

不動点近似による非線形2点境界値問題の数値解法†

鈴木 千里††

一つ以上の解をもつ非線形2点境界値問題を解くための数値解法を述べる。この解法の特徴は境界値問題と等価な不動点問題を解くことにある。問題を解くために、二つの写像が用いられる。一つはユークリッド空間から解を定める連続関数空間の中への埋込み写像 ϕ である。もう一つは、この埋込み写像を離散化することによって構成されるユークリッド空間上の自己写像 T である。この離散化はロバット数値積分の分点上で行われる。 T の不動点が計算されるとき、その不動点を ϕ によって連続関数空間の中に埋込むことにより境界値問題の近似解が得られる。本論文では、この方法に対してある程度の数学的基礎づけを与え、近似解を導くための具体的な数値計算スキームを一つ提案する。提案したスキームが複数個の解を近似する能力をもつことを検証するために幾つかの具体例を解き、有効性を確認する。

1. 序 文

本論文では、非線形2点境界値問題

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x)), & x \in I \\ y(-1) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

の数値解法を与えることを目的とし、そのため的手段として、非線形写像の不動点問題の数値解法を展開する。ここで $'' = d^2/dx^2$, $I \equiv [-1, 1]$, $f(x, y)$ は $I \times R^1$ ($R^1 \equiv (-\infty, \infty)$) で定義された関数である。もちろん、問題(1.1)が一つより多い解をもつとき、それらの近似解を得ることが本論文の主要な狙いである。なお、本論文では、対象をスカラ問題とするが、本方法をわずかに修正することで同型のベクトルの境界値問題に対しても適用可能となる。このタイプの問題は深宇宙開発における軌道解析によく現れる。

問題(1.1)に対して複数個の解を仮定しなければ、差分法、射撃法、ガレルキン法などの数値解法がすでに知られている。しかし、これらの方法は利点とともに幾つかの欠点もある。たとえば、

区間 I 上の離散点で近似解を与える差分法は簡単ではあるが、連続近似解を構成するのに補間を必要とする。さらに、そのような補間の率直な選択規範は知られていない^{1),2)}。

境界値問題を直接解く代わりに、射撃法は初期条件の一つが未知パラメータである同じ微分方程式の初期値問題を解く。しかし、たとえ境界値問題が良い条件下であっても、その初期値問題は悪条件となることが

よく起きる^{1),3)}。さらに、非線形方程式の問題に対しては、未知の初期条件を決定するために数値積分の計算を繰り返す必要とし、多くの処理時間を要する。しかし、初期値問題解法の優れたソフトウェア・パッケージが今日豊富にあることは魅力的である。

ガレルキン法とその変形^{4),5)}については、多くの場合、適当な内積関数空間において仮定された近似解が用いられる。たとえば、近似解として空間の基底関数の線形結合を採用するとき、結合係数が決定されるべき未知パラメータとなる。この未知量を推定するために多くの内積計算、たとえば積分計算を必要とする。しかし連続近似解が直接得られる。なお文献5)は複数個の解を求めることを意図した希少な論文である。

本論文では、問題(1.1)を直接解く代わりに、それに等価な下記の不動点問題を解く；

$$T_f(y) = y, \quad \text{in } C_I. \quad (1.2)$$

ここで、 T_f は C_I 上で定義された次の写像である；

$$T_f(y) = \int_{-1}^1 g(x, u) f(u, y(u)) du, \quad (1.3)$$

(for $y \in C_I$). ただし、 C_I は $h(\pm 1) = 0$ を満たす区間 I で定義された連続関数 h の全体であり、 $g(x, u)$ は次のように定義された関数である；

$$g(x, u) = \begin{cases} (1/2)(x+1)(u-1), & x \leq u \\ (1/2)(x-1)(u+1), & x > u \end{cases} \quad (1.4)$$

このような不動点問題の立場からの常微分方程式の問題を研究した前例としては、福原らの優れた多くの成果がある⁶⁾。しかし、数値解析の立場において境界値問題を不動点問題からアプローチしたのは比較的最近である。たとえば、Lucas and Reddien⁷⁾, Russell and Shampine⁸⁾, Houstis⁹⁾, Keller¹⁰⁾ 等がある。しかし、これらは複数個解を得ることを主たる目的とし

† Numerical Solutions of Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems by Approximations of Fixed Points by CHISATO SUZUKI (International Institute for Advanced Study of Social Information Science (IIAS-SIS), Fujitsu Ltd.).

†† 富士通(株)国際情報社会科学研究所

ていない。

本論文では、写像 T_f (1.3) の不動点を近似するために、二つの写像 $\phi^k: R^k \rightarrow C_1$ と $T^k: R^k \rightarrow R^k$ を用いる。ここで、 R^k は k 次元ユークリッド空間 ($k \geq 3$) である。 ϕ^k は、 $(0, 2)$ -多項式と呼ばれる補間式を用いて構成する C_1 の中への埋込み写像である。 T^k はロバットの数値積分の分点 (以降、ロバット分点と言う) 上で ϕ^k を離散化することによって定まる R^k 上の自己写像である。そのとき不動点問題 (1.2) の近似解は、あるいは等価な境界値問題 (1.1) の近似解は、 T^k の不動点を C_1 の中に ϕ^k を用いて埋込むことで得られる。

このアプローチは差分法とガレルキン法の様相を備えた選点法であり、下記のように要約できる：

1) 方程式 $y = T^k(y)$ は差分法の離散方程式に対応し、その解はロバット点上での離散近似解 (y と書く) を与える。

2) 写像 ϕ^k は y を連続関数空間 C_1 の中に埋込む自然な補間である。 $\phi^k(y)$ は連続的近似解である。

3) $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in R^k$ を任意とすれば、 $\phi^k(y)$ はガレルキン法の仮定される近似解に相当し、 y はその未知量に対応する。

4) T^k が非線形写像であるとき、その不動点を得るためにニュートン法が用いられる。この初期近似が非常に簡単に得られる。

5) 問題に幾つかの解が存在するとき、本方法は複数個解を近似する能力をもつ。

2章において、幾つかの記号と基本的な概念を導入し、近似の構図を述べる。そのとき、写像 ϕ^k, T^k を具体的に構成する。3章では、この近似法のある程度の数学的基礎づけを行う。4章では、それに基づく一つの数値計算スキームを提案する。本方法の有効性の検証のために幾つかの具体例を解き、数値結果を検討する。この結果は本方法が実際に複数個解を近似する能力のあることを示す。

2. 準備

2.1 記号の定義

$k (\geq 1)$ 次元ベクトルを表すのに英小文字を用い、その右肩に次元数を示す添字 “ k ” を添付する。たとえば、 y^k, z^k , etc. ベクトルの i 番目の成分を表すのに、その右下に添字 “ i ” を付ける。たとえば、 y_i^k 。なお、文脈から明らかな場合には右肩の k を省略する。記法の簡便化のために、内積表現を用いる。ベクトル

y^k と z^k の内積を $\langle y^k, z^k \rangle$ で表し、次のように定義する：

$$\langle y^k, z^k \rangle = \sum_{i=1}^k y_i^k z_i^k.$$

R^k は k 次元ユークリッド空間を表し、 C^2 は 2 階連続微分可能な関数からなる C_1 の部分空間である。空間 C_1, R^k にノルムを導入する。 $y \in C_1$ に対し $\|y\| = \max_{x \in I} |y(x)|$; $y^k \in R^k$ に対し $\|y^k\|_k = \max_i |y_i^k|$ を用いる。

$\Pi_k = \{x_i^k \in I : i=1, 2, \dots, k\}$ ($k \geq 2$) はロバット分点である。すなわち、要素 x_i^k は多項式 $(x^2-1)p_{k-1}'(x)$ の零点である。ここで、 p_{k-1} は $p_{k-1}(1)=1$ を満たす $(k-1)$ 次ルジャンドル多項式である。“ $'$ ” は 1 回微分を表す。一般性を失うことなく、 $-1 = x_1^k < x_2^k < \dots < x_k^k = 1$ のように添数づけできる。 x_i^k の右肩の “ k ” は略すこともある。点 (x_i, y_i) ($1 \leq i \leq k$) における関数 $f(x, y)$ の値を $f(x_i, y_i)$ と書き、それを i 番目の成分にもつ k 次元ベクトルを表すのに $f^k(y^k)$ を用いる。ここで、 $x_i \in \Pi_k, y_i$ はベクトル y^k の第 i 成分である。

$s^k(x)$ は、 i 番目の成分 $s_i(x)$ が次のように定義された k 次元ベクトル値関数とする：

$$s_i(x) = \int_{-1}^1 g(x, u) l_i(u) du \quad (2.1)$$

ここで、 $g(x, u)$ は (1.4) で定義された関数であり、 $l_i(u)$ は Π_k 上で次のように定義される：

$$l_i(u) = \pi_k(u) / \{(u - x_i) \pi_k'(x_i)\} \\ \pi_k(u) = \eta_k (u^2 - 1) p_{k-1}'(u) \quad (2.2)$$

ただし、 $\eta_k = 2^{k-1} [(k-1)!]^2 / [(2k-2)!(k-1)!]$ 。各 k に対し $s^k(x)$ は一意に定まる。また $s_i(x)$ ($1 \leq i \leq k$) はつぎの条件をみたす $k+1$ 次多項式である：

$$s_i(x_j) = 0 \quad (j=1, k) \quad (2.3)$$

$$s_i''(x_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq j \leq k) \quad (2.4)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーデルタである。 $s^k(x)$ の k 個の成分によって張られる空間は、明らかに C_1 の k 次元部分空間である。この部分空間を Q^k と書き、近似空間と呼ぶ。

2.2 近似の構図

最初に、各 $k (\geq 3)$ に対して二つの写像 ϕ^k, T^k を定義する。そして近似の構図を述べる。

まず、 ϕ^k を定義する。 ϕ^k は関数 $f(x, y)$ を随伴し、次のように定義される： $y^k \in R^k$ に対し、

$$\phi^k(y^k)(x) \equiv \langle s^k(x), f^k(y^k) \rangle \quad (2.5)$$

この ϕ^k の性質は次章で述べる。

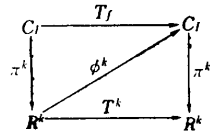


図1 写像, 射影と空間との関係

Fig. 1 Relations among mappings, projection and spaces.

T^k を定義する前に, 離散化作用素すなわち C_1 から R^k の上への射影 π^k を定義し, 合成写像に関する記法を説明する. π^k はロバット分点 Π_k 上で連続関数を離散化する射影である; $y \in C_1$ に対し,

$$\pi^k y \equiv (y(x_1), \dots, y(x_k)) \in R^k.$$

合成写像, あるいは写像と射影の合成を表すのに幾つかの記法を用いる. たとえば, 写像 ϕ^k と射影 π^k の合成写像を表現するのに $\phi^k \circ \pi^k, \phi^k \pi^k$ ($: C_1 \rightarrow C_1$), あるいは要素 $y \in C_1$ に対し $\phi^k \circ \pi^k(y), \phi^k(\pi^k y), \phi^k \pi^k y$ などの記法を用いる. この準備のもとで T^k を次のように定義する:

$$T^k(y^k) \equiv \pi^k \phi^k(y^k)(x). \tag{2.6}$$

ϕ^k の定義から, T^k は次のようにも書ける;

$$T^k(y^k) = \pi^k \langle s^k(x), f^k(y^k) \rangle.$$

上述のように定義された ϕ^k, T^k, π^k および空間 C_1, R^k との関係は図1のように図式化できる.

次に興味ある命題を述べる:

命題 1. $y_i^k = y_k^k = 0$ であるような $y^k \in R^k$ が T^k の不動点なら, $\phi^k(y^k)(x)$ に対して, 次の二つが成立する;

(i) $x_j \in \Pi_k$ に対し,

$$\phi^{k''}(y^k)(x_j) = f(x_j, \phi^k(y^k)(x_j))$$

$$\phi^k(y^k)(x_1) = 0, \phi^k(y^k)(x_k) = 0.$$

(ii) 任意の $x \in I$ に対し,

$$\phi^k(y^k)(x) = \phi^k \circ \pi^k(\phi^k(y^k))(x).$$

証明: (i) が成立することは, $s_i(x)$ に対する (2.3) と (2.4) の性質を用いることにより明らかである. (ii) は, $\pi^k(\phi^k(y^k))(x)$ が $T^k(y^k)$ の定義であり, そして y^k が T^k の不動点であることから明らか. \square

命題の (i) は $\phi^k(y^k)(x)$ が選点法の意味において境界値問題 (1.1) の近似解であることを示している. また (ii) は, $\phi^k(y^k)(x)$ が合成写像 $\phi^k \circ \pi^k$ の正確な不動点であることを意味する. これらの性質から, 本論文では, $T^k, \phi^k \circ \pi^k, y^k$ および $\phi^k(y^k)(x)$ をつぎのように呼ぶことにする.

$\phi^k(y^k)(x)$ を境界値問題の k 次連続近似解, あるいは, 写像 T_f の k 次連続近似不動点という. y^k を境

界値問題の k 次離散近似解, あるいは, 写像 T_f の k 次離散近似不動点と言う. 写像 T^k を T_f の離散近似写像と言い, 合成写像 $\phi^k \circ \pi^k$ を T_f の連続近似写像と言う. 最後に, 写像の対 $(\phi^k, T^k)_f$ を T_f の (k 次) 近似と言う.

3. 近似の理論

3.1 近似空間の性質

前章で導入した近似空間 Q^k の列の位相的性質と補間の性質を述べる. これらは次の 3.2 節で利用する.

これらの性質を述べる前に, 一つの補題を与える.

補題 1. $y^k \in R^k$ ($k \geq 2$) のノルムを $M_k < \infty$ とする. そのとき, 内積 $\langle s^k(x), y^k \rangle$ は次の不等式を満足する;

$$\|\langle s^k(x), y^k \rangle\| \leq M_k L_k \tag{3.1}$$

ここで,

$$L_k = [(k-1)/(2k-1)]^{1/2} \tag{3.2}$$

証明: 定義から,

$$\langle s^k(x), y^k \rangle = \sum_{i=1}^k \int_{-1}^1 g(x, u) l_i(u) du y_i \tag{3.3}$$

これに積分のシュワルツ不等式を適用すれば,

$$|\langle s^k(x), y^k \rangle| \leq \left[\int_{-1}^1 g(x, u)^2 du \right] \left[\int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^k l_i(u) y_i \right)^2 du \right]^{1/2}$$

(for $\forall x \in I$) の評価を得る. さらに, 仮定により $\max_{i,j} |y_i y_j| = M_k^2$ であること, および

$$\max_{x \in I} \int_{-1}^1 g(x, u)^2 du = \max_{x \in I} \left| \frac{1}{6} (x^2 - 1)^2 \right| = \frac{1}{6} \tag{3.4}$$

であることから次を得る; $\forall x \in I$ に対し,

$$|\langle s^k(x), y^k \rangle| \leq \frac{M_k}{\sqrt{6}} \left\{ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left| \int_{-1}^1 l_i(u) l_j(u) du \right| \right\}^{1/2}. \tag{3.5}$$

最後に, 上式の右辺の積分に付録Aを適用すれば, 証明は終わる. \square

この補題における限界定数 L_k は任意の $k \geq 2$ に対して有界である. 実際, $\sup_k L_k = \sqrt{1/2}$. したがって, 有界なベクトル y^k に対する内積 $\langle s^k(x), y^k \rangle$ (for $\forall x \in I$) もまた有界である. この補題を用いて, 近似空間の列 $\{Q^k\}, k=2, 3, \dots$, の一つの位相的性質を示す.

命題 2. $\{y^k \in R^k: k=2, 3, \dots\}$ を有界列とすれば, 多項式の列 $\{\langle s^k(x), y^k \rangle: k=2, 3, \dots\}$ は, ノルムによる距離をもつ空間 C_1 において, 相対コンパクトであ

る。

証明：列 $\{s^k(x), y^k\}$ が k に関して同等連続でかつ一様有界であることを示す。仮定により、任意の k に対し $\|y^k\|_k \leq M$ となる k に無関係な定数 $M > 0$ が存在することに注意。最初に、一様有界性について示す。補題 1 の適用によって $\langle s^k(x), y^k \rangle$ のノルムは ML_k の上限をもつ。一方、 $L_k \leq \sqrt{1/2}$ ($\forall k \geq 2$) である。したがって一様有界である。

次に列の同等連続性を示す。 $x, x' \in I$ に対し、関数 $C_k(x, x')$ を次のように定義する。

$$C_k(x, x') \equiv \langle s^k(x), y^k \rangle - \langle s^k(x'), y^k \rangle$$

一般性を失うことなく $x > x'$ は仮定できる。そのとき、 $C_k(x, x')$ は定義から

$$C_k(x, x') = \left[\int_{-1}^1 \frac{g(x, u) - g(x', u)}{x - x'} \times \left\{ \sum_{i=1}^k l_i(u) y_i \right\} du \right] (x - x')$$

である。積分のシュワルツ不等式を上式に適用すれば、 $C_k(x, x')$ に対して次の評価を得る： $\forall x, x' \in I$ に対し

$$|C_k(x, x')| \leq \left\{ \int_{-1}^1 [g(x, u) - g(x', u)]^2 du \right\}^{1/2} \times \left\{ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left| \int_{-1}^1 l_i(u) l_j(u) y_i y_j du \right| \right\}^{1/2} \times (x - x') \quad (3.6)$$

上式の右辺の第 1 項は $[(x^2 + xx' + x'^2 - x + x' + 1)/6]^{1/2}$ となり、 $\sqrt{2/3}$ を越えることはない。また第 2 項に付録 A を適用すれば、最終的な $C_k(x, x')$ に対する次の評価を得る。

$$|C_k(x, x')| \leq \sqrt{4} L_k M (x - x') \quad (3.7)$$

ここで、任意の i, j に対して $|y_i y_j| \leq M^2$ であることとの関係を上式の導出に用いた。したがって、 $L_k \leq \sqrt{1/2}$ ($\forall k \geq 2$) であることから、(3.7) 式より、 $\{s^k(x), y^k\}$ は k に関して同等連続である。 □

次に、内積 $\langle s^k(x), y^k \rangle$ の補間の性質を述べる。

命題 3. $k \geq 2$ とする。任意の $g \in C^2$ に対し、

$$\max_{x \in I} |g(x) - \langle s^k(x), \pi^k g \rangle| \leq \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{2M}{\sqrt{k-1}} + \omega \left(\frac{1}{(k-1)^{1/4}} \right) \right) \quad (3.8)$$

が成立する。ここで、 ω は g'' の連続率、そして $M = \|g''\|$ 。(証明は付録 B) □

3.2 不動点の近似

2.2 節で述べた近似処理に対する理論的な基礎づけを行う。主な論述は次の 4 点である。

(1) 連続近似写像と離散近似写像の両者の不動点問題の間に等価性が成立する。

(2) 近似次数の極限において、 T_f の不動点上で連続近似写像 $\phi^k \circ \pi^k$ と T_f は一致する。

(3) 離散近似写像 T^k の列の不動点の存在は T_f の不動点の存在を意味する。

(4) 逆に、 T_f が不動点 y をもてば、任意の $\varepsilon > 0$ に対し適当な $K > 0$ が存在し、 $\forall k \geq K$ に対し

$$\|T^k y^k - y^k\|_k \leq \varepsilon$$

が成立する。ここで、 $y^k \equiv \pi^k y$ 。

最初に(1)に関する性質を述べる。

定理 1. $k \geq 3$ とし、 $F^k \equiv \phi^k \circ \pi^k$ と置く。 T_f の近似 $(\phi^k, T^k)_f$ において、 p が F^k の不動点であれば、そのとき $y^k \equiv \pi^k p$ は T^k の不動点である。逆に、 y^k が T^k の不動点であれば、そのとき $p \equiv \phi^k(y^k)$ は F^k の不動点である。

証明： p を F^k の不動点とすれば、 $y^k \equiv \pi^k p = \pi^k(F^k p) = \pi^k(\phi^k \circ \pi^k(p)) = \pi^k \circ \phi^k(\pi^k p) = T^k(y^k)$ が成り立つ。逆に、 $y^k \in R^k$ が T^k の不動点とすれば、 $p \equiv \phi^k(y^k) = \phi^k(T^k(y^k)) = \phi^k(\pi^k \circ \phi^k(y^k)) = \phi^k \circ \pi^k(\phi^k y^k) = F^k(p)$ が成り立つ。 □

この定理は、連続関数空間上の不動点問題が数値計算容易なユークリッド空間上の不動点問題として等価的に扱えることを主張している。逆もまた真である。

定理 2. F^3, F^4, \dots は T_f の連続近似写像の列とし、 $f(x, u)$ は x と u に関して連続とする。そのとき、 $y \in C_f$ が T_f の不動点であれば

$$\|T_f y - F^k y\| \rightarrow 0, \quad (\text{as } k \rightarrow \infty)$$

が成立する。

証明： y が T_f の不動点ならば、 $y''(x) = f(x, y(x))$ (for $\forall x \in I$) が成立する。これに π^k を作用させれば、 $f^k(\pi^k y) = \pi^k y''$ を得る。そのとき $F^k y = \phi^k \circ \pi^k y = \phi^k(\pi^k y) = \langle s^k, f^k(\pi^k y) \rangle = \langle s^k, \pi^k y'' \rangle$ 。したがって、 $y \in C^2$ なので命題 3 から、 $\|T_f y - F^k y\| = \|y - \langle s^k, \pi^k y'' \rangle\| \rightarrow 0$ (as $k \rightarrow \infty$)。 □

この定理から性質(2)が言える。つぎに、(3)の性質について示す。各 $k \geq 3$ に対する T^k の不動点の存在を仮定して、 T_f の不動点の存在を構成的に示す。

定理 3. $\{(\phi^k, T^k)_f : k=3, 4, \dots\}$ を T_f の近似の列とし、 $\{z^k \in \{0\} \times R^{k-2} \times \{0\}\}$ を k に関する有界列とすれば、

(i) $\|\phi^{k'}z^{k'} - z^*\| \rightarrow 0$ (as $k' \rightarrow \infty$) となる部分列 $\{z^{k'}\} \subset \{z^k\}$ と $z^* \in C_I$ が存在する. さらに, d_3, d_4, \dots を正の実数の有界列とし, D_k を各 $k \geq 3$ に対して

$$D_k = \bigcup_{i=2}^{k-1} [z_i^k - d_k, z_i^k + d_k]$$

によって定義される閉区間の和集合とし, 関数 f は $\cup_k D_k$ を含むある開区間 D において条件

(1) ある定数 $L^* > 0$ が存在し, 任意の $y, z \in D$ に対して, すべての $x \in I$ の点において

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L^* |y - z|$$

(2) $f(x, y)$ は $I \times D$ の上で連続

を満たしているとする. そのとき, 各 k' の離散近似写像 $T^{k'}$ が不動点 $y^{k'} \in B[z_{k'}; d_{k'}]$ をもつならば, つぎが成立する:

(ii) $\|T_I y^{k'} - \phi^{k'} y^{k'}\| \rightarrow 0$ (as $k' \rightarrow \infty$)

を満たす部分列 $\{y^{k'}\}$ と $y^* \in C_I$ が存在する.

(iii) $y^* \in B[z^*; \lambda]$. ただし, $\lambda = \sqrt{1/2} L^* d$.

ここで, $B[z; \lambda] = \{y \in C_I : \|y - z\| \leq \lambda\}$ そして $d = \sup_k d_k$. なお, $B[z^k; d_k]$ は R^k において定義される. (証明は付録C) \square

最後に, 性質(4)を示すために, 若干の準備を行う: T^k の不動点を規定する関数 h^{k-2} を定義する;

$$T^k(y^k) - y^k \equiv (0, h^{k-2}(z^{k-2}), 0) \quad (3.9)$$

ここで, $z^{k-2} = (y_2, \dots, y_{k-1})$. $y_1 = y_k = 0$ を仮定する.

なお, T^k の第1成分と第 k 成分が0であることに注意せよ. いま z^{k-2} を h^{k-2} の実零点とすれば, 明らかに $y^k \equiv (0, z^{k-2}, 0)$ は T^k の不動点である. したがって, 実際上の数値計算では, 関数 h^{k-2} の実零点だけを考えれば十分である.

性質(4)に関連する定理を次に述べる.

定理 4. $k \geq 3$ とし, $\{\phi^k, T^k\}_I$ を k に関する T_I の近似の列とする. y を T_I の不動点とし, $y^k \equiv \pi^k y = (0, z^{k-2}, 0)$ とする. そのとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し適当な $K > 0$ が存在して, 任意の $k \geq K$ に対し, つぎが成立する;

$$\|h^{k-2}(z^{k-2})\|_{k-2} \leq \varepsilon \quad (3.10)$$

証明: y が T_I の不動点ならば, $\pi^k y^n = f^k(\pi^k y)$ が成立する. これを用いると, 定義より $T^k(\pi^k y) - \pi^k y = \pi^k \{ \langle s^k(x), \pi^k y^n \rangle - y \} = (0, h^{k-2}(z^{k-2}), 0)$ を得る. これから, 次の評価が得られる; $\|h^{k-2}(z^{k-2})\|_{k-2} \leq \|y - \langle s^k, \pi^k y^n \rangle\| \equiv \varepsilon_k$. したがって $y \in C^2$ であることから, $\varepsilon_k \leq (1/2 + \sqrt{1/2})(2\|y^n\|/\sqrt{k-1} + \omega((k-1)^{-1/4}))$ が命題3によって成り立つ. ここで, ω は y^n の連続率である. ゆえに, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 十分大きな

K を選べば, $\forall k \geq K$ に対して $\varepsilon_k \leq \varepsilon$ が成立する. \square

この定理から T_I が不動点をもつとき, (4)の性質は明らかである.

3.3 T_I の不動点と h^{k-2} の実零点との関係

3.2 節で述べた近似の性質は数学的な意味で成立するものであって, 実際に必要なのは有限次数の近似である. その場合, T_I の不動点の数と T^k の不動点の数, すなわち h^{k-2} の実零点との数が一致するとは一般に限らない. この状況として次の3通りが起こりうる.

(i) T_I の不動点の数 $< h^{k-2}$ の実零点の数

(ii) T_I の不動点の数 $= h^{k-2}$ の実零点の数

(iii) T_I の不動点の数 $> h^{k-2}$ の実零点の数

これらの状況に対して, 数値実験結果からの定性的な特徴をまとめると(4.3節参照), (i)は初期近似の場合 ($k=3$) にときどき起こりうる. しかし近似次数の増加に伴って, (ii)の状況に転移する. (ii)は一般的な場合である. (iii)は実零点が重根の場合か T_I が可算無限個の不動点をもつ場合に起きる. 重根の場合は, 近似次数の増加に伴って分離される. また可算無限個の場合は近似次数の増加に伴って, 異なる不動点が次々と近似されるような例もある.

4. 数値計算スキム

ここでは, 離散化に伴って生ずる近似誤差の事後評価法を述べた後で, これまでに展開してきた近似法に基づく複数個の不動点を近似しうる能力のある計算スキムを提案する. さらに, 典型的な幾つかの問題をこのスキムで解き, その数値結果を検討する. とくに述べない限りここでは, T_I と T^k の不動点問題はいずれも解をもつものと仮定する.

4.1 近似誤差の事後評価

$\{\phi^k(y^k)\}$ を T_I の不動点 y への収束列とすれば, $\|\phi^k(y^k) - \phi^{k+n}(y^{k+n})\| \rightarrow 0$ (as $k, n \rightarrow \infty$) が成立することは基本的な事実である. ここで, y^k は T^k の不動点である. この性質から近似の誤差を評価することができる. y^k の変形 $y^k = \pi^k \phi^{k+n}(y^{k+n}) - (\pi^k \phi^{k+n}(y^{k+n}) - \pi^k \phi^k(y^k))$ を利用して, 近似誤差 $(\pi^k y - y^k)$ を評価すれば, 次を得る.

$$\|\pi^k y - y^k\|_k \leq \|y - \phi^{k+n}(y^{k+n})\| + \|\phi^{k+n}(y^{k+n}) - \phi^k(y^k)\|. \quad (4.1)$$

上式の右辺の二つの項は, k と n が無限大になるとき, いずれもゼロに収束する. しかも定理4から, n が十分大であれば,

$\|y - \phi^{k+1} y^{k+1}\| \leq \|\phi^{k+1} y^{k+1} - \phi^k y^k\|$
 を仮定しても合理性を損なわない。しかし、
 実際的な観点からは、

$\|y - \phi^{k+1} y^{k+1}\| < \|\phi^{k+1} y^{k+1} - \phi^k y^k\|$
 であることが多い。したがって、これを用い
 れば、 y^k に対する近似誤差に対し、次の評
 価を得る：

$$\|y^k - y^k\|_k \leq 2 \|\phi^{k+1} y^{k+1} - \phi^k y^k\| \quad (4.2)$$

しかし、まだ、(4.2)は過大評価を与えるこ
 とが多い。後で述べる不動点近似計算スキ
 ムでは、右辺の係数2の代わりに1を用いる。
 また、この右辺の評価は $\|\pi^k \phi^{k+1} y^{k+1} - y^k\|_k$
 によって近似的に行う。

4.2 計算スキム

指定された要求精度 δ (有効桁数) の離散
 近似不動点と連続近似不動点を自動的に生成
 する不動点近似計算スキムを述べる。

計算スキムは二つの基本的な部分からな
 る；初期近似を行う部分と連立非線形代数方
 程式を解くための部分である (この計算処理
 の全体は図2に示されている)。ここで、初
 期近似とは、近似次数 $k=3$ の離散近似写像
 T^3 の不動点を求めることである。近似次数
 k が4以上の離散近似写像 T^k の不動点を求
 めるには連立の非線形代数方程式を解くこ
 とが必要となる。この連立方程式を解くのに
 ニュートン法が用いられる¹²⁾。すなわち式
 (3.9)で定義された $k \geq 4$ の関数 $h^{k-2}(z)$ の実零点を
 計算するのに、反復式

$$z_{n+1} = z_n - J(z_n; h^{k-2})^{-1} h^{k-2}(z_n) \quad (4.3)$$

$n=0, 1, \dots$ が用いられる。ここで、 $J(\cdot; \cdot)$ は h^{k-2}
 の z_n に関するヤコビ行列である。

パラメータ $\delta > 0$ と $\{\epsilon_k\}_{k=4,5,\dots,N}$ は

$$0 < \epsilon_N \leq \dots \leq \epsilon_6 \leq \epsilon_4 \leq \delta$$

を満たすように指定する。ここで、 N は十分大きな正
 の整数とする。 δ は近似の精度の指定、 ϵ_k はニュ
 ートン法の反復を停止させるために用いられる。

(i) 初期近似：初期近似は図2の最上部の箱に対
 応する。ここでは $h^1(z)$ の実零点を計算する。問題が
 強い非線形性を有していても、関数 $h^1(z)$ はスカラな
 ので、一次元実数のみをもつ順序位相の性質を利用し
 た2分割法¹¹⁾などで比較的簡単に実零点を得ることが
 できる。

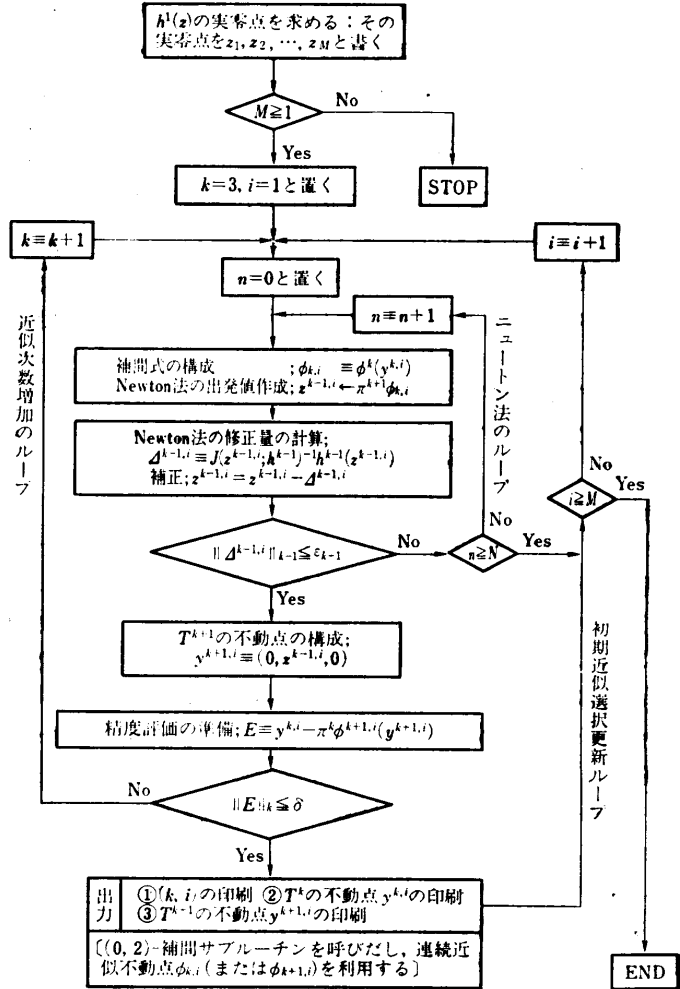


図2 不動点近似計算のフロー
 Fig. 2 Flow of computation for approximation of fixed points.

いま、 z_1, z_2, \dots, z_M を $h^1(z)$ の M 個の実零点とす
 れば、 $y^{3,i} = (0, z_i, 0)$ ($i=1, 2, \dots, M$) は T^3 の不動点
 である。これらのおのおのから3次の連続近似不動点
 を(2.5)式から構成できる；

$$\phi_{3i}(x) \equiv \phi^3(y^{3,i}). \quad (4.4)$$

これらの連続近似不動点 $\phi_{3i}(x)$ は、 $h^3(x)$ の実零
 点をニュートン法で求める際の出発値を導くのに使用
 される。

(ii) 連立方程式の解法：指定された精度の近似解
 を得るために近似次数 k を4から1ずつ高めていく。
 したがって、 $k \geq 4$ の関数 h^{k-2} の実零点計算を各 k
 に対して逐次行う。この処理は図2の初期近似部分
 を除いた残りの全体に対応する。この実零点の計算は、
 $k-2$ 個の未知量 z_1, z_2, \dots, z_{k-2} をもつ $k-2$ 個の成
 分からなる方程式 $h^{k-2}(z^{k-2})=0$ を解くことに等価で
 ある。なお、この未知量は $k-2$ 次元ベクトル $z^{k-2} =$

$(z_1, z_2, \dots, z_{k-2})$ の成分である。連立方程式はニュートン法を用いて以下のように解かれる。

『最初に、初期近似で得られた M 個の連続近似解 ϕ_{3i} ($i=1, 2, \dots, M$) の中から、一つを取る。たとえば ϕ_{31} を取る (残りの ϕ_{3i} は次の繰り返しにおいて用いる)。そのとき、方程式 $h^2=0$ を解くために必要なニュートン法の出発値 z_0^2 を

$$\pi^4 \phi_{31} = (0, z_0^2, 0)$$

によって構成する。これをもとに反復式(4.3)から $h^2=0$ の零点が得られる。それを $z^{4,1}$ とすれば、4次の離散近似不動点は $y^{4,1} = (0, z^{4,1}, 0)$ である。また、4次の連続近似不動点は $\phi_{41}(x) \equiv \phi^4(y^{4,1})(x)$ である。

以下同様にして、4次の連続近似不動点 ϕ_{41} から逐次、近似次数の高い離散近似写像と連続近似写像の不動点を近似する(図3を参照)。後述する次数増加の停止則が満たされるとき、上述の近似処理は終了する。その時点で残りの $M-1$ 個の初期近似の連続近似解 ϕ_{3i} の中から、別の一つを取り、そして上記の『...』の部分の処理を繰り返す。この繰り返しは合計で M 回行う。そのとき、全体の処理は終了し、最大 M 個の異なる不動点の近似が得られる可能性がある。

(ii) ニュートン法の反復処理の停止則: 方程式 $h^{k-2}(z^{k-2})=0$ の解法に際し、指定された $\epsilon_k > 0$ に対して不等式、($p=k-2$)

$$\|J(z_n^p; h^p)^{-1} h^p(z_n^p)\|_p \leq \epsilon_k$$

が成立した時点で反復は収束したものと判定する。

(iv) 近似次数増加処理の停止則: 指定された $\delta > 0$ に対して、不等式

$$\|y^{k,i} - \pi^k \circ \phi^{k+1}(y^{k+1,i})\|_k \leq \delta$$

が成立した時点で i で添数づけられた初期近似から生成される近似不動点は要求精度に達成したと判定する。

上述した処理によって計算の丸め誤差を無視すれば、原理的には、任意の精度で T_f の不動点を近似することができる。

4.3. 数値例

典型的な境界値問題を四つ解く。境界条件は定義区間 $[-1, 1]$ の両端でゼロとした。したがって、関数 $f(x, y)$ が指定されるとき、(1.1)と(1.3)式によってそれぞれ境界値問題および不動点問題の写像 T_f は一意に定まる。初期近似はすべて2分割法で処理した。

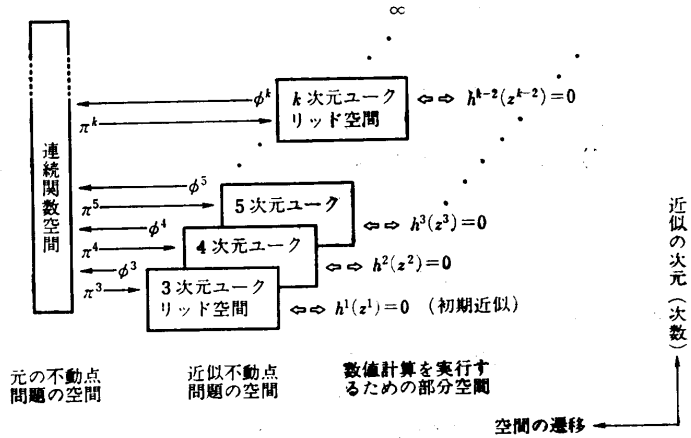


図3 不動点近似の概念図 (ϕ^k : 埋込み写像, π^k : 射影)
Fig. 3 Conceptual illustration for approximation of fixed point.
(ϕ^k : Imbedding mapping, π^k : Projection)

数値例 1. 最初に、関数 f が

$$f(x, y) = \frac{3}{8}y^2 - \frac{3}{8}(3x-5)y + \frac{3}{32}(3x-5)^2$$

である境界値問題を解く。この問題は負の下に凸の二つの解をもつ。一つは $y(x) = 16(x+3)^{-2} + 2^{-4}(3x-5)$ であり、他の一つは非解析的解である⁵⁾。

この問題に対して、初期近似において二つの T^3 の不動点が見つかった; $y^{3,1} = (0, -0.7460, 0)$, $y^{3,2} = (0, -10.653, 0)$ 。そして、 $\delta = 10^{-6}$, $\epsilon_k = 10^{-9}$ ($4 \leq k \leq 19$) として近似計算を実行した。 $y^{3,1}$ からは $k=9$, また $y^{3,2}$ からは $k=16$ の次数にて計算処理は終了した。このとき得られた二つの連続近似不動点 $\phi_{9,1}$, $\phi_{16,2}$ の R^3 の中への射影はそれぞれ次のとおりである。

$$\pi^3 \phi_{9,1} = (0, -0.7222220, 0),$$

$$\pi^3 \phi_{16,2} = (0, -13.036222, 0).$$

それぞれに含まれる誤差は 2×10^{-7} , 10^{-6} である。なお、後者の誤差評価は4次のルンゲ・クッタ法によって初期値問題を数値的に解くことによって行った。

数値例 2. 関数 f が

$$f(x, y) = -(1/4) \exp(y)$$

である境界値問題を解く。この問題は二つの正の上に凸な解をもつ^{8), 13)}。この問題に対して、初期近似において T^3 の二つの不動点が見つかった; $y^{3,1} = (0, 3.529, 0)$, $y^{3,2} = (0, 0.1407, 0)$ 。そして、 $\delta = 5 \times 10^{-4}$, $\epsilon_k = 10^{-6}$ ($4 \leq k \leq 19$) の条件のもとで処理を実行した。そのとき、 $y^{3,1}$ に対しては次数15, そして $y^{3,2}$ に対しては次数4にて計算処理は終了した。そのときの連続近似不動点 $\phi_{15,1}$ および $\phi_{4,2}$ の R^3 の中への射影は次のとおりである;

$$\pi^3\phi_{15,1}=(0, 4.09115, 0),$$

$$\pi^3\phi_{4,2}=(0, 0.1404, 0).$$

それぞれに含まれる誤差は 9×10^{-6} , 10^{-4} である。なお、これらの誤差評価はそれぞれ初期条件

$$y(-1)=0, \quad y'(-1)=5.423450043,$$

$$y(-1)=0, \quad y'(-1)=2.746763645,$$

のもとでの初期値問題を4次のルンゲ・クッタ法で数値的に解くことによって行った。

数値例 3. 関数 f が

$$f(x, y) = y^3 + \frac{39}{10}(x^2 - 1)y + \frac{5}{12}$$

である境界値問題を解く¹³⁾。この問題は一意解をもつ。この問題に対し初期近似において三つの不動点が得られた； $y^{3,1}=(0, 1.000, 0)$, $y^{3,2}=(0, 0.366, 0)$ と $y^{3,3}=(0, -1.366, 0)$ 。この三つの初期近似に対し、それぞれに T_i の不動点の近似が得られた。しかし、その実行結果はすべて同一であった。たとえば $\delta=5 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_k=10^{-9}$ ($4 \leq k \leq 19$) の条件のもとでの処理はすべて11次の近似次数で終了した。得られた近似不動点に含まれる最大絶対誤差は 7.7×10^{-7} である。この誤差評価は解析解と比較して得た。

数値例 4. 最後の例として、問題は二つの解をもつが、本スキムでは一つしか見いだすことのできないケースである。すなわち、関数 f が

$$f(x, y) = (1/20)\{y^2 - x^2(x^2 - 1)^2\} \\ - (12/5)\{y - x(x^2 - 1)\} + 6x$$

である境界値問題がそれである。この問題は

$$y(-1)=0, \quad y'(-1)=2,$$

$$y(-1)=0, \quad y'(-1)=-0.4696026\dots,$$

により規定される二つの解をもつ。前者は原点を通る2周期解、後者は負の1周期解である。この問題に対しては、初期近似処理における関数 $h^1(x)$ は原点が唯一の実零点(2重根)である。したがって、初期近似は一つしか得られない。本スキムの適用の結果は、最大振幅の小さな前者の解の近似のみを得る。しかし初期近似に4次を用いるとき、重根は分離される。すなわち、 $h^2(x)$ は二つの異なる零点をもつ。これをもとに続く処理を実行すれば、異なる二つの近似解が得られる。

最後に、上記の数値例では、ニュートン法の計算は2回ないし3回ですべて収束した。また、すべての計算はFORTRAN 77の倍精度モードを用いるFACOM M-200によって実行した。なお処理速度の向上のための工夫は行っていない。

4.4 数値結果の検討

数値例1は、占部⁵⁾によって詳細に検討された問題に等価である。ここでは、初期近似の手続きを占部法と本方法を比較する：

占部法⁵⁾は、初期近似として2次の近似解

$$y_3(x) = (1/2)a_0 + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x),$$

$$v_3(x) = (1/2)b_0 + b_1 T_1(x) + b_2 T_2(x),$$

を仮定する。ここで、 a_i, b_i ($i=0, 1, 2$) は決定すべき未知係数であり、 T_i は i 次のチェビシェフ多項式である。 $v_3(x)$ は $y'(x)$ の近似である。占部法はこれらの係数を決定するために、6元連立非線形方程式からなる決定方程式を解くことが必要である。実際、占部は2組の係数を見いだしている。一組の係数は解析的解を近似し、他の組の係数は解析的でない方の解を近似する。上述のごとく占部法は初期近似を行うときでさえ、6元の連立非線形方程式を解く必要がある。もちろん、それを解くには問題に対してある程度の先験的知識が要求されることは明らかである。したがって、非線形性の強い問題に対しては、幾つかの困難が予想される。一方、本方法の初期近似は関数

$$h^1(x) = -5(x^2 + 5x + 159/20)/32 - x$$

の実零点を計算するだけで十分である。初期近似における本方法の特徴はこの簡単さにある。

近似解の次数と精度の関係では、たとえば、有効桁数6の近似解を求めるために、占部法では、解析解に対しては9次(本方法10次相当)、非解析解に対しては18次(19相当)までのチェビシェフ級数を必要とする。一方、本方法では、それぞれ9次と16次で十分である。

数値例2は文献8), 13), 14) などにおいて扱われた問題である。とくに文献8)では、滑らかなエルミート、空間 H^3 での3次スプライン関数による選点法を用いて一つの数値解(振幅の大きい方の解)を得ている。その結果は、15節点(15次相当)を用いて、3桁弱の(絶対)精度の近似解を得ている。この方法も非線形処理にニュートン法を用いているが、出発値の推定の仕方については触れていない。一方、本方法では、15次では3.5桁の精度で得ると同時にもう一つの解も4次で同精度の近似を得ている。なお、文献14)ではCOLSYS¹⁵⁾を用いる連続法によって、この問題を解くことの検討がなされているが、数値的には解かれていない。

以上の二つの例は境界値問題の解の数と離散近似写像の不動点の数と一致するケースである。

数値例3は、境界値問題の解の数よりも離散近似写像の不動点問題の解の数の方が多い場合の例証として与えた。また、数値例4はその逆の例証として与えた。

5. 結 び

一つ以上の解をもつ非線形2点境界値問題を解くための数値解法の一つとして、不動点近似法を提案した。すなわち、境界値問題を直接解く代わりに、それと等価な不動点問題の解を近似する方法を述べた。不動点問題を解くために、 $k \geq 3$ 次元ユークリッド空間 R^k 上の自己写像 T^k と連続関数空間の中への R^k の埋込み写像 ϕ^k の二つの写像を定義した ((2.6), (2.5) 式)。そして、 T^k の不動点が存在するとき、近似解はその不動点を連続関数空間の中に ϕ^k で埋込むことにより得られた。この近似の構図に対して、幾らかの理論的な基礎づけを3章で行った。さらに、この近似法に基づく不動点近似計算スキムを提案した。このスキムを複数個解をもつ境界値問題に適用し、複数個の解を実際に見いだしている。さらに、提案したスキムでは複数の解を見いだすことのできない問題も検討した。

今後、①事前誤差評価と離散近似写像の不動点の存在条件、②一般的な常微分方程式の境界値問題への本アプローチの拡張などの研究が重要である。

謝辞 本研究の動機と機会を与えて下さった当研究所北川敏男会長に深く感謝する。有益な議論をして下さった名古屋大学情報工学科二宮市三教授（現在、中部大学教授）、鳥居達生教授、杉浦洋助手に深謝する。とくに、杉浦氏からは式の展開のチェック、数値例4の問題の提供など多くの支援を受けた。また、京都大学数理解析研究所一松信教授ならびに京都大学理学部山口昌哉教授からは複数個解をもつ問題の離散化に伴う特異性に関する有益なご示唆をいただいた。ここに深く感謝する。

参 考 文 献

- 1) Keller, H. B.: Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations; Survey and Some Recent Results on Difference Methods, Aziz, A. K. (ed.): *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, pp. 27-88, Academic Press, Inc., New York, San Francisco, London (1975).
- 2) Henrici, P.: *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney (1962).
- 3) Grans, A., Guenther, R. B. and Lee, J. W.: The Shooting Method for the Numerical Solution of a Class of Nonlinear Boundary Value Problems, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 16, No. 5, pp. 828-836 (1979).
- 4) Reddien, G. W.: Projection Methods for Two-Point Boundary Value Problems, *SIAM J. Rev.*, Vol. 22, No. 2, April, pp. 156-171 (1980).
- 5) Urabe, M.: Numerical Solution of Boundary Value Problems in Chebyshev Series, *Conference on the Numerical Solution of Differential Equations, Lecture Notes in Math.*, 109, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, pp. 40-86 (1969).
- 6) 福原: 常微分方程式の50年 I, II, *数学*, Vol. 34, No. 2, pp. 164-171; No. 3, pp. 262-269 (1982).
- 7) Lucas, T. R. and Reddien, W. G.: Some Collocation Method for Boundary Value Problems, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 19, No. 2, pp. 341-356 (1972).
- 8) Russell, R. D. and Shampine, L. F.: A Collocation Method for Boundary Value Problems, *Num. Math.*, Vol. 19, No. 1, pp. 1-28 (1972).
- 9) Houstis, E.: A Collocation Method for Systems of Nonlinear Ordinary Equations, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 15, No. 1, pp. 24-37 (1978).
- 10) Keller, H.: Approximation Method for Nonlinear Problems with Application to Two-Point Boundary Value Problems, *Math. Comp.*, Vol. 29, No. 130, pp. 464-474 (1975).
- 11) Cryer, C. W.: *Numerical Functional Analysis*, Oxford University Press, New York (1982).
- 12) Rall, L. B.: *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto (1969).
- 13) Ahlberg, J. H. and Ito, T.: A Collocation Method for Two-Point Boundary Value Problems, *Math. Comp.*, Vol. 29, No. 131, pp. 761-776 (1975).
- 14) Ascher, U. and Russells, R. D.: Reformulation of Boundary Value Problems into "Standard" Form, *SIAM Rev.*, Vol. 23, No. 20, pp. 238-254 (1981).
- 15) Ascher, U., Christiansen, J. and Russell, R. D.: Collocation Software for Boundary-Value ODEs, *ACM Trans. Math. Softw.*, Vol. 7,

No. 2, pp. 209-222 (1981).

16) Hildebrand, F. B.: *Introduction to Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London (1956).

付録 A

$l_i(x), l_j(x)$ ($i, j=1 \sim k$) を多項式 (2.2) とし, $f_{ij}(x) \equiv l_i(x)l_j(x)$ とする. そのとき, $f_{ij}(x)$ の積分の絶対総和はつぎのように評価することができる;

$$I_k = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left| \int_{-1}^1 f_{ij}(x) dx \right| \leq \frac{6(k-1)}{(2k-1)} \quad (\text{A.1})$$

実際, 関数 $f \in C^{2k-2}[-1, 1]$ に対する数値積分公式 (ロバット法) [参考文献 16)]

$$I \equiv \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{r=1}^k W_r f(x_r) + E_f \quad (\text{A.2})$$

を用いてこれを示すことができる. ここで, W_r は公式の重み係数, E_f は残差項で, つぎのとおりである:

$$W_r = \frac{2}{k(k-1)p_{k-1}(x_r)^2} \quad (r=1 \sim k) \quad (\text{A.3})$$

$$E_f = -\frac{k(k-1)2^{2k-1}[(k-2)!]^4}{(2k-1)[(2k-2)!]^2} f^{(2k-2)}(\xi) \quad (\text{A.4})$$

ただし, $|\xi| < 1$. そして $\sum_{r=1}^k W_r = 2$. いま, この公式を適用して, I_k の各項の積分を評価する. f_{ij} が $f_{ij}(x_r) = \delta_{ir} \times \delta_{jr}$ であること, そして f_{ij} の $2k-2$ 次導関数が

$$f_{ij}^{(2k-2)}(x) = \frac{\eta_k^{-2}(2k-2)!}{k^2(k-1)^2 p_{k-1}(x_i) p_{k-1}(x_j)} \quad (\text{A.5})$$

であることから $f_{ij}(x)$ の積分に対し, つぎの評価を得る;

$$\left| \int_{-1}^1 f_{ij}(x) dx \right| \leq \sum_{r=1}^k W_r \delta_{ir} \delta_{jr} + |E_{f_{ij}}| \quad (\text{A.6})$$

ここで, 残差項は (A.3)~(A.5) 式から $|E_{f_{ij}}| = (W_i W_j)^{1/2} / (2k-1)$ となる. なお $i=j$ のときは $E_{f_{ii}} = -W_i / (2k-1)$ である. 最後に, 不等関係 $(W_i W_j)^{1/2} \leq (W_i + W_j) / 2$ を適用したのち総和をとることによって (A.1) の評価を得る. \square

付録 B (命題 3 の証明)

$h \in C^2$ とし, $r(x) \equiv h(x) - \langle s^k(x), \pi^k h^n \rangle$ とすれば, $r(-1) = r(1) = 0$ であることから, (1.4) 式の $g(x, u)$ を用いて $r(x)$ は

$$r(x) = \int_{-1}^1 g(x, u) (h^n(u) - \langle s^k(u), \pi^k h^n \rangle) du$$

のように表現できる. h^n に対する $I = [-1, 1]$ の上でのベルンスタイン多項式

$$B_k(u) = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} h^n \left(\frac{2j-k+1}{k-1} \right) \times_{k-1} C_j(1+u)^j (1-u)^{k-1-j}$$

はワイエルストラスの定理¹¹⁾を満足する. すなわち

$$|h^n(u) - B_k(u)| \leq \frac{2}{\sqrt{k-1}} \|h^n\| + \omega \left(\frac{1}{(k-1)^{1/4}} \right)$$

(for all $u \in I$). ここで, ω は h^n の連続率である.

また, B_k の次数は $k-1$ 以下であることから,

$$B_k(u) = \langle s^k(u), \pi^k B_k \rangle$$

が恒等的に成立する. B_k のこの関係を用いて $r(x)$ をつぎのように書き直すことができる:

$$\begin{aligned} r(x) &= \int_{-1}^1 g(x, u) ((h^n(u) - B_k(u)) \\ &\quad - \langle s^k(u), \pi^k (h^n - B_k) \rangle) du \\ &= \int_{-1}^1 g(x, u) (h^n(u) - B_k(u)) du \\ &\quad - \langle s^k(u), \pi^k (h^n - B_k) \rangle. \end{aligned}$$

上式から $r(x)$ を評価する; 右辺の第 2 項に補題 1 を適用し評価すれば, つぎを得る. すべての $x \in I$ に対し

$$\begin{aligned} |r(x)| &\leq \left(\int_{-1}^1 |g(x, u)| du + L_k \right) \\ &\quad \times \max_{u \in I} |h^n(u) - B_k(u)| \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + L_k \right) \left(\frac{2M}{\sqrt{k-1}} + \omega \left(\frac{1}{(k-1)^{1/4}} \right) \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{2M}{\sqrt{k-1}} + \omega \left(\frac{1}{(k-1)^{1/4}} \right) \right) \end{aligned}$$

ここで, $M = \|h^n\|$, すべての $k \geq 2$ に対し, $L_k \leq \sqrt{1/2}$. \square

付録 C (定理 3 の証明)

(i) について: 列 $\{z^k\}$ の有界性の仮定から命題 2 により明らか. 部分列 $\{z^{k'}\} \subset \{z^k\}$ もまた有界.

(ii) の (1) について: $\{z^k\}$ と次元が対応する y^k の部分列 $\{y^{k'}\}$ を考える. 仮定により, この部分列も有界である. したがって, 命題 2 によって

$$\|\phi^{k'} y^{k'} - y^*\| \rightarrow 0 \quad (\text{as } k' \rightarrow \infty) \quad (\text{C.1})$$

なる部分列 $\{y^{k'}\}$ と $y^* \in C_l$ が存在する. したがって,

$$\|T_r y^* - \phi^{k'} y^{k'}\| \rightarrow 0 \quad (\text{as } k' \rightarrow \infty)$$

を示せば十分である. 以下では, 添字の繁雑さを避け

るために、 k^n を単に k で表す。いま、 $u^* = T_f y^*$ と置けば、すべての $x \in I$ に対し $u^{*n}(x) = f(x, y^*)$ が成立するので、 $\phi^k(\pi^k y^*)(x) = \langle s^k(x), \pi^k u^{*n} \rangle$ の関係を得る。したがって、つぎが有効である。

$$T_f y^* - \phi^k y^* = \{u^* - \langle s^k(x), \pi^k u^{*n} \rangle\} + \{\phi^k(\pi^k y^*) - \phi^k y^*\}.$$

この式から、つぎの評価を得る。

$$\|T_f y^* - \phi^k y^*\| \leq \|u^* - \langle s^k(x), \pi^k u^{*n} \rangle\| + \|\phi^k(\pi^k y^*) - \phi^k y^*\| \quad (\text{C.2})$$

上式において、条件(2)により $u^* \in C^2 \subset C_1$ なので命題3により、右辺の第1項はゼロに収束する。第2項は

$$\|\phi^k(\pi^k y^*) - \phi^k y^*\| = \|\langle s^k(x), f^k(\pi^k y^*) - f^k(y^*) \rangle\|$$

と変形し、補題1と条件(1)を用いて評価すれば

$$\|\phi^k(\pi^k y^*) - \phi^k y^*\| \leq L_k \|\pi^k y^* - y^*\| L^* \quad (\text{C.3})$$

となる。そのとき、 y^* が T^k の不動点であることの

仮定から $y^* = T^k y^* = \pi^k(\phi^k(y^*)(x))$ であり、(C.3)式の右辺は

$$\|\pi^k y^* - y^*\| L^* \leq \|y^* - \phi^k(y^*)\|$$

と評価され、(C.1)により第2項のゼロへの収束がはいえる。

最後に、(iii)について：補題1を適用して

$$\|\phi^k y^* - \phi^k z^*\| = \|\langle s^k(x), \Delta f^k(y^*, z^*) \rangle\| \leq L_k \|y^* - z^*\| L^*$$

がはいえる。ただし、 $\Delta f^k(a, b) \equiv f^k(a) - f^k(b)$ 。そのとき、

$$\|y^* - z^*\| L^* \leq d_k \leq d, \quad L_k \leq \sqrt{1/2}$$

から

$$\|\phi^k y^* - \phi^k z^*\| \leq \sqrt{1/2} L^* d \equiv \lambda.$$

上式は任意の $k \geq 3$ で成り立つ。したがって、極限において $\|y^* - z^*\| \leq \lambda$ を得る。□

(昭和59年10月5日受付)

(昭和60年3月20日採録)