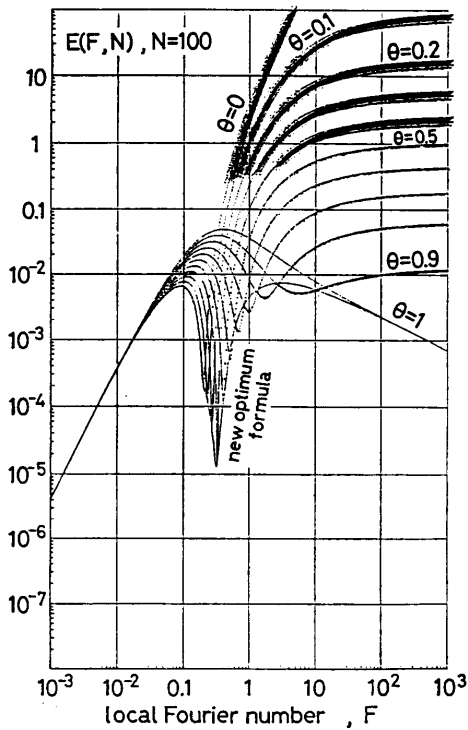


図 2 集中質量型のスキームの平均二乗誤差 implicit factor θ を変えたもの

Fig. 2 Mean square error of eigenvalues for lamped-mass type scheme with various implicit factor θ .

$N=100$, $\theta=0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$ and new scheme. (12 cases)

- : all eigenvalues are non-negative. (normal)
- $\triangle\triangle$: one or more negative eigenvalue(s). (oscillatory)
- ** : one or more eigenvalue(s) less than -1 . (unstable)

E は固有値の分布がどの程度、厳密解にフィットしているかを示す一つの尺度である。この(4.1)を計算し、プロットしたのが図 2、図 3(a)である。図 3(a)では集中質量型のみで、 θ を 0 から 1 まで 0.1 きざみでプロットした。横軸が局所的フーリエ数、縦軸が平均二乗誤差であり、両軸とも対数スケールである。細い実線はすべての λ_n が非負の部分であり、小さな \triangle 印でプロットした部分は一つ以上の λ_n が負となっている部分(振動する部分)、*印でプロットした部分(最も太く見える)は一つ以上の λ_n が -1 より小となっている部分(不安定な部分)である。すべての曲線の極小の包絡線になっているのが後述の新しい最適型のスキームである。ただし F が 0.5 付近から極小の点より上を通っているが、これは極小点において一つ以上の固有値が負となったため、すべての固有値が非

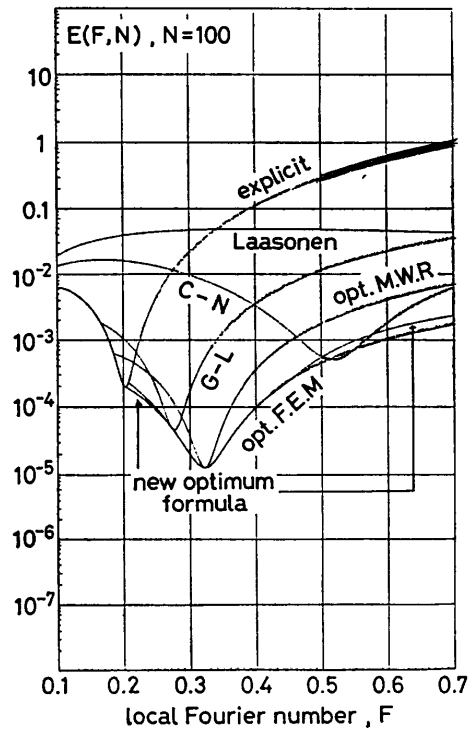


図 3(a) 典型的なスキームの固有値の平均二乗誤差 Fig. 3(a) Mean square error of eigenvalues for typical scheme.

- : all eigenvalues are non-negative. (normal)
- $\triangle\triangle$: one or more negative eigenvalue(s). (oscillatory)
- ** : one or more eigenvalue(s) less than -1 . (unstable)

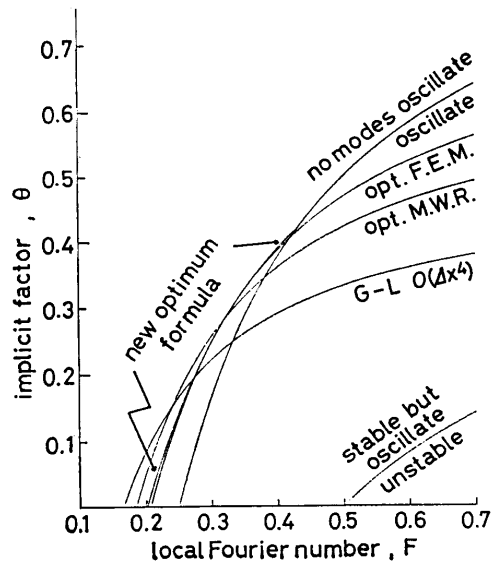


図 3(b) 典型的なスキームの implicit factor Fig. 3(b) Implicit factor for typical scheme horizontal scale is same as Fig. 3a.

負の条件を優先させた。

$\theta=1$ の Laasonen のスキーム以外は極小をもつ。

とくに $\theta=0.3$ のスキームは $F=0.3$ 付近で極小をもち、極小の包絡線の極小になっている。 $F=0.1$ 付近ではどの θ についても平均二乗誤差が大きくなり、包絡線の極小と同じくらいまで下るのは、その極小点から F が2桁程度も小さくなった点である。

図 3(a) は同様な平均二乗誤差のプロットであるが、横軸の局所的フーリエ数の範囲を 0.1~0.7 の範囲に限定し、リニアスケールとした点が異なる。またプロットした対象は3節で述べた4種のスキームと後述の3種の最適型スキームである。また図 3(b) は図 3(a) に対応する θ の値をプロットしたもので、横軸は図 3(a) と共通にとってある (ただし質量集中型のものは水平な直線となるのでプロットは省略し、安定条件と非振動条件をプロットした)。

5. 最適型の新しいスキーム

いろいろなスキームの極小の包絡線 (ただし極小点で一つ以上の固有値が負となる場合には極小をとらず、すべての固有値が非負の条件下で最小の点をとる) になるものが、ここで提案する新しい最適型のスキームである。このスキームを求めるのに重要な点をまとめると次のようになる。この結果はすでに図 2 および図 3(a) に示されている。

i) $\theta = \rho - \sigma/F$ において ρ と σ との組み合わせが問題となるが、図 2 からわかるように、 $F \rightarrow \infty$ のとき、 $\theta \rightarrow 1$ が最も平均二乗誤差が小さくなるので $\rho=1$ と固定し、 E を最小とする σ を求める。

ii) 一つ以上の固有値が負になると解が振動を起こ

すため、すべての固有値が非負の条件が最優先されるべきである。いずれかの固有値が負になる場合には計算された平均二乗誤差にさらに大きなペナルティ (正のある大きな値) を加えて、最適になることを防止した。

iii) F を適当なきざみで与え、その F について固有値の平均二乗誤差の最小値または準最小値 (ii) の条件) を求めて、最適値とする。数値解法としては2分法を用いた。収束判定値が 10^{-8} (倍精度演算) で反復回数は 20~26 回程度であった。

分割数 N によって、平均二乗誤差の全体の極小は動きうる。ここでは $N=100$ に固定し、 N による変化は後で述べる。このようにして求めた最適の σ である $\bar{\sigma}$ は次のように三つの部分から成る。

- ① $0 \leq F \leq 0.203$ の範囲... $\bar{\sigma} = F$
- ② $0.203 \leq F \leq 0.433$ の範囲...
 $\bar{\sigma} = 0.1371 + 0.3724F - 0.2579F^2$ (5.1)
- ③ $0.433 \leq F \leq \infty$ の範囲... $\bar{\sigma} = 1/4$

三つに分かれた理由を次に述べる。

①の部分では $0 \leq \theta \leq 1$ の条件で $\theta \geq 0$ がネックとなり、 $\bar{\sigma} = F$ は $\theta=0$ (explicit なスキーム) と同等となる。②の部分で固有値の平均二乗誤差が極小の条件で求めた部分である。この部分の $\bar{\sigma}$ は少なくとも1次式より上に凸の曲線であった。2次式で近似したところ、最大誤差が 10^{-3} 程度であるため、最良の近似式ではないが実用上問題がない。③の部分では最高次の固有値が非負という条件がきいている。これは Crandall の非振動のスキーム¹⁵⁾ と同等である。

新しいスキームの全体の極小は $F_{opt} = 0.3223$ の点である ($N=100$)。このときの時間きざみは

表 1 $N=100$ における各種のスキームの F_{opt} と有効範囲
 Table 1 Optimum F and available region for typical discrete scheme. ($N=100$)

Scheme	ρ	σ	F_{opt}	m. sq. error $E \times 10^4$	Available region	Stability
Explicit	0	0	0.2032	1.950	$0 \leq F \leq 1/4$	$\Delta(1)$
Laasonen	1	0	—	—	$0 \leq F \leq \infty$	\circ
Crank-Nicolson	1/2	0	0.5167	4.968	$0 \leq F \leq 1/2$	\circ
Gelfand-Lokutsiefski	1/2	1/12	0.2764	0.4550	$1/6 \leq F \leq 1/3$	\circ
F. E. M.	2/3	1/6	—	—	$1/4 \leq F \leq 1/4$	\circ
M. W. R.	2/3	1/8	0.3105	0.1561	$3/16 \leq F \leq 3/8$	\circ
opt. Lamped-Mass	0.2854	0	0.3223	0.1280	$0 \leq F \leq 0.3499$	$\Delta(2)$
opt. F. E. M.	0.8024	1/6	0.3223	0.1280	$0.2077 \leq F \leq 0.4217$	\circ
opt. M. W. R.	0.6732	1/8	0.3223	0.1280	$0.1857 \leq F \leq 0.3825$	\circ
New opt. scheme	1.	$\sigma(F)$	0.3223	0.1280	$0 \leq F \leq \infty$	\circ

\circ : unconditionally stable, Δ : conditionally stable, (1) stable on $0 \leq F \leq 1/2$, (2) stable on $0 \leq F \leq 1.1652$

表 2 N を変えて新しいスキームの F_{opt} を求めた結果
 Table 2 Optimum F with various N . (New opt. scheme)

N	$\sigma_{opt.}$	$F_{opt.}$	m. sq. error $E \times 10^4$
20	0.22862	0.31573	0.08890
40	0.22972	0.31992	0.11293
60	0.23007	0.32126	0.12126
80	0.23024	0.32193	0.12547
100	0.23034	0.32233	0.12800
200	0.23054	0.32311	0.13308
400	0.23064	0.32349	0.13563
600	0.23067	0.32362	0.13648
800	0.23069	0.32369	0.13691
1,000	0.23070	0.32373	0.13716
2,000	0.23072	0.32380	0.13767
4,000	0.23073	0.32384	0.13793
6,000	0.23073	0.32385	0.13802
8,000	0.23073	0.32386	0.13806
10,000	0.23073	0.32386	0.13808

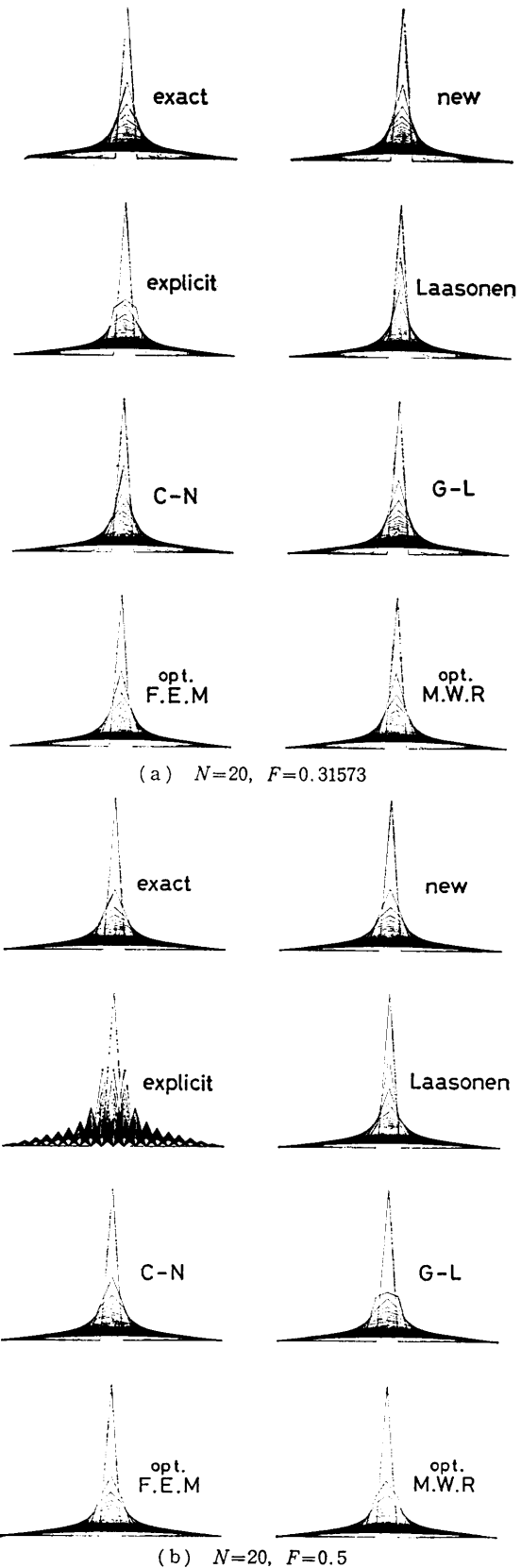
$$\Delta t_{opt} = \Delta x^2 F_{opt} / a = (L/N)^2 F_{opt} / a \quad (5.2)$$

によって決められるべきである。 F_{opt} の極小点では、固有値の平均二乗誤差が Laasonen のスキーム (完全陰型) に比べると $1/4 \times 10^3$, Crank-Nicolson のスキームと比べると $1/6 \times 10^2$ もちがう。

集中質量型のスキーム、有限要素法、重みつき残差法についても最適化を検討したが、 ρ の調整で新しいスキームの極小点の位置で一致させることが可能であることがわかった。これらをそれぞれの名称の前に「最適」をつけて呼び、図 3 (a) と (b) に opt. F. E. M., opt. M. W. R. をプロットしてある。有限要素法については新しい最適型のスキームとかなり近いが、重みつき残差法の場合には極小点から離れた部分でかなり差が出る。ただし両者とも F が大きいと、いくつかの固有値が負となる。各種のスキームの F_{opt} と極小値 (10^4 倍した値) を表 1 にまとめている。available region とは解が物理的に意味をもつ範囲のことであり、下限が $\theta \geq 0$ で決まり、上限が $\lambda_n \geq 0$ で決まる。

分割数 N が変わると F_{opt} が変化するが、 N を変えて F_{opt} を求めた結果 (表 2 に示す)、 N がある程度以上大きければその変化量はあまり問題にならない。

また打切誤差はその定義からして、低次の固有値の精度ともいうべき量であるが、この新しい最適型のスキームでは一般に $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ である。しかし Gelfand-Lokutsiefski のスキームとの交点では $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$ となる。その点は $F=0.2764$ で F_{opt} の点よりやや小さい。



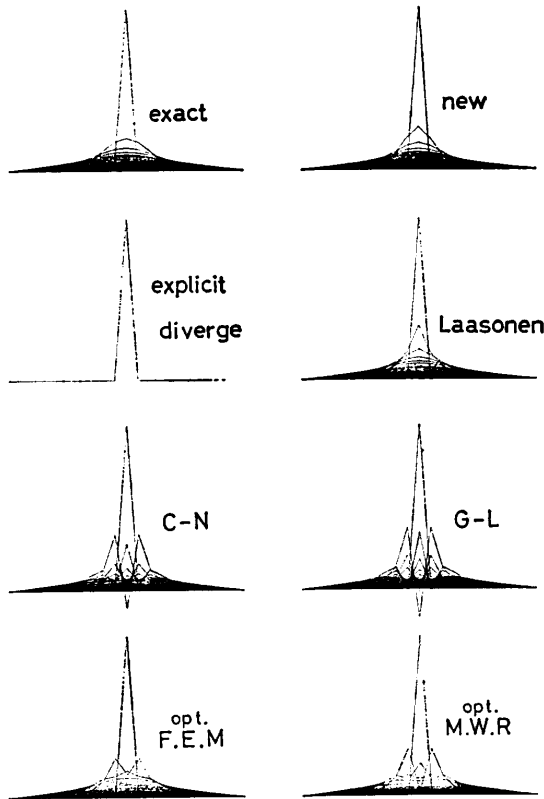
(c) $N=20$, $F=2.0$

図4 数値計算の例
インパルスの熱源の冷却問題

Fig. 4 Example of numerical computation.
Impulse response problem.

6. 数値計算の具体例

ここではインパルス応答問題を取り上げることにする。すべてのモードを一様に励起し、高次の固有値の影響をみるにはよいテスト条件である。ここでは分割数 $N=20$ とした。計算例を図4(a)~(c)に示す。厳密解と7種のスキームの温度(または濃度)の時間変化を最初の20ステップ分プロットした。

図4(a)は $F=0.3157$ ($N=20$ における平均二乗誤差の全体の極小) の場合である。新しい最適型スキームは厳密解にほとんど一致している。explicit なスキームは中心点の両隣りの点の変化が他のスキームと異なっている。また Laasonen のスキームは他のものよりかなり現象の進行が遅い。その他のスキームはあまり差がない。

図4(b)は $F=0.5$ の場合であり、この場合はCrank-Nicolson のスキームが新しい最適型のスキームと一致する。この二つのスキームが厳密解に最も近い。explicit なスキームは振動を起こし、Gelfand-Loku-

tsieski のスキームは中心点の両隣りの点が厳密解のものとは異なる。

図4(c)は $F=2.0$ の場合であり、 F が大きいと振動を起こすか、発散するスキームが多い。そのなかで新しい最適型のスキームと Laasonen のスキームだけが振動を起こさないが、新しい最適型のスキームのほうが厳密解に近い。

計算に当たって、implicit なスキームは1ステップごとに連立一次方程式を解く必要がある。ここでは係数行列が対称な三重対角行列であるため、対角要素と非対角要素を2本のベクトルとして、変形コレスキー法を用いて解いた。記憶容量、演算時間についてぎりぎりのところまで節減をはかった結果、演算時間に関して、explicit なスキームと新しい最適型のスキームを含む他のスキーム(Laasonen のスキームを除く)との比率は1:2.47であった。explicit なスキームと新しい最適型のスキームを F_{opt} のところで解くことを考えると時間きざみの比率が0.202:0.322であるため、実効的な演算時間の比率は1:1.59である。

7. むすび

以上述べてきた新しい最適型スキームは

① 汎用のスキームに対して implicit factor の最適化をはかった整合質量型のスキームであり、局所的フーリエ数 F の値によって三つの部分から成る複合的スキームである。

② 無条件安定であり、かつ振動を起こさない。

③ ある F については、すべての固有値が非負という条件下で、固有値の平均二乗誤差が最小である。 F 全体に対しては分割数 $N=100$ の場合、 $F=0.3223$ の点で固有値の平均二乗誤差が極小になる。

④ 打切誤差は全体的には $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ であるが、 $N=100$ の場合、 $F=0.2746$ では $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$ である。

などの特徴を備え、解のふるまいは、初期値に不連続な点がある場合でも厳密解にきわめて近い。

なお境界条件によって、固有値の分布が変化するわけであり、平均二乗誤差の極値も動くことには注意する必要がある。

さらにこの研究を通じて得られた知見を述べる。

(1) 従来のスキームでは、無条件安定なものでも F が大きいと振動を起こす。

(2) 拡散方程式においては非振動条件 ($\lambda_n \geq 0$) が物理的に意味ある解となる。この条件は最大値原理を

満たす条件および安定条件より厳しい(付録参照).

(3) 従来のスキームにおいても Laasonen のスキーム以外は固有値の平均二乗誤差が極小になる F_{opt} がありその点で解くのがよい. すなわち時間きざみは F_{opt} から決められるべきである.

有限要素法において 整合質量型と集中質量型のスキームを比較し, F の下限が存在することから, 「整合質量型は避けるべきである。」との文献¹⁷⁾もあるが, 筆者の見解は, 「整合質量型のほうが良好な解が得られる領域があり, F の領域によって使い分けるのがよい。」という結論に達した.

今後は 2次元の拡散問題, 移流項のある場合, また他の線形偏微分方程式の検討が望まれる.

謝辞 この原稿に目を通していただいた松井英一教授に感謝する.

参 考 文 献

- 1) Forsythe, G. and Wasow, W. R.: *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York (1960) (藤野精一(訳): 偏微分方程式の差分法による近似解法, 上・下, 吉岡書店, 京都(1967)).
- 2) Smith, G. D.: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford Univ. Press, London (1965) (藤川洋一郎(訳): 電子計算機による偏微分方程式の解法, サイエンス社, 東京(1967)).
- 3) Richtmyer, R. D. and Morton, K. W.: *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1967).
- 4) 山口昌哉, 野木達夫: 数値解析の基礎, 共立出版, 東京(1969).
- 5) Mitchell, A. R.: *Computational Methods in Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, London (1976).
- 6) 矢嶋信夫, 野木達夫: 発展方程式の数値解析, 岩波書店, 東京(1977).
- 7) Ames, W. F.: *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press, New York (1977).
- 8) Fried, I.: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Academic Press, New York (1979).
- 9) Finlayson, A. D.: *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York (1972) (鷲津久一郎, 山本善之, 河合忠彦(訳): 重みつき残差法と変分原理, 培風館, 東京(1974)).
- 10) Strang, G. and Fix, J. G.: *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall,

- Englewood Cliffs (1973) (三好哲彦, 藤井 宏(訳): 有限要素法の理論, 培風館, 東京(1976)).
- 11) Yamada, Y. and Gallagher, R. H. (eds.): *Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis*, Univ. of Tokyo Press, Tokyo (1973).
 - 12) Zienkiewicz, O. C.: *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, Maidenhead (1977).
 - 13) Mitchell, A. R. and Wait, R.: *The Finite Element Method in Partial Equations*, John Wiley & Sons, London (1977) (森 正武(訳): 偏微分方程式の有限要素法, 科学技術出版社, 東京(1978)).
 - 14) Churchhouse, R. F. (ed.): *Handbook of Applicable Mathematics*, Vol. III, *Numerical Method*, John Wiley & Sons, New York (1981).
 - 15) Crandall, S. H.: An Optimum Implicit Recurrence Formula for the Heat Conduction Equation, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 13, No. 3, pp. 318-320 (1955).
 - 16) Wood, W. L. and Lewis, R. W.: A Comparison of Time Marching Schemes for Transient Heat Conduction Equation, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 9, pp. 679-689 (1975).
 - 17) 池田 勉: 移流を伴う拡散現象の数値解析—空間二次元有限要素法—, 電力中央研究所研究報告, 68001(1980).
 - 18) 牛島照夫: 変分的手法による数値解析(解説), 情報処理, Vol. 23, No. 2, pp. 118-129(1982).
 - 19) 小林清志: 移動論—流体運動量・熱・物質—, 朝倉書店, 東京(1973).
 - 20) 小嶋 卓: 固有値の誤差が少ない差分スキーム, 情報処理学会講演論文集, pp. 1335-1336 (1984. 3).

付録 安定条件, 非振動条件と最大値原理

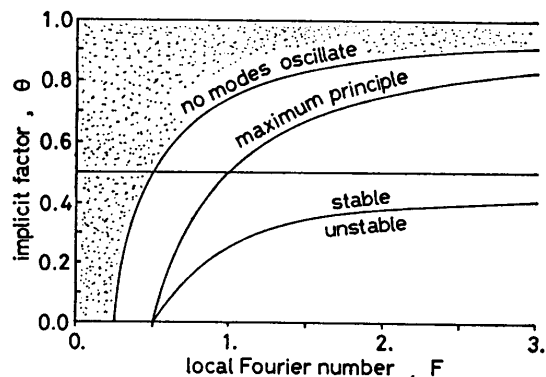


図 A 非振動条件, 最大値原理を満たす条件, 安定条件
Fig. A Non oscillatory condition, the condition which satisfies maximum principle, and stable condition.

安定条件は $|\lambda_n| \leq 1$ であり、非振動条件は $\lambda_n \geq 0$ である。(3.4)に適用して θ の範囲を求めると安定領域は

$$\theta \geq \frac{1}{2}(1-1/2F) \quad (\text{A.1})$$

非振動領域は

$$\theta \geq 1-1/4F \quad (\text{A.2})$$

である。池田の論文¹⁷⁾(の補題 4.1)で最大値原理を満たす条件が与えられているが、(3.2)をこれに代入す

ると

$$\theta \geq 1-1/2F \quad (\text{A.3})$$

を得る。これら三つの式を図示したのが図Aである。最大値原理を満たす条件は非振動条件と安定条件の中間の条件になっており、物理的には非振動条件が最も重要である。

(昭和 59 年 10 月 17 日受付)

(昭和 60 年 1 月 17 日採録)