

数独問題を評価するための指標に関する一考察

A Study of Measures for Evaluating SUDOKU Puzzles

石田伸輔[†] 岩波拓[†] 高瀬治彦[†] 北英彦[†] 林照峯[†]
Shinsuke Ishida Taku Iwanami Haruhiko Takase Hidehiko Kita Terumine Hayashi

1 まえがき

ゲームやパズルの分野において、コンピュータに面白い問題を作らせたいという願望は強いが、面白いということが感覚的なものであると同時に、いろいろな要素を含んでいるため、それをすべて考慮することは難しい。しかし、ある側面からある程度味わい深い面白い問題をコンピュータによって自動的に作ることは可能であると思われる。この目的のためには、まず、問題の面白さを自動的に評価する基準と方法を与えておかなければならない。本研究では、数独を対象に、この目的のための2つの尺度を導入する。第1の尺度は、解法(解候補の絞り込みの操作)のうちのどれを用いるかということを表す“解法適用レベル”, 第2の尺度は、ある条件の下で最終解に到達するまでの解法の適用回数を表す“ステップ数”である。

市販の数独(あるいはナンバープレイス)の問題[1,2], および、空きマス拡大法と呼ぶ自動作成法によって作られた問題に対して、これらの尺度の値を計測し、これらの尺度により、その問題が対象としている人の力量に合うものかを評価するための基準となりうることを示す。

また、これらの尺度を評価関数として、初級~上級の解く人の力量に応じた数独問題を作成する手法についても述べる。

2 数独とその解法

数独は、 9×9 の合計81個のマス目の各行、各列、各ブロック(3×3 の背反な9つの領域)ついて、その9個のマス目に1~9の数字が一つずつ入るように数字を決めるパズルである。数独の問題は、一部のマス目に数字が指定された状態で与えられる。数字が指定されていないマス目をここでは空きマスと呼ぶ。

数独の解を求めるには、何らかの方法で空きマスに入るべき数字の候補を絞り込むことを繰り返し、1つの数字に限定されたとき、そのマス目の数字を決定するというやり方が用いられる。これを空きマスがなくなるまで繰り返すことにより最終解を求める。ここでは、空きマスに入るべき数字の候補を絞り込む方法を単に解法と呼ぶ。解法にはいろいろあり、非常に初歩的なものから高度なものまである。また非常に複雑なテクニックを使うもの、バックトラックを伴うものもあるが、本論文では極端に難しい問題を追求するのが目的ではなく、階層に合わせて評価することが目的であるので、そのような解法を使用しない。

3 評価尺度

本研究では数独の問題がどの階層の人達に楽しめるかということの評価するために、基準となる2つ評価尺度を用いる。その評価尺度とは、問題を解くときに使用した解法の種類と、問題を解くまでの手数(長さ)である。以下にこの評価尺度の詳しい説明を行う。

まず初級者は比較的易しい数個の解法のみを用いて最終解に到達できる問題を好み、上級者になるほど多くの解法を組み合わせて最終解に到達する問題の方を好むであろうと仮定する。これを測るのに“解法適用レベル”という尺度を用いる。ここでは、市販の問題のほとんどがその繰り返しと組み合わせで解けるような代表的な8

種類の解法(解法1~解法8)を用いる。例えば、解法1は、対象とする空きマスに対して、そのマス目を含む行、列、ブロックに含まれている数字を解候補から除く絞り込みを行うものである(解法2~8については省略)。これらの解法を使って問題を解いていき、解法1~(L-1)だけでは解けないが、解法1~Lを適用すれば最終解が求まるとき、解法適用レベルはLであると定義する。

また、初級者から上級者まで、最終解に到達するまでの過程を楽しむであろうと仮定する。この過程とは空きマスが存在している数独のある一場面において、ある空きマスに対して、入る数字が絞られることということを用いる。難しい問題を解く上級者は過程の長い方を好むが、初級者は必ずしも過程が長いのを好むわけではない。この過程が問題の面白さに関係すると考え、この過程の長さを“ステップ数”と定義する。

ある一つの数独の問題に対して、これらの尺度を以下のように求める。ちなみに、下記手順(4)では、空きマスに入る数字の決定までは行わない。これは、ある空きマスの数字が決まったことによって他の空きマスの数字が決まるのを複数ステップとしてカウントするためである。

- (1) 解法適用レベル $L \leftarrow 0$, ステップ数 $S \leftarrow 0$ とする。
- (2) L を1増やし、もし $L > 8$ なら解が求まらなかったとして終了。
- (3) 空きマスが一つもなければ、最終解が求まったとして終了(解法適用レベル L とステップ数 S が求められる)。
- (4) 解法 L を各空きマスに対して適用し、絞り込みを行う。
- (5) 絞り込みがなされた空きマスが一つでもあれば、 S を1増やす。
- (6) 入るべき数字が一つに絞り込まれた空きマスがあるときには、それらの空きマスに入る数字を決定し(これらのマスはこれ以降空きマスとして扱わない)、(3)に行く。もしこのような空きマスがない場合には(2)に行く。

4 実験結果と考察

実際にこの評価尺度が人間の手で作られたものと難易度が対応しているかどうかを調べるために、市販の問題集に対してこの評価尺度を適用してみた。

表1に、市販の問題集[1,2]から100題(初級20, 中級40, 上級31, 超上級9)を適当に選び、これらの問題に対して解法適用レベル L とステップ数 S を求めた結果を示す。表1より、初級から超上級まで難易度が高くなるほど、 L と S が大きくなる傾向にあることがわかる。初級者用の問題では $L=1 \sim 2$, $S=15 \sim 20$ 程度の問題となっており、最終解までが短く易しい問題になっているのに対し、上級者用の問題では初級者用に比べもっと大きな L , S になっていて、最終解までが遠く難しい問題となっている。また、 L と S では、中級と上級の差がつきにくいこともあるが、 L と S を併用すればその差が認められやすいことがわかる。

[†]三重大学大学院工学研究科

表 1: 市販問題の実験結果

問題のクラス	問題の数	解法適用レベル L								L (平均)	S (平均)
		1	2	3	4	5	6	7	8		
初級	20	7	13	0	0	0	0	0	0	1.7	17.8
中級	40	0	5	4	4	26	1	0	0	4.4	22.6
上級	31	0	0	1	3	19	5	3	0	5.2	23.7
超上級	9	0	0	0	0	0	0	4	5	7.6	26.8

一般に、手作り問題の方がコンピュータで作成した問題よりも面白いと言われている。次に、このことを提案の2つの尺度によって数値的に示すことができるかどうかを調べる。この実験のために、空きマス拡大法と呼ぶ方法で6000題の問題をコンピュータで自動作成し、これらの問題についても評価を行った。空きマス拡大法は、以下の手順で問題を作成する単純な手法である。ただしこの方法で作成する問題は、市販の問題でよく採用されている点対象の問題(中央のマス目にたいして点対象な位置関係にあるマス目は、両方とも空きマスであるか、両方とも数字の入ったマスであるという条件を満たすもの)であることに限定する。

- (1) 適当な最終解を一つ与える。
- (2) まだ空きマス化を試みていない数字マスをランダムに一つ選ぶ。このような数字マスがなければ手続き終了。
- (3) 選んだマス目、および、それと点対象の位置にあるマス目を空きマスに仮に置き換えてみて、解法1~8で解が求まるかどうか確かめる。もし、解が求まるならそれらを空きマスに決める。そうでなければそれらを数字マスに戻す。(2)へ行く。

表2は市販の問題と上記の単純な手法について、解法適用レベル L ごとにステップ数 S の平均値を示したものである。なお、空きマス拡大法については最大値 $S(\max)$ の値も載せた。表2から、市販の問題の方が空きマス拡大法よりも、 S の値において平均で2~3倍大きいという結果が得られた。また、空きマス拡大法では L の大きな問題を生成しづらいことがわかる。コンピュータでも多くの問題を作れば、 L , S の値の大きな問題も偶然現れることがあるが、 L の大きな問題では手作りの問題の平均ステップに及ぶものはない。このことから、コンピュータによって問題を作成する場合に、提案した解法適用レベル L とステップ数 S を評価関数として組み込んで、問題を作成することは有効と考えられる。

5 数独問題作成の一方法

空きマス拡大法は、積極的に L と S の値を大きくするような仕組みを持っていない。ここでは、遺伝的アルゴリズム(GA)を用いて、指定された解法適用レベル L_t ($1 \leq L_t \leq 8$) の値に応じて、 S の値の大きな問題を作成する手法を提案する。GAで数独問題を作成するには、(a) 遺伝子表現、(b) 整形操作、および、(c) 適応度関数、をどのようにするかがポイントとなるので、これらについて述べる。

- (a) 遺伝子表現: 普通に考えられる方法は、 9×9 の81個のマス目を81個の染色体に対応させ、各染色体が0~9 (0は空きマス、1~9は数字マスを表す) の値をとるようにコーディングする方法である、し

表 2: 市販の問題と単純な自動生成問題の比較

L	市販の問題		空きマス拡大法		
	問題数	S (平均)	問題数	S (平均)	$S(\max)$
1	7	15.7	5318	4.9	18
2	18	19.1	440	9.2	20
3	5	21.0	18	9.7	18
4	7	22.7	47	9.2	16
5	45	23.1	30	9.5	16
6	6	24.0	7	9.1	11
7	7	24.7	11	10.2	15
8	5	28.6	22	10.1	18

かし、この方法では、交叉等の操作によって致死遺伝子が生じやすい。ここでは、何らかの方法で最終解が与えられているということを前提に、81個の染色体が0(空きマス)か1(数字マス)の値をとるようにコーディングする。

- (b) 整形操作: 交叉、突然変異によって作られた新しい個体に対して、点対象問題という性質を保持しつつ、解法1~ L_t によって最終解が求まること、余分な数字マスがないことという条件を満たすように問題の整形を行う。
- (c) 適応度関数: 3節で述べた L, S の計算手順において、解法1~ L_t のみが使用できるという前提で、 L と S の値を求め、適応度関数 f を $f = L \times k + S$ で与える (k は正の定数)。

6 まとめ

数独の問題の面白さをコンピュータによって自動的に評価するための2つの尺度“解法適用レベル”と“ステップ数”を提案し、その有効性を調べるため、市販の問題と単純な方法でコンピュータにより作成した問題に適用しその評価を行った。その結果、提案尺度がコンピュータでの問題の自動評価にある程度使えるとの見通しを得た。また、遺伝的アルゴリズムに提案尺度を組み込んで問題作成する方法を示した。

参考文献

- [1] ニコリ編著: ニコリ「数独」名品100選, 文藝春秋(2006)
- [2] 西尾徹也: 西尾徹也のナンプレ Best Selection 100, 世界文化社(2006)