

# 広域曲面補間法†

上西博文‡ 矢島章夫‡

現状、自由曲面の補間法としては Coons の方法や, Bézier の方法がよく使われる。しかしこれらの方法は、小さなパッチを補間するものであるため、点群の入力、曲面の平滑化に多大の手間がかかるという問題がある。これに代わる方法としては、一つのデザイン意図に貫かれた曲面を、曲線をスウィープさせて一気に作るという方法が有力である。この方法は、1本ないし2本の導線(ガイドカーブ)に沿って曲線をスウィープさせる方法で、スウィープ操作に次のような変換を加えることにより、変化に富んだ曲面でも創成できるようになる。(1)導線の接ベクトルの変化に従うマトリックス変換。(2)2本の導線の対応点を結ぶ直線の変化に従うマトリックス変換。(3)2本の導線の幅に比例した拡大/縮小。(4)導線上に与えられた境界条件(曲面が接するべき平面)を満足するような変形操作。(1)~(3)は曲面内部の形を制御する変換、(4)は隣の曲面と滑らかに接続するための操作である。以上の方法を使えば、少ない曲線データで広い曲面が作れ、曲面の平滑化が不要になるため、形状入力の手間が大幅に削減できる。この方法は現在主に NC加工とコンピュータグラフィックスの幾何モデリングに使われており、特に NC加工では既に数百の製品に適用された。

## 1. 緒言

三次元 CAD/CAM システムを実用化する上で、自由曲面処理技術は重要な役割を果たしている。比較的単純な形状でも細部までモデル化しようとすると、自由曲面が必要になることが多いし、また自動車、家電品、鋳物などの製品分野においては必須な技術だからである。このため我々は早くから自由曲面処理技術の開発と実用化を試みてきた。本報告ではその基礎技術である曲面補間法について新しい方法を提案する。現在、曲面補間法としては Coons<sup>1)</sup>, Bézier<sup>2)</sup>, Riesenfeld<sup>3)</sup> などの方法が広く使われている。しかしこれらの方法は、いずれも小さな曲面パッチを補間する方法であるため入力効率が悪いという問題がある。具体的には次のような作業が必要になり手間がかかる。

- (1) 小さなパッチで曲面を表現するため、多数の点列を入力しなければならない。
- (2) 多数の点列データを得るためには模型または線図の測定作業が必要である。また測定誤差で曲面がうねるため、平滑化の作業も必要になる。

以上の点を解決する方法としては、ある曲線に沿って他の曲線をスウィープさせた軌跡で曲面を定義する方法が有効である。この方法は、広い曲面が創成できる、曲面の平滑化は不要であるという長所を持っている。そこで我々は当初 Coons の方法を拡張し<sup>4), 6)</sup>, スウィープ操作を取り入れた方法を開発した。この結果、補間能力は大幅に向上し、三角形状、回転面形状、

トーラス形状も簡単に作れるようになった。しかし曲面の対辺の形が異なっている場合には、ブレンディング関数の形が曲面に反映し、うねりが発生することが多かった。そこでスウィープ操作をさらに発展させ、うねりの発生しない曲面補間法の開発を行った。この方法はこれまで数百の製品に適用された実績をもっており実用性は高いと考える。

## 2. 広域曲面補間法

曲面はある曲線に沿って他の曲線をスウィープさせて得られる軌跡によって定義する。スウィープされる曲線をキャラクタカーブ(CCと略す)、沿わせる曲線をガイドカーブ(GCと略す)と呼ぶことにする。一般にはキャラクタカーブ、ガイドカーブとも多数与えられることが多いが、図1のように分解することによって、図2の四つの基本形に帰着できる。さらに図2の(b), (c)のようにキャラクタカーブが相対して2本与えられたときは、 $CC_1, CC_2$ を各々スウィープさせて得られる曲面 $S_1, S_2$ を次の形でブレンドする(図3)。

$$S(u, v) = (1 - \varphi(v))S_1(u, v) + \varphi(v)S_2(u, v) \quad (2.1)$$

( $\varphi(v)$  はブレンディング関数で  $\varphi(0) = 0$ ,

$\varphi(1) = 1, 0 \leq \varphi(v) \leq 1$  とする)

したがって基本形としては結局、図2(a), (c)のみを考えておけばよい。

つぎにキャラクタカーブをスウィープさせる方法について説明する。ガイドカーブを $C_1(v), C_2(v)$ , キャラクタカーブを $C(u)$ とする(ガイドカーブが1本のときは $C_1(v)$ のみとする)。曲面の式 $S(u, v)$ は次のように定義する。

† An Interpolation Algorithm for Free-Form Surfaces with Large Area by HIROHUMI JONISHI and AKIYO YAJIMA (Central Research Laboratory, Hitachi, Ltd.).

‡ (株)日立製作所中央研究所

$$S(u, v) = C_1(v) + R(v)(C(u) - C(0)) \quad (2.2)$$

ここで  $0 \leq u, v \leq 1$ ,  $R(v)$  は  $3 \times 3$  マトリックスとし,  $C_2(v)$  が存在するときは,  $S(1, v) = C_2(v)$  を満足するものとする.

(2.2)式は,  $C(u)$  の端点をガイドカーブに乗せてスウィープし, 同時に  $C(u)$  に対して  $R(v)$  の変換を施すことを意味している.  $R(v)$  は曲面形状を制御する変換マトリックスで, 次のようなものを用意しておく(図4).

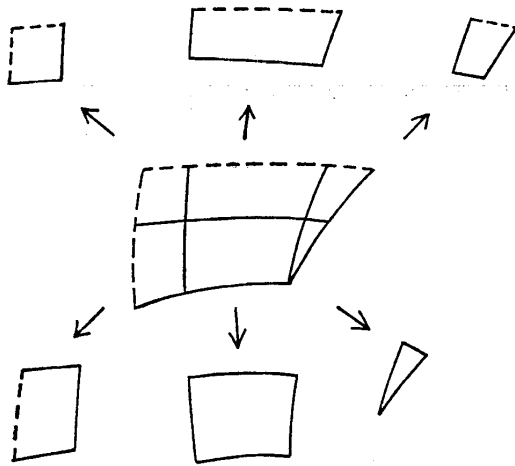


図1 複雑な曲面の分解  
(破線は実際には与えられていない)

Fig. 1 Decomposition of a composite surface.  
(Broken lines are not given.)

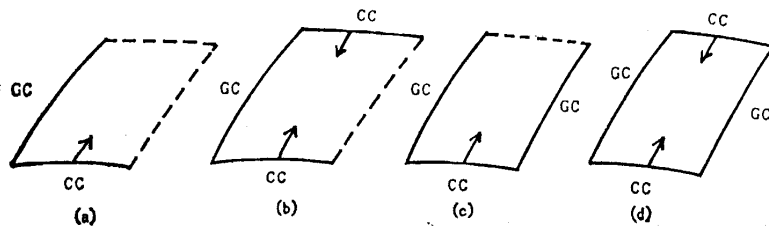


図2 4通りの基本形  
三角形は(b)または(c)の特殊な場合である.

Fig. 2 Four types of surface interpolation.  
Triangle surfaces are interpolated by a special case of (b) or (c).

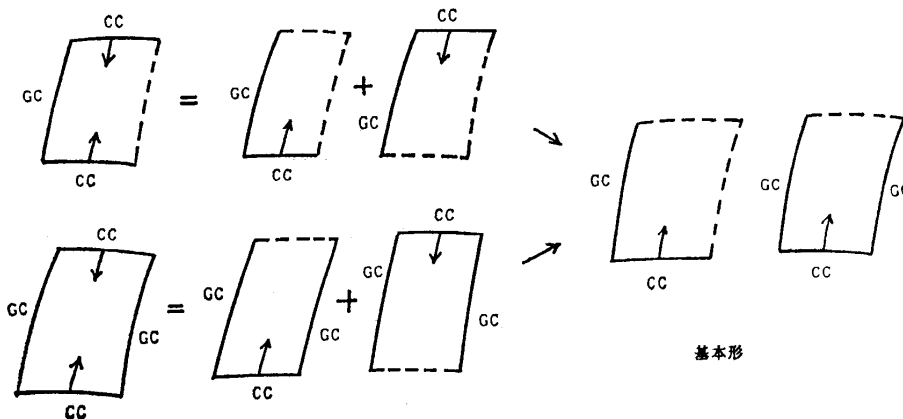


図3 2通りの基本形への分解  
Fig. 3 Decomposition to two basic patterns.

- (1) 恒等変換 (Identity)  
 $R(v) = I$  ( $I$  は単位マトリックス)
- (2) 弦ベクトルに從属した回転 (Rotation-1)  
ガイドカーブが2本あるときのみ定義できる.  
 $C_2(v) - C_1(v)$  を弦ベクトルと呼び, これを単位化したベクトルを  $e(v)$  と記す.  $R(v)$  は  $e(0)$  を  $e(v)$  に重ねる回転マトリックスで定義する.
- (3) ガイドカーブに從属した回転 (Rotation-2)  
ガイドカーブが1本のときは  $f(v) = \bar{C}'_1(v)$  ( $C'$  は  $C$  の導関数,  $\bar{C}'$  は  $C'$  の単位ベクトルを意味する) とし,  $f(0)$  を  $f(v)$  に重ねる回転マトリックスで  $R(v)$  を定義する. ガイドカーブが2本のときは,  
 $T(v) = C'_1(v) + C'_2(v)$   
 $f(v) = \frac{T(v) - \langle T(v), e(v) \rangle e(v)}{|C'_1(0) - C'_2(0)|}$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は内積)  
で  $f(v)$  を定義し,  $f(0)$  を  $f(v)$  に重ねる回転マトリックスで  $R(v)$  を定義する.

- (4) 拡大, 縮小 (Scaling)  
弦ベクトル ((2)と同じ) の拡大, 縮小にあわせてキャラクターカーブを拡大, 縮小する.

$$R(v) = \frac{|C_1(v) - C_2(v)|}{|C_1(0) - C_2(0)|} \cdot I$$

( $I$ : 単位マトリックス)

以上が  $R(v)$  の基本形である. 一般には, これらの変換マトリックスを組み合わせる. 可能な組み合

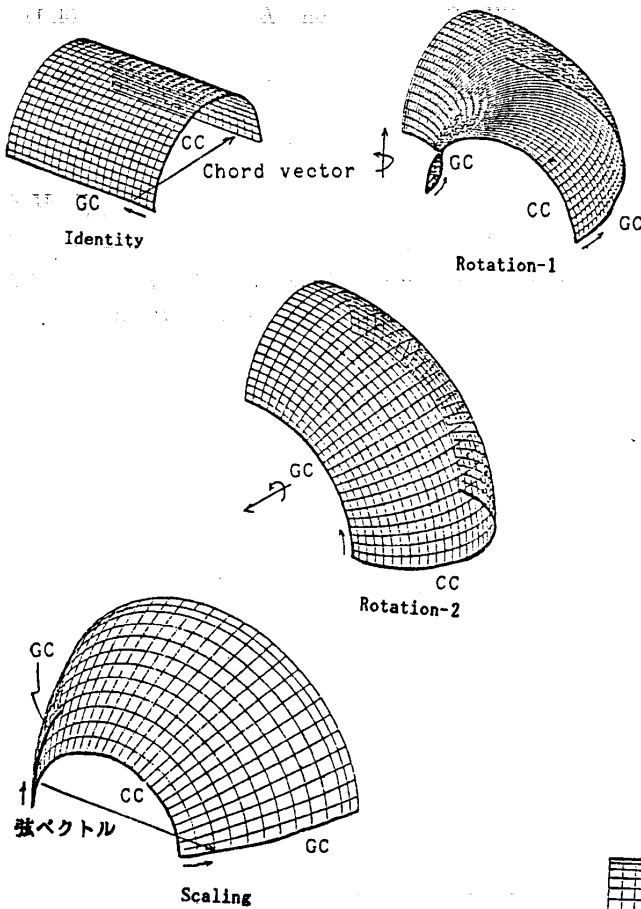


図4 スウィープの種類  
Fig. 4 Type of sweep operations.

わせは次のとおりである。

ガイドカーブが1本のとき

- { Identity
- { Rotation-2

ガイドカーブが2本のとき

- Rotation-1 + { Identity
  - Rotation-2
- + Scaling

### 3. 補間曲面の滑らかさ

前章で述べた補間法は、広い曲面を創成できる。しかし曲面の滑らかさ（接平面の連続性）については、次のような問題がある。

- (1) 隣接面との滑らかさは一般には保証されない。
  - (2) ガイドカーブ、キャラクタカーブが滑らか（接線方向が連続）であっても、創成される曲面は滑らかとは限らない。
- (1)の現象は、隣り合う曲面の補間方向が

異なる場合とか、変換マトリックス  $R(v)$  のタイプが異なる場合などに起きる。(2)の現象は、Rotation-2 を使った場合などに起きる(図5)。これは Rotation-2 がガイドカーブの導関数を使うため、曲面の微分可能性が低下するのが原因である。したがって解決法としては、①曲面の補間方向をそろえる、② $R(v)$  のタイプを限定する、③ガイドカーブを  $C^2$  級曲線に限定する、④Rotation-2 のような  $R(v)$  は使わない、といった方法が考えられる。これらはいずれも簡単に実現できる方法である。しかし①②④は補間能力およびその自由度の低下を招き、③は製図に必要な  $C^1$  級曲線（直線、円弧の結合曲線など）の使用を禁止する結果となる。このことは、広域補間の実現という立場とは全く矛盾したものである。したがって上記のように制限を増すという消極的な解決法ではなく、もっと積極的な解決法が必要である。

### 4. 変形作用素

曲面が内部で折れていれば、そこで曲面を分

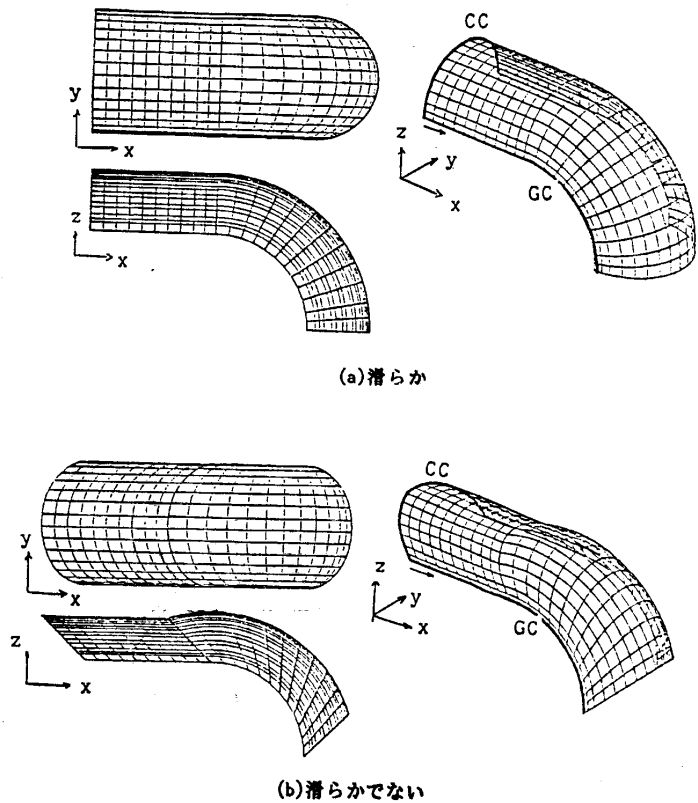


図5 Rotation-2 による補間  
Fig. 5 Interpolation by Rotation-2.

割する。こうすれば隣接面と滑らかに接続する方法についてのみ考えればよい。滑らかに接続する方法としては、図6に示すように隣接面との境界上に平面を定義し、この平面の両曲面が接するように変形するという方法が考えられる。変形法は原曲面のイメージをなるべく変えないものが望ましい。例えば境界の近傍を変形すれば簡単に滑らかに接続できる。しかしこの方法では数学的には滑らかであっても、変形量が狭い場所に集中するため視覚的には滑らかに見えないことが多い。したがって局所の変形法ではなく、大域の変形法が必要になる。我々はこのような変形法をこれまで数種類開発した。以下、この中で最も良好な結果が得られている方法について述べる。線型変換を利用するもので、曲面イメージを損わないという点では最も優れたものである。まず問題を定式化する。変形作用素を  $F$ 、曲面の式を  $S(u, v)$  ( $0 \leq u, v \leq 1$ )、曲面の境界を  $B$ 、 $B$  上で定義した接平面の法線ベクトルを  $M$  とする ( $M$  を以後境界条件と呼ぶ)。このとき問題は次の式を満たす作用素  $F$  を求めることである。

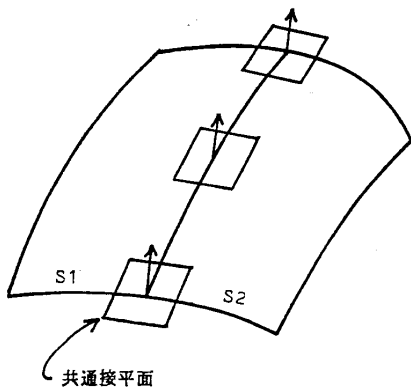


図6 共通接平面  
Fig. 6 Common tangent plane.

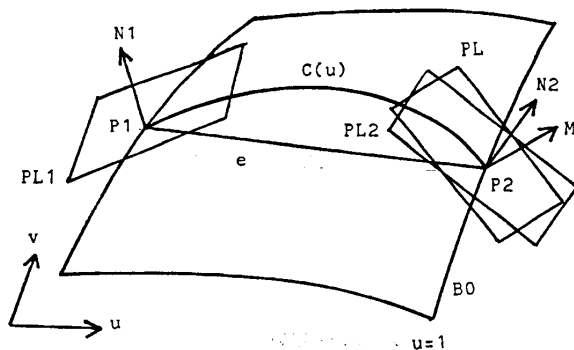


図7 一辺上に与えられた境界条件  
Fig. 7 Boundary condition on one side.

$$FS = S \quad \text{on } B \quad (4.1)$$

$$\left\langle \frac{\partial(FS)}{\partial n}, M \right\rangle = 0 \quad \text{on } B \quad (4.2)$$

( $\frac{\partial}{\partial n}$  は  $B$  の法線方向微分,  $\langle, \rangle$  は内積)

簡単のためまず曲面の一辺上のみ境界条件  $M$  が与えられている場合を考える。図7に示すように曲面パラメータを  $u, v$  ( $0 \leq u, v \leq 1$ ) とし、 $u=1$  で定まる境界  $B_0$  ( $B_0$  は  $B$  の一部) に境界条件  $M$  が与えられているとする。 $M$  は  $B_0$  に沿って与えられるので次の条件を仮定してよい。

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial v}(1, v), M(v) \right\rangle = 0 \quad (4.3)$$

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial u}(1, 0), M(0) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial S}{\partial u}(1, 1), M(1) \right\rangle = 0 \quad (4.4)$$

ここで  $M(v)$  は接平面を定義するベクトルであるから、向きはどちらでもよいが、説明を簡単にするため、曲面の表側を向いていると仮定する。

$$\langle M(v), N(1, v) \rangle \geq 0 \quad (4.5)$$

(ただし  $N(u, v) = \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u, v)$  とする)

また変形作用素の説明のため次のように記号を定める。

$P_1, P_2$  ; 点  $S(0, v)$ , 点  $S(1, v)$ .

$N_1, N_2$  ;  $P_1, P_2$  における  $S$  の単位法線ベクトル。

$PL_1, PL_2$ ;  $P_1, P_2$  を通り  $N_1, N_2$  に直交する平面。

$PL$  ;  $P_2$  を通り  $M$  に直交する平面。

$C(u)$  ;  $C(u) = S(u, v) - S(0, v)$ .

$e$  ;  $\overline{P_1 P_2}$  を単位化したベクトル。

つぎに変形作用素の決め方を図8 (見やすくするため二次元的に書いてある) により説明する。 $C(u)$  を  $e$  方向成分と  $N_1$  直交成分に分解する。

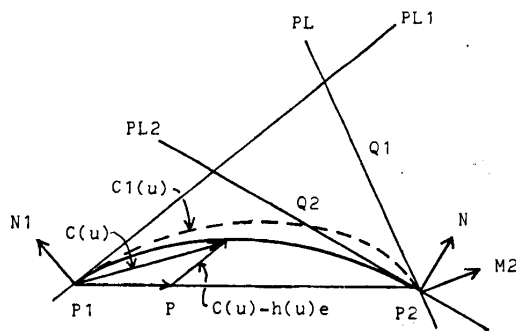


図8 変形作用素  
Fig. 8 Transformation operator.

$$C(u) = h(u)e + (C(u) - h(u)e) \quad (4.6)$$

ここで第2項を  $k$  倍した曲線  $C_1(u)$  を考える。

$$C_1(u) = h(u)e + k(C(u) - h(u)e) \quad (4.7)$$

$k$  を変えれば  $C_1(u)$  は  $PL_1$  沿いに拡大または縮小される。このとき  $P_1$  において  $N_1$  に直交するという条件は変わらない。したがって  $k$  を適当に定めれば  $C_1(u)$  を  $PL_2$  に接するようにはできる。 $h(u), k$  については次のように求めることができる。まず  $h(u)$  は

$$\langle C(u) - h(u)e, N_1 \rangle = 0 \text{ から} \\ h(u) = \frac{\langle C(u), N_1 \rangle}{\langle e, N_1 \rangle} \quad (4.8)$$

$k$  は  $\langle C_1(1), M \rangle = 0$  から

$$h'(u)\langle e, M \rangle + k\langle C'(u) - h'(u)e, M \rangle = 0$$

$h'$  は(4.8)を微分して得る。これを代入すれば

$$k = \left( 1 - \frac{\langle C'(1), M \rangle \langle e, N_1 \rangle}{\langle C'(1), N_1 \rangle \langle e, M \rangle} \right)^{-1} \quad (4.9)$$

以上で変形作用素の表現式が得られた。曲面の式  $S(u, v)$  を使って書きなおせば、次のようになる。

$$FS(u, v) = S(0, v) + h(u, v)e(v) \\ + k(v)(S(u, v) - S(0, v) - h(u, v)e(v)) \quad (4.10)$$

$$h(u, v) = \frac{\langle S(u, v) - S(0, v), N_1(v) \rangle}{\langle e(v), N_1(v) \rangle} \quad (4.11)$$

$$k(v) = \left( 1 - \frac{\left\langle \frac{\partial S}{\partial u}(1, v), M(v) \right\rangle \langle e(v), N_1(v) \rangle}{\left\langle \frac{\partial S}{\partial u}(1, v), N_1(v) \right\rangle \langle e(v), M(v) \rangle} \right)^{-1} \quad (4.12)$$

ただし上記作用素が定義できるためには  $h(u, v), k(v)$  の分母  $\neq 0$  から次の制限が必要である。

$$\langle e(v), N_1(v) \rangle \neq 0 \quad (4.13)$$

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial u}(1, v) \times e(v), N_1(v) \times M(v) \right\rangle \neq 0 \quad (4.14)$$

(4.14)は  $k(v)$  の分母  $\neq 0$  から

$$\langle A \times B, C \times D \rangle = \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, D \rangle \langle B, C \rangle$$

なる関係を使って導いた。例えば線織面は(4.13),

(4.14)の両条件に抵触するから注意が必要である。

### 5. 一般の境界条件に対する変形作用素

図9に示すように曲面の全周に境界条件が与えられている場合を考える。境界を  $B_1 \sim B_4$ ,  $B_i$  上の境界条件を  $M_i$ ,  $M_i$  を満足させる変形作用素を  $F_i$  と書く。前章の議論から,  $F_i$  は  $B_i$  の向かい合った辺の境界値(接平面)を変えることなく,  $B_i$  上の境界条件  $M_i$  を満足させることができる。したがって境界条件  $M_i$ ,

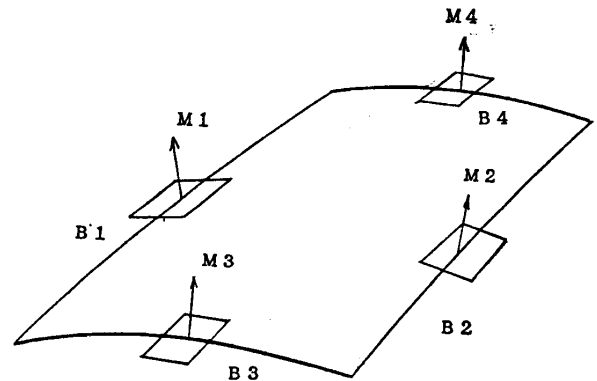


図9 四周に与えられた境界条件  
Fig. 9 Boundary condition on four sides.

$M_2$  を同時に満たすためには  $F_1, F_2$  を連続して作用させればよい。では  $M_3, M_4$  を満足させるためには,  $F_3, F_4$  を作用させれば済むのであろうか。これについては次の条件が必要である。すなわち  $F_3, F_4$  を作用させたとき  $B_1, B_2$  の境界値 ( $M_1, M_2$ ) を変えないという条件である。以下この条件について検討する。そこで  $F_2$  を例にとり,

$$\frac{\partial(F_2 S)}{\partial u} \times \frac{\partial(F_2 S)}{\partial v} = \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \text{ on } B_4 \quad (5.1)$$

( $\bar{x}$  は  $x$  の単位ベクトル)

が成立するための条件について調べる。これに関して次の定理が成立する(証明は付録参照)。

$$\text{[定理1]} \quad \langle (S(u, 1) - S(0, 1)) \times e(1), N(1, 1) \times N(u, 1) \rangle \equiv 0 \quad (5.2)$$

(恒等的に0ではない)なる任意の曲面に対して, (5.1)が成立するための必要十分条件は, (4.12)で定義した  $k$  について  $k'(1) = 0$  が成立することである。

ただし,  $e(v) = \overline{S(1, v) - S(0, v)}$ ,

$$N(u, v) = \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u, v).$$

【定理2】定理1と同様の仮定を満たす任意の曲面に対して  $k'(1) = 0$  が成立するための必要十分条件は,

$$M_2(1) = \frac{\partial N}{\partial v}(1, 1)$$

が成立することである。

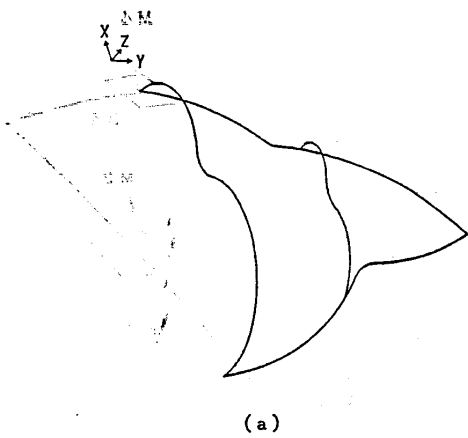
ただし,  $M_2$  は  $B_2$  上で与えられた境界条件。

以上の二つの定理から, (5.1)が成立するためには,

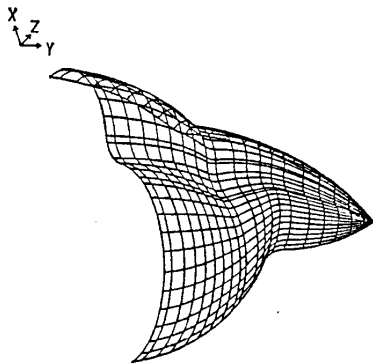
$$M_2(1) = \frac{\partial N}{\partial v}(1, 1) \quad (5.3)$$

が成立することが必要十分である。もちろん他の  $M_i$  についても同様な事実が成立する。

以上の定理をもとに  $F_2 \cdot F_1 S(u, v)$  に  $F_3, F_4$  を作用

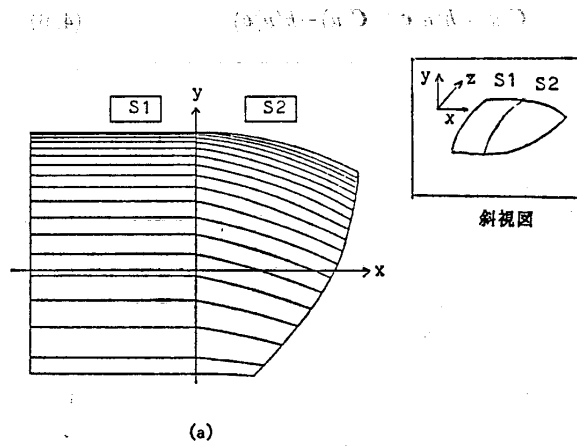


(a)

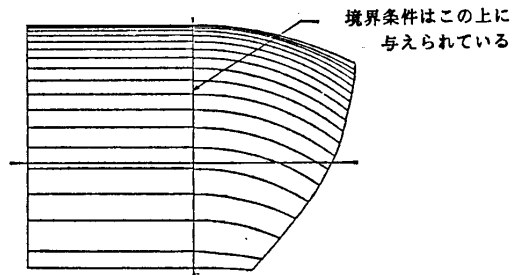


(b)

図 10 広域補間法の例  
Fig. 10 Example of interpolation.

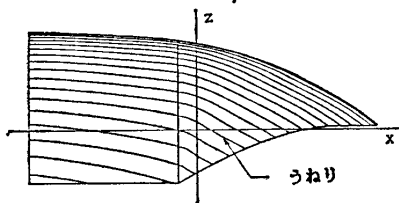
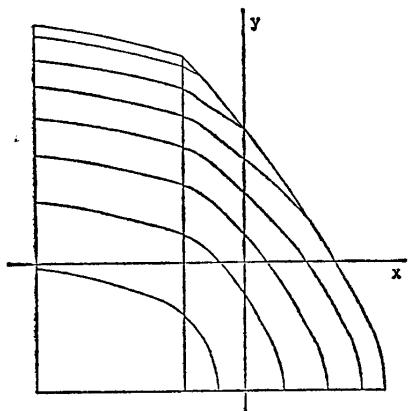


(a)

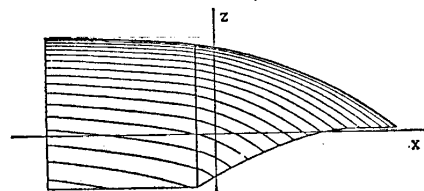
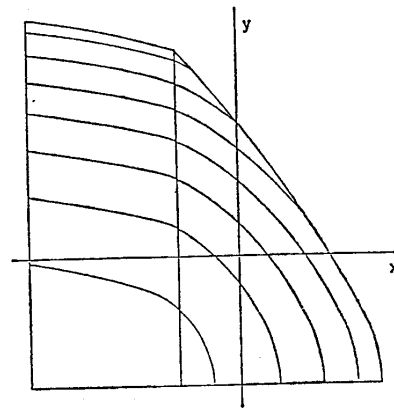


(b)

図 11 変形作用素の効果  
Fig. 11 Effects of transformation operator.



拡張Coonsの方法



新しく開発した方法

図 12 Coons の方法との比較  
Fig. 12 Comparison with extended Coons interpolation.

させたとき、 $B_1, B_2$  の境界値を変えないための条件を求める。簡単のため  $F_u = F_2 \cdot F_1$ ,  $F_v = F_4 \cdot F_3$  と記す。(4.3), (4.4), (4.5) が  $B_1 \sim B_4$  について成立することを前提とするので、次の式を仮定しておく。

$$\begin{aligned} M_1(0) = M_3(0) = N(0, 0), \quad M_2(0) = M_3(1) = N(1, 0) \\ M_1(1) = M_4(0) = N(0, 1), \quad M_2(1) = M_4(1) = N(1, 1) \end{aligned} \quad (5.4)$$

問題は、

$$\frac{\partial(F_u F_v S)}{\partial u} \times \frac{\partial(F_u F_v S)}{\partial v} = \frac{\partial(F_u S)}{\partial u} \times \frac{\partial(F_v S)}{\partial v} \quad \text{on } B_1, B_2 \quad (5.5)$$

が成立するための条件である。定理 1, 2 によれば、(5.5) が成立するための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} N_f = \frac{\partial(F_u S)}{\partial u} \times \frac{\partial(F_v S)}{\partial v} \quad \text{とするとき,} \\ M'_3(0) = \frac{\partial N_f}{\partial u}(0, 0), \quad M'_3(1) = \frac{\partial N_f}{\partial u}(1, 0) \\ M'_4(0) = \frac{\partial N_f}{\partial u}(0, 1), \quad M'_4(1) = \frac{\partial N_f}{\partial u}(1, 1) \end{aligned} \quad (5.6)$$

が成立することである (ただし  $F_u S$  は定理 1 と同様な前提条件を満たしていると仮定する)。これに関して次の定理が成立する (証明は付録参照)。

[定理 3] (5.6) が成立するための必要十分条件は、

$$\left\langle M'_3(0), \frac{\partial S}{\partial v}(0, 0) \right\rangle = \left\langle M'_1(0), \frac{\partial S}{\partial u}(0, 0) \right\rangle \quad (5.7)$$

$$\left\langle M'_3(1), \frac{\partial S}{\partial v}(1, 0) \right\rangle = \left\langle M'_2(0), \frac{\partial S}{\partial u}(1, 0) \right\rangle \quad (5.8)$$

$$\left\langle M'_4(0), \frac{\partial S}{\partial v}(0, 1) \right\rangle = \left\langle M'_1(1), \frac{\partial S}{\partial u}(1, 0) \right\rangle \quad (5.9)$$

$$\left\langle M'_4(1), \frac{\partial S}{\partial v}(1, 1) \right\rangle = \left\langle M'_2(1), \frac{\partial S}{\partial u}(1, 1) \right\rangle \quad (5.10)$$

が成立することである。

以上三つの定理により、境界条件  $M_i$  について (5.7) ~ (5.10) の条件が成立していれば、 $F_1 \sim F_4$  を順に作用させることによって全周に与えられた境界条件を満足することができる。

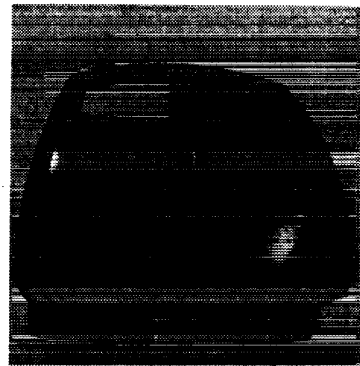


図 13 クリーナの陰影表示  
Fig. 13 Shaded image of a vacuum cleaner.

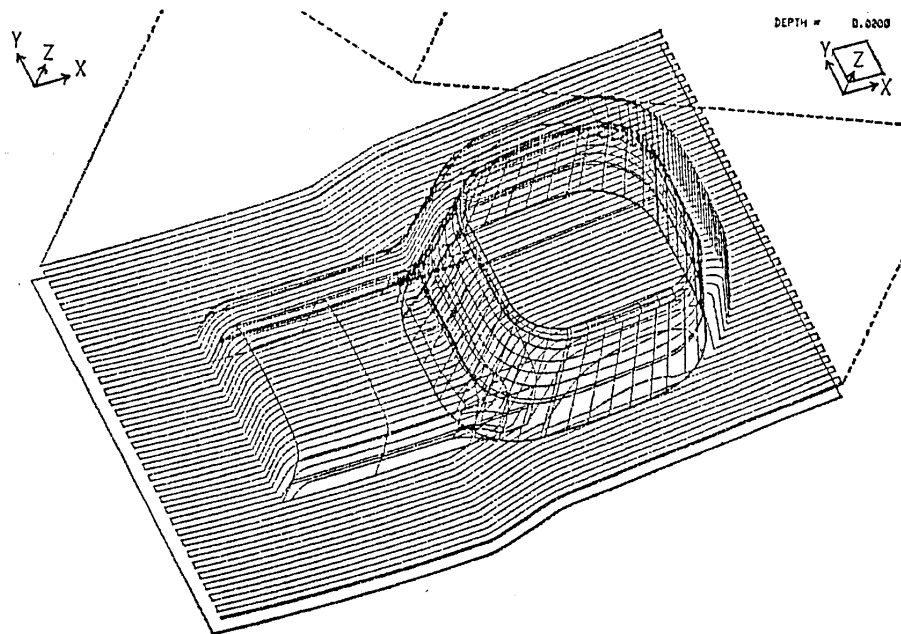


図 14 NC カッタパス(受話器)  
Fig. 14 Cutter path for a telephone receiver.



図 15 NC 加工した受話器のモデル  
Fig. 15 Physical model of the telephone receiver manufactured by NC machine.

## 6. 適用例

以上述べた方法で創成した曲面の例とその応用例について述べる。図 10 は広域補間法の効果を示す図。(a) は入力曲線、(b) は補間した結果を示す。少ない曲線で広い曲面が創成できる。図 11 は変形作用素を施した例。(a) は  $S_1, S_2$  を独立に補間したので、滑らかに接続していない。これに対し (b) は境界条件を与え、変形作用素を施して滑らかに接続した。図 12 は Coons の拡張形式<sup>4)</sup> (三角形が補間できるように拡張) との比較。緒言でも述べたように Coons の方法では曲面にうねりが発生するが、今回開発した補間法ではこのような現象は起きない。図 13 はクリーナ (電気掃除機) の陰影表示。曲面が交差した部分は、曲面を互いに切断<sup>5)</sup>して創成した。図 14 は NC 加工に適用した例。電話の受話機の曲面モデルとカッターパスを重ね書きしている。図 15 は NC 加工で作った樹脂モデルである (サイドに段差が見えるのは XY スキャン方式の荒加工のためである)。

以上の例は HITAC M-200 H (大型計算機)、および HIDIC V 90 (スーパーミニコン) 上で稼動する対話型システムを使って出力したものである。なお陰影表示は Ramtek 9400 (分解能  $1024 \times 1024$ , 同時 256 色) を使った。

## 7. 結 言

Bézier 曲面、B-spline 曲面は多項式表現であるため、広い曲面を創成するためには、点列を増す以外に方法はない。これに対し Coons の方法は、任意の曲線を他の任意の曲線に沿ってスイープ (Coons の方法では平行移動のみ) させ、ブレンドする方法<sup>7)</sup> であ

るからもともと広い曲面を補間できる可能性がある。ただし実際に使ってみるとブレンドの影響で曲面がうねるとか、三角形が作れないという問題が生じる。この点を解決するため、余分なブレンドをやめ、スイープの種類を増した。この結果、広い曲面が創成できるようになったが、同時に別の問題が生じた。すなわち曲面内部が折れるとか、隣接面と滑らかに接続しないという問題である。このため、折れた部分に境界条件 (接平面) を与え、曲面を変形することによって滑らかにする方法を開発した。この結果、三角形、回転面形状なども創成可能な広域補間法が実現できた。今後の課題は、スイープの種類を増し補間能力を一層強化することである。

謝辞 最後に本研究を推進する上でご討論、ご協力いただいた日立製作所システム開発研究所の津田順司部長、中央研究所の堀越彌企画室長、小沢時典 LA, DA 室長、高橋栄主任研究員、さらにコンピュータグラフィックスの開発を担当している栗原恒弥君、清水道裕君、大山恵三子さんに感謝いたします。

## 参 考 文 献

- 1) Coons, S. A.: Surface for Computer Aided Design of Space Form, MIT Project MAC TR-41 (June 1967).
- 2) Bézier, P. E.: *Numerical Control-Mathematics and Applications*, John Wiley and Sons, London (1972).
- 3) Riesenfeld, R. F.: Applications of B-spline. Approximation to Geometric Problems of Computer Aided Design, Ph. D. Thesis, Syracuse University (May 1973).
- 4) 津田他 4 名: 三次元形状処理システム HDS-III における曲面補間法, 昭和 52 年度電子通信学会全国大会予稿集, 第 5 分冊, p. 294 (1977).
- 5) 上西他 2 名: 広域曲面補間法, 情報処理学会第 29 回全国大会予稿集, 3L-2, p. 1749, 昭和 59 年後期 (1984).
- 6) 津田他 2 名: 3 次元図形処理システム MDM-I の開発, 情報処理学会コンピュータグラフィックス研究会資料, 5 (1982.3).
- 7) 山口富士夫: 形状処理工学 [I], [II], 日刊工業新聞社, 東京 (1982.12).

## 付 録

### A.1 定理 1 の証明

$M_2$  に関して (4.3), (4.4) が仮定されているので  $k(1)=1$  は容易にわかる。(4.10) で  $S_c(u, v) = S(0, v) + h(u, v)e(v)$  とおいて  $v$  で微分すれば、次式が成立。



$$\frac{\partial(F_2S)}{\partial v}(u, 1) = \frac{\partial S}{\partial v}(u, 1) + k'(1)(S(u, 1) - S_c(u, 1)) \quad (A.1)$$

$$D(u) = \left\langle \frac{\partial(F_2S)}{\partial v}(u, 1), N(u, 1) \right\rangle = k'(1) \langle S(u, 1) - S_c(u, 1), N(u, 1) \rangle \quad (A.2)$$

ここで定理の仮定から  $\langle S(u, 1) - S_c(u, 1), N(u, 1) \rangle \equiv 0$  ゆえ、 $D(u) \equiv 0$  が成立するための必要十分条件は、 $k'(1) = 0$  である。なお(4.3), (4.4)の仮定により、 $F_2 \nearrow$

$$k'(1) = \frac{\left\langle \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}(1, 1), M_2(1) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial S}{\partial u}(1, 1), M_2(1) \right\rangle \langle e(1), N(0, 1) \rangle}{\left\langle \frac{\partial^2 S}{\partial u}(1, 1), N(0, 1) \right\rangle \langle e(1), M_2(1) \rangle} \quad (A.3)$$

(4.13)より  $k'(1) = 0$  であるためには、上式の分子の { } 内が0。これと  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial u}(1, v), N(1, v) \right\rangle = 0$  を  $v$  で微分することにより次式が得られる。

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial u}(1, 1), M_2(1) - \frac{\partial N}{\partial v}(1, v) \right\rangle = 0 \quad (A.4)$$

また  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial v}(1, v), M_2(v) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial S}{\partial v}(1, v), N(1, v) \right\rangle = 0$  を  $v$  で微分し、 $M_2(1) = N(1, 1)$  とおけば、次式が得られる。

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial v}(1, 1), M_2(1) - \frac{\partial N}{\partial v}(1, v) \right\rangle = 0 \quad (A.5)$$

さらに  $|M_2(v)|^2 = |N(1, v)|^2 = 1$ ,  $N(1, 1) = M_2(1)$  から次式も成立している。

$$\left\langle N(1, 1), M_2(1) - \frac{\partial N}{\partial v}(1, 1) \right\rangle = 0 \quad (A.6)$$

(A.4)~(A.6)から  $M_2(1) = \frac{\partial N}{\partial v}(1, 1)$ , 十分条件であることは逆をたどれば容易に示すことができる。

**A.3 定理3の証明**

(5.7)について証明する。(5.8)~(5.10)も全く同様である。 $\frac{\partial(F_v S)}{\partial u} \times \frac{\partial(F_u S)}{\partial v} = M_1$  on  $B_1$  を  $v$  で微分し、 $v=0$  とおけば次式が成立。

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial^2(F_u S)}{\partial u \partial v}(0, 0) \times \frac{\partial S}{\partial v}(0, 0), \frac{\partial S}{\partial u}(0, 0) \right\rangle \\ &= \left| \frac{\partial S}{\partial u}(0, 0) \times \frac{\partial S}{\partial v}(0, 0) \right| \left\langle M_1(0), \frac{\partial S}{\partial u}(0, 0) \right\rangle \end{aligned} \quad (A.7)$$

$D(u) = N_f(u, 0) - M_3(v)$  とおく。定理1, 2より定理3を証明するためには  $D'(0) = 0$  が示せればよい。まず

$$\frac{\partial(F_v F_u S)}{\partial u} \times \frac{\partial(F_v F_u S)}{\partial v} = M_3 \text{ on } B_3 \text{ を } u \text{ で微分し、}$$

$\searrow$  を作用させても  $B_4$  の形は変わらないから、 $\frac{\partial(F_2 S)}{\partial u}(u, 1) = \frac{\partial S}{\partial u}(u, 1)$  は成立している。

したがって(5.1)が成立するための必要十分条件は、 $k'(1) = 0$  である。

**A.2 定理2の証明**

(4.3)~(4.5)から  $M_2(1) = N(1, 1)$  は成立している。

(4.12)を  $k(1) = 1$ ,  $\left\langle \frac{\partial S}{\partial u}(1, 1), M_2(1) \right\rangle = 0$  に注意して微分すれば次式が得られる。

$N$  との内積をとれば

$$\langle M_3(0), N(0, 0) \rangle = 0 \quad (A.8)$$

がわかる。また  $N_f = \frac{\partial(F_u S)}{\partial u} \times \frac{\partial(F_u S)}{\partial v}$  を代入して  $D(u)$  を微分し、 $u=0$  とおけば次式が成立する。

$$\alpha D'(0) = A(0) - \langle A(0), N(0, 0) \rangle N(0, 0) - \alpha M_3(0) \quad (A.9)$$

$$\text{ここで } \alpha = \left| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right|,$$

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{\partial^2(F_u S)}{\partial u^2}(u, 0) \times \frac{\partial(F_u S)}{\partial v}(u, 0) \\ &+ \frac{\partial(F_u S)}{\partial u}(u, 0) \times \frac{\partial^2(F_u S)}{\partial u \partial v}(u, 0) \end{aligned} \quad (A.10)$$

(A.8), (A.9)より

$$\langle D'(0), N(0, 0) \rangle = 0 \quad (A.11)$$

また

$$\begin{aligned} & \alpha \left\langle D'(0), \frac{\partial S}{\partial u}(0, 0) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}(0, 0) \times \frac{\partial S}{\partial v}(0, 0), \frac{\partial S}{\partial u}(0, 0) \right\rangle \\ & - \alpha \left\langle M_3(0), \frac{\partial S}{\partial u}(0, 0) \right\rangle \end{aligned}$$

一方  $\left\langle M_3(u), \frac{\partial S}{\partial u}(u, 0) \right\rangle = 0$  は常に成立しているから

$$\begin{aligned} & \left\langle M_3(0), \frac{\partial S}{\partial u}(0, 0) \right\rangle \\ &= - \left\langle \frac{\partial S}{\partial u}(0, 0) \times \frac{\partial S}{\partial v}(0, 0), \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}(0, 0) \right\rangle \end{aligned}$$

したがって

$$\left\langle D'(0), \frac{\partial S}{\partial u}(0, 0) \right\rangle = 0 \quad (A.12)$$

$$\begin{aligned} & \alpha \left\langle \mathbf{D}'(0), \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0, 0) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, 0) \times \frac{\partial^2 (F_* \mathbf{S})}{\partial u \partial v}(0, 0), \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0, 0) \right\rangle \\ & \quad - \alpha \left\langle \mathbf{M}_3(0), \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0, 0) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

(A.13)に(A.7)を代入すれば

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{D}'(0), \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0, 0) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{M}_1(0), \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, 0) \right\rangle - \left\langle \mathbf{M}_3(0), \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0, 0) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

(A.11), (A.12), (A.14) から  $\mathbf{D}'(0)=0$  であるための必要十分条件は, (5.7) である.

(昭和60年7月3日受付)

(昭和60年10月17日採録)



上西 博文

昭和48年京都大学理学部数学科卒業. 昭和50年大阪大学理学部数学科修士課程修了. 同年(株)日立製作所に入社. 以後中央研究所にて, 自由曲面を主体とした三次元形状処理技術, NC処理技術, 数値計算用自動メッシュ生成技術などの研究に従事し現在に至る.



矢島 章夫

昭和45年東京大学工学部計数工学科卒業. 昭和47年同大学院修士課程修了. 同年(株)日立製作所に入社. 以後, 中央研究所にて, 三次元形状処理技術, コンピュータグラフィックスなどの研究に従事. 現在同所主任研究員. IEEE, ACM 会員.