ショートノート

球面投影による多面体の内外判定方法†

長 島 忍††

与えられた空間中の点が立体の内部に位置するか外部に位置するかを判定する立体の内外判定は，複合形状の生成など高度な図形処理に用いられ，きわめて重要な役割りを果たすが，その判定は容易ではない．従来の多面体の内外判定方法には問題がないとはいえず，今回球面投影を利用して新しい判定方法を考案した．球面三角形の式を利用して球面に投影された多角形の面積が求まるので，立体のすべての面を与えられた点を中心とする半径1の球に投影すると，与えられた点が立体の内部にあるか外部にあるかによってその面積の総和は 4π か0になる．実際にプログラムを作成してこの判定方法の有効性や実用性を確認した．

1. まえがき

最近，コンピュータ・グラフィックスや CAD/CAM など，コンピュータを利用した図形処理が盛んに行われるようになった．幾何モデル生成処理システムにおける複合形状の生成や立体の体積・重心の計算など，高度な図形の処理・解析では，ソリッドモデルによる処理が必要である．ソリッドモデルの特徴の一つは，空間中に与えられた任意の点が立体の内部に位置するか外部に位置するかを判定できることである．この立体の内外判定は，複合形状の生成など高度な図形処理に用いられ，きわめて重要な役割りを果たすが，その判定は容易ではない．

従来の多面体の内外判定方法には問題がないとはいえず，今回球面投影を利用して新しい判定方法のアルゴリズムを考案し，多面体への適用を試みたのでここに報告する．

2. 球面投影による多面体の内外判定

初めに2次元の多角形に対し，平面上の与えられた点がこの多角形の中にあるか外にあるかを判定する内外判定の方法について簡単に説明する[1]．

（方法A） 図1(A)のように，与えられた点から多角形の十分外に補助線を伸ばし，この補助線と多角形の境界線分との交点の数を調べる方法がある．交点数が奇数か偶数かで，点が多角形の中にあるか外にあるかを判定できる．

（方法B） 図1(B)のように，与えられた点に対し，多角形の境界線分のなす中心角の総和を計算して判定を行う方法がある．境界線分が点に対し左まわりか右まわりかで角度の正負を決めると，与えられた点が多角形の外にあるとき角度の総和が0になり，多角形の中にあるとき角度の総和が 2π になる．

次にこれらの考え方を3次元に拡張すると，空間中の与えられた点が多面体の中にあるか外にあるかを判定する多面体の内外判定を行うことができる．たとえば方法Aについては，図2(A)のように与えられた点から多面体の十分外に補助線を伸ばし，この補助線と多面体を構成する多角形の面との交点の数を調べれば，交点数が奇数か偶数かで点が多面体の中にあるか外にあるかを判定できる．

方法Bの考え方を3次元に拡張すると，図2(B)のように立体の面を与えられた点を中心とする半径1の球に投影した場合，与えられた点が立体の中にあるとき投影された面積の合計が球の表面積 4π に等しくなり，点が立体の外にあるとき表面積の合計は0になる．ソリッドモデルでは面に表裏の向きがつけられており，面が表向きに投影されたときの面積を正，裏向きに投影されたときの面積を負とする．

Aの方法はすでに知られているが，立体の面と補助線との交点計算などの処理を必要とする．また図2(A′)のように，多角形の場合と同様に，多面体の内外判定においても，補助線が立体と接触するとき判定が難しくなり，判定を正確に行うにはかなり複雑なアルゴリズムが要求される[2]．今回Bの方法の内外判定のアルゴリズムを作成し，多面体に適用することを考えた．

† A Spatial Inclusion Test for Polyhedra Using a Spherical Projection by SHINOBU NAGASHIMA (Department of Graphics, College of Arts and Sciences, University of Tokyo).

†† 東京大学教養学部図学教室

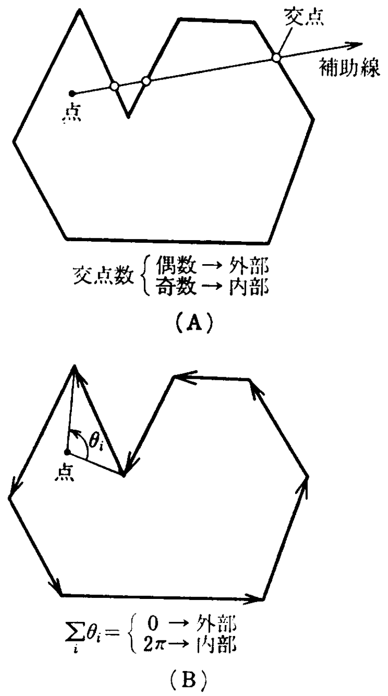

図 1　多角形の内外判定方法
Fig. 1　Methods of inclusion test for polygons.

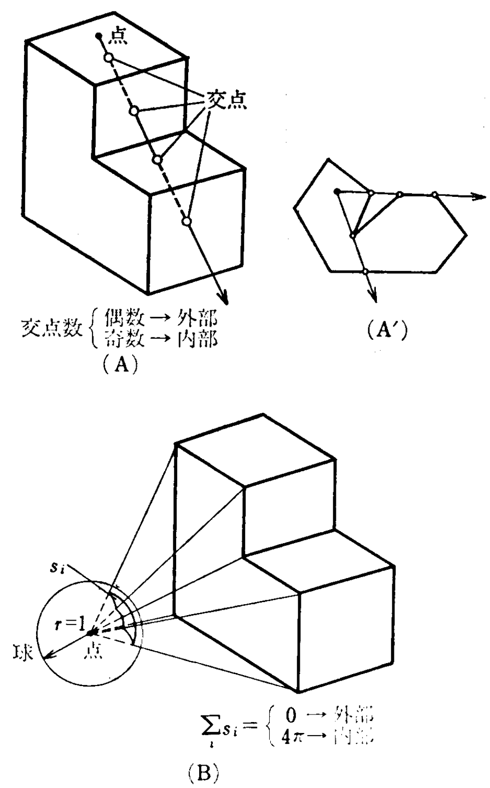

図 2　多面体の内外判定方法
Fig. 2　Methods of inclusion test for polyhedra.

3. 新しい判定方法のアルゴリズムと適用例

次に新しい判定方法の具体的なアルゴリズムについて説明する．

与えられた点Qを中心とする半径1の球を考え，多面体の面を構成する多角形をこの球に投影し，球の表面上における多角形の面積を計算する．球面三角形の公式[3]を利用して球面上の多角形の面積を計算することができる．図3のように n 角形の j 番目の頂点を P_j とし，球面上における多角形の頂点のなす角を θ_j とすると，球面上の多角形の面積 s は，

$$s=\sum_{j=1}^{n}\theta_j-(n-2)\pi$$

となる．

θ_j は，二つの三角形 $QP_{j-1}P_j$ と QP_jP_{j+1} が作る角に等しい．したがってこれらの三角形の単位法線ベクトルを n_{j-1}, n_j とすると，内積 $n_{j-1}\cdot n_j$ と逆三角関数 (arccos) から θ_j が求まり，球面上の多角形の面積が計算できる．ただし $j=1$ のとき，$j-1$ は n になると考える．また点Qが多角形の表側に位置するか裏側に位置するかで面積 s の正負を決定する．

以上の操作を立体のすべての面について繰り返し，面積 s の総和を計算する．面積の合計は理論的には0か 4π になるので，誤差を考慮し，たとえば面積の合計が 2π 未満であれば立体外の点，2π 以上であれば立体内の点であるという判定を出す．

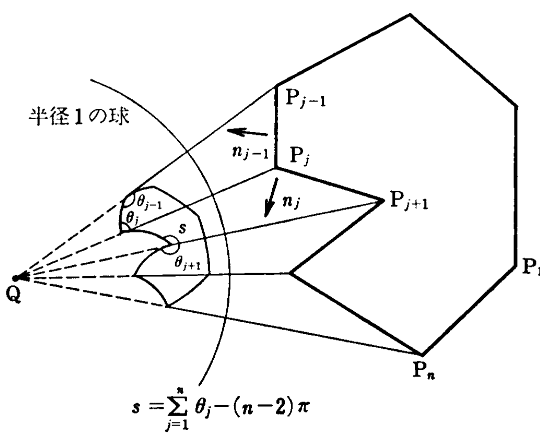

図 3　球面上の多角形の面積
Fig. 3　The area of a polygon on the sphere.

この判定方法を利用すると，たとえば容易に集合演算を実現することができる．実際に集合演算プログラムに本手法を組み込み[4]，図 4 のように様々な形状の多面体に適用した．図の多面体は直方体と正多角柱の集合演算から生成され，完成するまでに本手法を何度

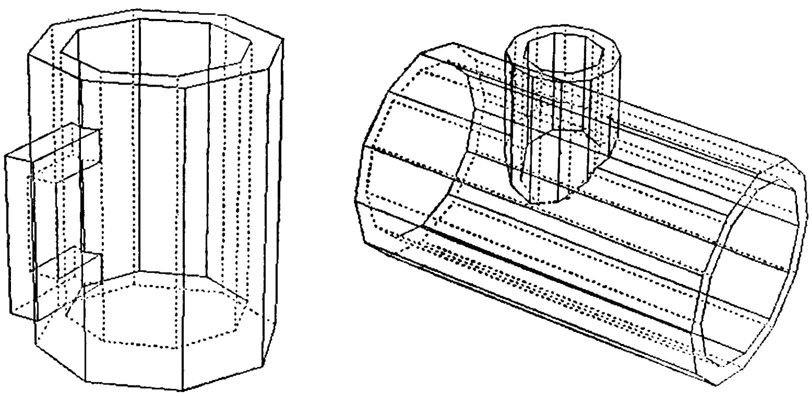

図 4　本手法を適用して生成した立体の例
Fig. 4　Examples of objects generated using the new method.

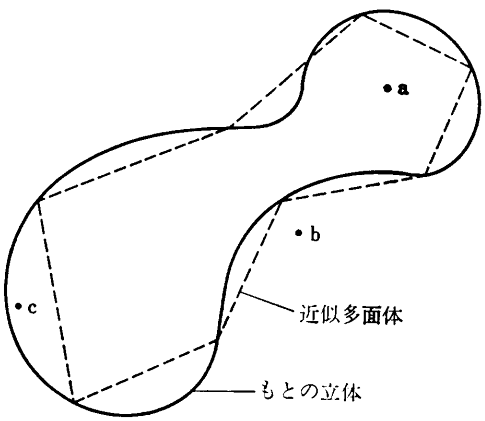

図 5　曲面を含む立体への適用
Fig. 5　Application to objects surrounded with curved surfaces.

も適用している．なお球面上の多角形の面積計算における誤差も十分少なく，この判定方法の有効性や実用性を確認した．

曲面を含む立体については，上手に多面体近似できれば，本手法を適用することができる．たとえば**図 5** の点 a，b のように，近似により立体の内外の位置関係が変化しなければ判定可能であるが，点 c の場合は正しい判定ができない．したがって与えられた点の近傍の曲面を，注意深く近似しなければならない．

トーラスのように穴がある立体や空洞のある立体についても，面の表裏の向きが正確であれば，正しい判定を行うことができる．ただしこの場合，空洞の中など物質の存在しないところは立体の外部と定義する．

4. むすび

ソリッドモデルの立体に対し，空間中に与えられた点がこの立体の内部に位置するか外部に位置するかを判定する内外判定の新しい方法を提案した．ここで提案された方法は補助線を利用しないので，従来の方法のように補助線の選び方により判定が困難になることはない．また簡単なアルゴリズムで，判定を行うことができる．実際にプログラムを作成して様々な形状の多面体に適用し，この判定方法の有効性や実用性を確認した．

参考文献

1) 山口富士夫：コンピュータディスプレイによる図形処理工学，p. 302，日刊工業新聞社，東京 (1981).
2) Kalay, Y. E.: Determining the Spatial Containment of a Point in General Polyhedra, *Comput. Gr. Image Process.*, Vol. 19, pp. 303-334 (1982).
3) 笹部貞一郎：問題解法幾何学辞典（第 2 版），p. 1072，聖文社，東京 (1976).
4) 長島　忍，木村文彦：パーソナルコンピュータによる図形処理教育用ソリッドモデラの開発，昭和 60 年度「グラフィクスと CAD シンポジウム」論文集，pp. 143-152，情報処理学会 (1985).

（昭和 60 年 8 月 23 日受付）
（昭和 61 年 4 月 17 日採録）

長島　忍（正会員）
1955 年生．1979 年東京大学工学部精密機械工学科卒業．同年東京大学教養学部図学教室助手．工学博士．CAD/CAM や生体を対象とした形状モデリング，図学の CAI，計算幾何学などグラフィクス全般に興味をもつ．日本図学会，精密工学会，ACM 各会員．