

統計的ゆらぎによる画像修復の外部磁場の特性

Properties of External Field in Magnetism for Image Restoration by Statistical Fluctuation

前田道治†
Michiharu Maeda宮島廣美‡
Hiromi Miyajima

1. まえがき

統計物理を用いて劣化画像を修復する多くの手法が提案されている [1]-[3]. 統計物理によって劣化画像から原画像を推定するために, 2 値画像に対してはイジングモデルが, 階調画像に対してはポッツモデルがある. 従来, それらのモデルは物性物理の分野で磁気的特性を表現する問題に対して適用される [4]. しかし, ベイズの公式を用いることによって, 原画像の統計的な推定が統計物理によって解析されるようになった. このような統計物理による画像修復の基本概念は, 任意の画素は周囲の画素に影響を受けるということである. 言い換えると, 周囲の画素が白なら着目した画素は白と予測される. 画素の状態が周囲の画素の状態に依存するという確率モデルはマルコフ確率場であり統計的に定式化される [5]. 画像修復に対して, 統計物理の観点からと視覚情報処理や神経回路網の観点からいくつかの手法がある [6]-[9].

本論文では, 画像修復に対して統計的ゆらぎにおける外部磁場の特性を述べる. 本手法は統計物理における従来の外部磁場の拡張である. 原画像を推定するために, 着目した画素と同様に周囲の画素が外部磁場として用意され, 確率モデルの統計的ゆらぎに従って劣化画像を修復する. 数値計算により本手法の特性を記述し有効性を議論する.

2. 確率モデル

磁性体のイジングモデルを 2 値状態に対して記述する. スピンシステムにおいて, 各格子で状態 s_i が定義され, s_i は上向きスピン ($s_i = 1$) または下向きスピン ($s_i = -1$) とみなされる. このとき, 相互エネルギーは $s_i = s_j$ のとき $-J$ となり, $s_i \neq s_j$ のとき J となる. ここで, 相互作用 J は最近接格子点で考えられ, 外部磁場 h が与えられる.

それゆえ, システム全体のエネルギー \mathcal{H} は次のように記述される.

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j - h \sum_{i=1}^N s_i \quad (1)$$

ここで, $\langle i, j \rangle$ は注目したシステムの格子点对を意味し, N は格子点の総数である.

このとき, 確率分布は次のように与えられる.

$$P(\{s_i\}) = \frac{\exp(-\mathcal{H}/T)}{Z} \quad (2)$$

ここで, $\{s_i\}$ はスピン状態の集合を意味し, T はギブス・ボルツマン分布の温度である. さらに, Z は次のような分配関数である.

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} \exp(-\mathcal{H}/T) \\ &= \sum_s \exp(-\mathcal{H}/T) \end{aligned} \quad (3)$$

イジングモデルの巨視的な特性を特徴づける磁化は次のように与えられる.

$$m = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N s_i \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_s \left(\left(\sum_i s_i \right) P(\{s_i\}) \right) \quad (4)$$

ここで, $\langle \cdot \rangle$ は期待値である.

磁化 m はシステム全体が一定の状態に秩序を持つか否かを示す判定の基準である. 磁気的システムは, $T < T_c$ で $m \neq 0$ の状態のとき強磁性, $T > T_c$ で $m = 0$ のとき常磁性と呼ばれる. ここで, T_c は転移点である.

イジングモデルを図 1 を用いて説明する. この図ではスピンは上向きの状態 (黒の状態) と下向きの状態 (白の状態) を持つ. 影のついた状態に着目した場合, この上下左右の近傍の状態は下向きの状態 (白の状態) である. したがって, 着目した状態は周囲と同じ下向きの状態になる. また, 外場が下向きの場合, 着目した状態は下向きの状態になる. 以下の節では, 統計物理の磁気特性に従った画像修復を議論する.

3. 統計的ゆらぎによる画像修復

3.1 画像修復

イジングモデルの統計的ゆらぎを用いて, 劣化画像を修復するために, 画像データの 2 値状態 ($Q = 2$) を扱う方法を説明する.

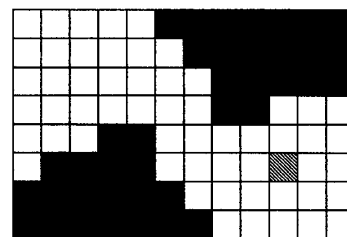


図 1 イジングモデルの説明図. 黒の状態はスピンの上向き状態を表し, 白の状態は下向きの状態を表す. さらに, 影のついた状態は着目した状態を意味する.

† 久留米高専, Kurume National College of Technology

‡ 鹿児島大, Kagoshima University

2値画像は白黒で構成されるので、白の状態は下向きスピン(-1)、黒の状態は上向きスピン(+1)とみなされる。画像は正方形格子 $v = \{i | i = 1, 2, \dots, N\}$ で与えられ、劣化画像 $r = \{r_i | i \in v\}$ 及び修復画像 $x = \{x_i | i \in v\}$ は -1 または +1 の状態を持つ。

画像修復に対して、統計物理による方法の基本は、任意の画素は周囲の画素に影響を受けるという概念に基づいている。言い換えると、周囲の画素が白なら着目した画素は白、また周囲の画素が黒なら着目した画素は黒、と予測される。画素の状態は周囲の画素の状態に依存するという確率モデルはマルコフ確率場であり統計的に定式化される。

劣化画像から原画像を推定するために、ベイズの公式を用いる。ここで、条件つき確率を用いた画像推定の確率手法は次のように記述される。

$$P(x|r) = \frac{\exp(-\mathcal{H}(x|r)/T)}{Z} \quad (5)$$

$$\mathcal{H}(x|r) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} x_i x_j - \sum_{i=1}^N r_i x_i \quad (6)$$

$$Z = \sum_x \exp(-\mathcal{H}(x|r)/T) \quad (7)$$

式(7)の事後確率はランダム場におけるイジングモデルの強磁性相互作用によるボルツマン因子を持つ。つまり、画像修復問題はランダム場におけるイジングモデルに対する統計物理に帰着する。なお、式(1)から式(3)における s_i と h はそれぞれ本節における x_i と r_i に対応する。

多値状態に対して、ポッツモデルの統計的ゆらぎを用いた Q 状態画像データの画像修復を与える。式(5)に示される条件つき確率を用いて、劣化画像から原画像が推定される。ポッツモデルにおける状態は多値であるので、式(6)の代わりに、次式を用いる。

$$\mathcal{H}(x|r) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(x_i, x_j) - \sum_{i=1}^N \delta(r_i, x_i) \quad (8)$$

ここで、 $\delta(A, B)$ はクロネッカーのデルタ関数である。つまり、 $\delta(A, B) = 1$ は $A = B$ のとき、 $\delta(A, B) = 0$ は $A \neq B$ のとき与えられる。

$Q = 2$ のとき、式(8)は式(6)と一致する。2値状態の場合、イジングモデルとの対応のため、 $x_i = \{1, -1\}$ としている。多値状態の場合、一般の信号処理への対応のため、 $x_i = \{0, 1, 2, \dots, Q-1\}$ としている。

3.2 外部磁場と統計的な手続き

従来、劣化画像の値は着目した画素のみに外部磁場として与えられる。本節では、着目した画素及び周囲の画素を外部磁場として与えられる新たな手法を与え、劣化

表1 さまざまなモデル.

モデル	外場
I	5画素の平均
II	9画素の平均
III	5画素の中間
IV	9画素の中間

画像は確率モデルの統計的ゆらぎに従って修復される。それゆえ、次のような関数を用いる。

$$\mathcal{H}(x|r) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(x_i, x_j) - \sum_{i=1}^N \delta(\gamma(r_i), x_i) \quad (9)$$

ここで、 $\gamma(r_i)$ は近傍の画素により影響を受ける関数である。

$\gamma(r_i)$ に対して、表1に示すように、4つのモデルが外部磁場として考えられる。外部磁場として、5画素の平均値、9画素の平均値、5画素の中間値、9画素の中間値の基準に従って、それぞれモデルI、モデルII、モデルIII、モデルIVを与える。

モデルIとモデルIIIにおいて、図2(a)に示すように、5画素が外部磁場として用意される。モデルIIとモデルIVは外部磁場として9画素をもつ(図2(b)参照)。画像修復に対して、4つのモデルによって外部磁場を変化させる。このように外部磁場を変化させることによって、次節で示すように、画像処理として品質の異なる修復画像が構築される。本手法では、(8)式の r_i を(9)式の $\gamma(r_i)$ で置き換えているので、平滑化された画素が与えられることになる。

統計的ゆらぎを用いた画像推定において、非常に多くの繰返し回数が状態遷移に対して要求される。したがって、本論文では、遷移確率 $P(x_i \rightarrow x_j)$ はメトロポリス法によって実行する。それゆえ、次の関数を採用する。

$$P(x_i \rightarrow x_j) = \begin{cases} 1 & (\Delta\mathcal{H} < 0) \\ \exp(-\Delta\mathcal{H}/T) & (\Delta\mathcal{H} \geq 0) \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 x_i から x_j への状態遷移は、 $\Delta\mathcal{H} < 0$ のとき確率1で、 $\Delta\mathcal{H} \geq 0$ のとき確率 $\exp(-\Delta\mathcal{H}/T)$ で、実行される。

4. 数値計算

数値実験において、 256×256 サイズおよび $Q = 2^5$ 階調値によって、画像推定は劣化画像を修復するように

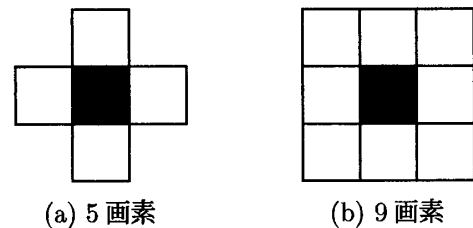


図2 モデルI, モデルII, モデルIII, モデルIVにおいて外部磁場として用いられる5画素と9画素.



図3 劣化画像 i 及び従来法, モデル I, モデル II, モデル III, モデル IV における結果の例.

実行される. 図 2 (a) に示すように, 劣化画像は原画像と比較して 30% の一様ノイズを含んでいる. すなわち, 256×256 の画素の中からランダムに選ばれた 30% の画素にノイズが含まれる. そして, 選ばれた画素は 0 から 31 までの値でランダムに与えられる. 状態遷移の始まる前の画素の初期値はランダムに与えられ, 温度 T は 0.1 刻みで 4.0 から 0.1 まで減少する. さらに, 繰返し回数は全画素に対して 100 回実行される.

画像修復に関して, 図 2 の (b) から (f) までに, それぞれ従来法, モデル I, モデル II, モデル III, モデル IV の実験結果の例が示されている. ここで, 相互作用 J は 0.70 である. モデル III とモデル IV は他の手法より優れている.

他の画像の例として, 図 3 (a) に劣化画像を示す. 前述の画像と同様に, 劣化画像は原画像と比較して 30% の一様ノイズを含んでいる. 計算の条件は前述と同じである. 図 3 の (b) から (f) に各手法における結果の例を示す. ここで, 相互作用 J は 0.65 である. モデル III とモデル IV は他の手法より良い結果を示している.

画像符号化の品質の測定基準として, ピーク信号対ノイズ (PSN) 比を用いる. PSN 比 P は次のように与え

表 2 ピーク信号対ノイズ (PSN) 比. 結果は 100 回の試行の平均である.

モデル	画像 i	画像 ii
従来法	21.9	18.8
I	20.8	19.5
II	21.0	19.7
III	24.8	22.0
IV	24.9	21.7

られる [10]:

$$P = 10 \log_{10}(\sigma/E) \text{ [dB]} \quad (11)$$

ここで, σ は最大階調数の二乗であり, E は原画像 o_i と修復画像 x_i の平均二乗誤差のである.

表 2 に 100 試行の推定画像に対する平均の PSN 比を示す. 画像 i と画像 ii の両方ともに, モデル III とモデル IV が他の手法より優れている.

5. むすび

画像修復のための統計的ゆらぎを用いた外部磁場を与え, その有効性を数値計算により検討した. 本手法は統

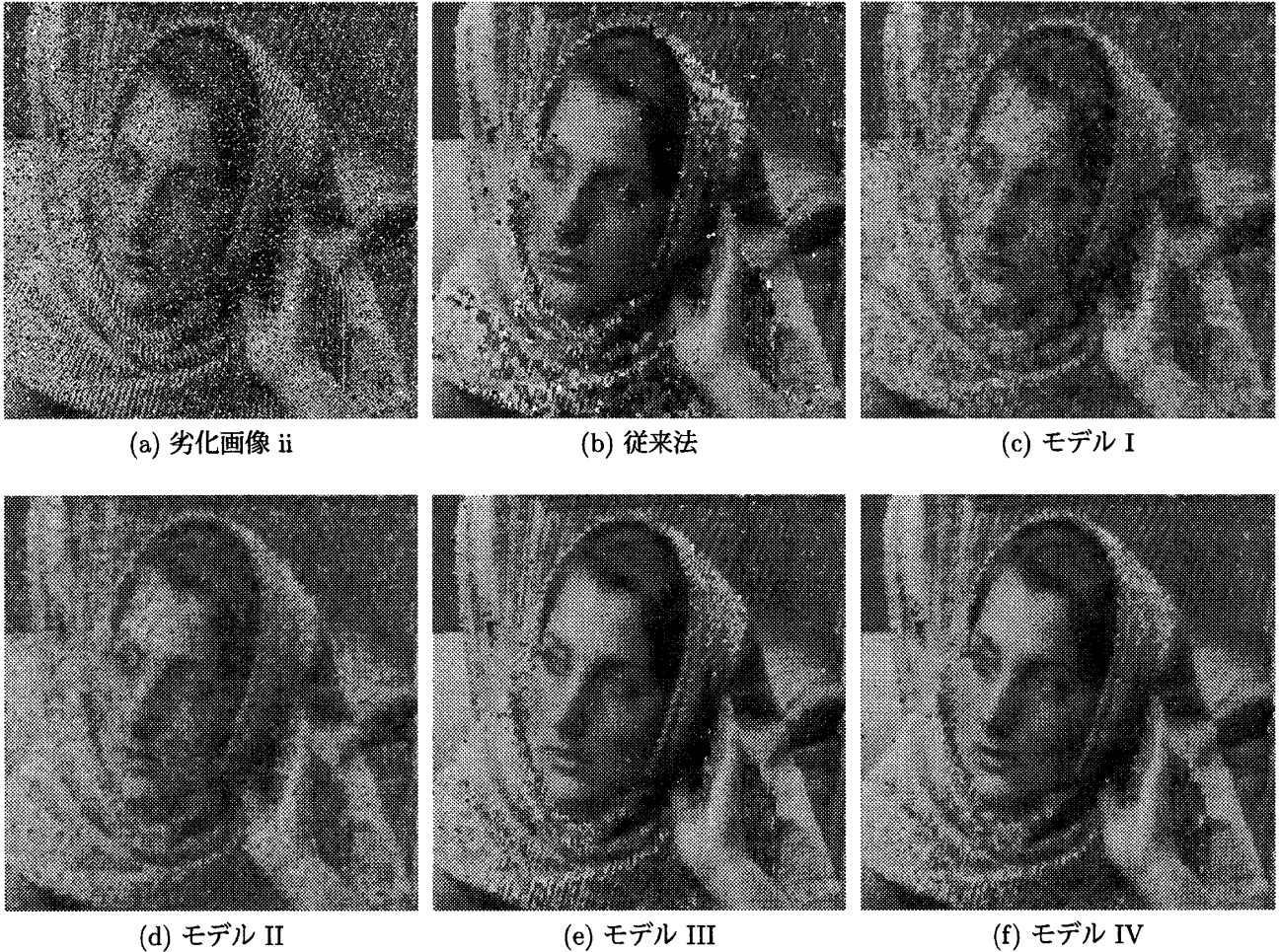


図4 劣化画像 ii 及び従来法, モデル I, モデル II, モデル III, モデル IV における結果の例.

計物理における従来の外部磁場の拡張であった。原画像を推定するために、着目した画素と同様に周囲の画素が外部磁場として与えられ、劣化画像は確率モデルに従って修復された。今後の課題として、より有効な方法を検討していきたい。

文 献

- [1] H. Nishimori, *Statistical physics of spin glasses and information processing: an introduction*, Oxford University Press, 2001.
- [2] M. Maeda, M. Ohta, and H. Miyajima, "An algorithm of statistical mechanics for image restoration," *IEICE Proc. Int. Symp. Nonlinear Theory and its Applications*, vol.1, pp.107-110, 2001.
- [3] M. Maeda and H. Miyajima, "State sharing methods in statistical fluctuation for image restoration," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E87-A, pp.2347-2354, 2004.
- [4] L.E. Reichl, *A modern course in statistical physics*, University of Texas Press, 1980.
- [5] S. Geman and D. Geman, "Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intel.*, vol.PAMI-6, pp.721-741, 1984.
- [6] T. Poggio, V. Torre, and C. Koch, "Computational vision and regularization theory," *Nature*, vol.317, pp.314-319, 1985.
- [7] J. Zhang, "The mean field theory in EM procedures for Markov random fields," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.40, pp.2570-2583, 1992.
- [8] 飯島泰蔵, *視覚情報の基礎理論—パターン認識問題の源流—*, コロナ社, 1999.
- [9] 川人光男, *脳の計算理論*, 産業図書, 1996.
- [10] A. Gersho and R.M. Gray, *Vector quantization and signal compression*, Kluwer Academic Publishers, 1992.