Mクラスの非線形2点境界値問題における不動点法†

——ニュートン法の収束性——

鈴 木 千 里††

不動点法は非線形2点境界値問題 $y''=f(x, y), -1\leqq x\leqq 1, y(-1)=y(1)=0$ を不動点問題に置き換えて解く選点法である．この解法は，境界点を除く選点数が k であれば，近似解を規定する k-連立非線形方程式を導く．本論文では，$[-1,1]\times(-\infty,\infty)$ の領域において $\partial f(x, y)/\partial y\geqq 0$ の条件下で，この連立方程式に対してニュートン法の適用を試みる．まず与えられた初期近似解をもとに，k-連立非線形方程式に対するニュートン法の出発値ベクトルを構成する．つぎに，この出発値ベクトルのもとでニュートン法が収束的となるための十分条件を与える．すなわち，ある整数 $K\geqq 1$ が存在して，$k\geqq K$ ならニュートン法が収束的となることを示す．

1. 序　　文

今日の非線形理論においては，非線形問題の初期近似解を得ることが本質的となることが多い．特に，ニュートン法におけるカントロビッチの理論や常微分方程式の境界値問題の解法における占部の理論[1]，Henrici の理論[2]などは，適当な条件を満たす初期近似解を見つければ，厳密解の存在すら保証する．このような思想は，今日発展途上にある数値シミュレーションに依拠する計算物理学や計算生物学などへの貢献に今後の期待は大きい．しかしそのような条件を満たす初期近似解の具体的な構成に関する研究は比較的少ない．

最近 Chawla and Shivakumar[3] は，非線形2点境界値問題

$$\begin{cases} y''=f(x, y), & -1\leqq x\leqq 1 \\ y(-1)=y(1)=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

の解法に対する Henrici の理論[2]や Lees の理論[4]における初期近似解の構成に関する不備について言及し，4次の差分近似から導かれる非線形方程式に対するニュートン法の適用について議論している．実際，Lees のクラスに対する非線形2点境界値問題に対して境界条件のみに依存する初期近似解を提案した．またこの初期近似解のもとで，ニュートン法が収束するための十分条件を与えている．しかし，与えられた問題によっては初期近似解の精度はすこぶる悪い．したがって差分近似のための分割を多くしなければ，収束を保証するための十分条件を満たさないことがある[3]．

本論文では，差分法に対する Chawla and Shivakumar[3] と類似な結果をMクラスの非線形2点境界値問題における不動点法（文献 5),6)）に対して導く．すなわち与えられる初期近似解のもとで離散方程式に対するニュートン法が収束的となるための条件を与える．そのために第2章では，議論に必要な不動点法の最小限度の基本的概念と記号の導入を行い，さらに，近似誤差と打切誤差に関する2，3の補題を文献 5)，6) から準備する．第3章では，離散方程式を記述する関数のヤコビアンの逆を評価するための手段として，一つの作用素の逆を評価する．第4章の前半では，ニュートン法の収束性を議論するために必要な諸量を評価し，後半においてカントロビッチのニュートン法に関する定理の適用を試みる．

なお，本論文の結果はMクラスの問題に対する不動点法の自動解法サブルーチンに有効である．

2. 準　　備

本論文では，原則として文献6）と同じ記号を用いる．しかし本論文の議論において必要な最小限度の記号と諸概念を説明する目的で不動点法を概観する．また，次章以降において必要となる2，3の補題を準備する．

2.1 不動点法

2点境界値問題(1.1)において，$f(x, y)$ の1次偏導関数 $\partial f(x, y)/\partial y$ が領域 $[-1, 1]\times(-\infty,\infty)$ の上で連続的であり，かつ条件

$$\partial f(x, y)/\partial y\geqq 0 \tag{2.1}$$

を満たせば，それはMクラスに属す問題という[2]．

不動点法は境界値問題(1.1)を直接解く代わりに(1.

† Numerical Solutions to Nonlinear Two-point Boundary Value Problems of M-Class by a Numerical Method for Fixed Point Problems —Convergences of Newton's Method— by CHISATO SUZUKI (International Institute for Advanced Study of Social Information Science (IIAS-SIS), Fujitsu Ltd.).

†† 富士通(株)国際情報社会科学研究所

1)の問題と等価な不動点問題

$$y(x)-T(y)(x)=0 \text{ in } C^2 \tag{2.2}$$

を解く[5]．ここで，C^2 は $y(-1)=y(1)=0$ を満たす区間 $I=[-1,1]$ の上で定義された2階連続微分可能な関数からなる空間で，T は C^2 の上で定義されたつぎの作用素である：$y\in C^2$ に対して

$$T(y)(x)=\int_{-1}^{1} g(x,u)f(u,y(u))\mathrm{d}u \tag{2.3}$$

$$g(x,u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+1)(u-1), \text{ if } x\leqq u,\\ \dfrac{1}{2}(x-1)(u+1), \text{ if } x>u.\end{cases}$$

(2.2)式の近似として

$$T_k(y)(x)=y(x)-\phi_k(y)(x) \text{ for } y\in C^2 \tag{2.4}$$

($k\geqq 1$) を用いる (T_k を積分作用素とよぶ)．ただし

$$\phi_k(y)(x)=\sum_{i=0}^{k+1} s_i(x)y''(x_i). \tag{2.5}$$

ここで，$x_0=-1, x_{k+1}=1$ そして x_i $(i=1,\cdots,k)$ は $k+1$ 次の Legendre 多項式の1次導関数 $p_{k+1}'(x)$ の k 個の零点である．便宜上，この k 個の零点を k-選点とよび X_k によって表す．$s_i(x)$ は次式で定義される $k+3$ 次の多項式である：

$$s_i(x)=\int_{-1}^{1} g(x,u)l_i(u)\mathrm{d}u, \tag{2.6}$$

ここで

$$l_i(u)=\pi(u)/\{\pi'(x_i)(u-x_i)\}$$
$$\pi(u)=(u-x_0)\times\cdots\times(u-x_{k+1}).$$

(2.5)の ϕ_k は関数 $y\in C^2$ に対する補間の性質をもち，y が $k+3$ 次以下の多項式ならば，正確に $\phi_k(y)=y$ が成立する．

$T_k(y)(x)$ を k-選点 X_k 上で離散化し，(1.1)式の関係を用いて，近似解を規定する k 個の代数的な方程式が得られる：

$$y_j-\sum_{i=0}^{k+1} s_i(x_j)f(x_i,y_i)=0,\ (j=1\sim k) \tag{2.7}$$

上式を離散方程式という．離散方程式の行列表現を

$$H_k(Y)\equiv Y-S_kF(Y)-W=0 \tag{2.8}$$

で与える．ここで，

$Y=(y_1,\cdots,y_k)^{\mathrm{T}}\in R^k$ (k 次元ユークリッド空間)

$W=(w_i)^{\mathrm{T}}, w_i=s_0(x_i)f(-1,0)+s_{k+1}(x_i)f(1,0)$

$F(Y)=(f_1,\cdots,f_k)^{\mathrm{T}}, f_i=f(x_i,y_i), 1\leqq i\leqq k$

$S_k=(s_{i,j}), s_{i,j}=s_j(x_i), 1\leqq i,j\leqq k$

$f(x,y)$ が y に関し非線形なら，離散方程式も非線形である．したがって，適当な反復手続きにより離散方程式を解くことが必要となる．なお，積分作用素 T_k の次数 p と選点数との間に $p=k+2$ の関係が成立する[6]．

k-選点上での離散方程式の解 $Y_k=(y_1,\cdots,y_k)^{\mathrm{T}}$ を得れば，問題(1.1)（あるいは(2.2)式の問題）の連続近似解 $y_k(x)$ は次式で与えられる：

$$y_k(x)=\sum_{i=0}^{k+1} s_i(x)f(x_i,y_i) \tag{2.9}$$

ここで，$y_0=y_{k+1}=0$，そして $y_k(x_i)=y_i(0\leqq i\leqq k+1)$ を満たす．なお，連続近似解 y_k と Y_k の第 k 成分の y_k は記号的には同じものを使用するが，混乱を招くことはないと思う．また，p 次の積分作用素に対応する離散方程式の解は p 次の離散近似解といい，その連続解を p 次の連続近似解という．

区間 I 上で定義された関数 $y(x)$ のノルムを $\|y\|$ で表し

$$\|y\|=\max_{x\in I}|y(x)|$$

と定義する．R^k の要素 Y のノルムを $\|Y\|_k$ で表し

$$\|Y\|_k=\max_{1\leqq i\leqq k}|y_i|$$

と定義する．作用素のノルムはその都度定義を与える．

2.2 2，3 の補題

次章以降で用いられる補題を準備する．

補題 1. $k\geqq 1, |y_i|\leqq M$ $(i=0,\cdots,k+1)$ とする．そのとき

$$\sup_{x\in I}\left|\sum_{i=0}^{k+1} s_i(x)y_i\right|\leqq L_kM$$

が成立する．ここで $L_k=\sqrt{(k+1)/(2k+3)}$.

【証明】 文献5）の補題1参照.

次の補題は，(2.5)式で定義された ϕ_k の（補間としての）収束性について述べたものである．

補題 2. $k\geqq 1$. M クラスの境界値問題において，$f(x,z)$ が

（1） x と z に関して1階連続微分可能なら，問題(1.1)の解 y に対する積分作用素の打切誤差

$$\varepsilon_k(x)=y(x)-\phi_k(y)(x)$$

に対して，つぎが成立する：

$$\|\varepsilon_k\|\leqq 2\left(\frac{1}{2}+L_k\right)\|y^{(3)}\|/(k+1)^{1/2} \tag{2.10}$$

（2） x と z に関して十分滑らかなら，ε_k に対して，つぎが成立する：

$$\|\varepsilon_k\|\leqq C_k\|y^{(k+4)}\| \tag{2.11}$$

ここで，$C_k=\max_I|g_k(x)|$

$$g_k(x)=\left[\frac{1}{2}(1-x^2)\{(1-x)^{k-3}+(-1)^k(1+x)^{k+3}\}\right.$$

$$+(k+4)(k+3)\sum_{j=0}^{k+1} s_j(x)(x_j-x)^{k+2}\Big]\Big/(k+4)!$$

【証明】（1）について：$f(x,z)$ が x と z に関して1階連続微分可能であれば，解 y は3階連続微分可能となる．ベルンスタイン多項式の近似技法により証明できる．（2）は文献6）により明らか．　□

なお，$k=1,2,3$ に対する $g_k(x)$ は初期近似解の解析に用いられる可能性が高いので下記に与える：

$g_1(x)=(3x^5-10x^3+7x)/360$

$g_2(x)=(x^6-3x^4+3x^2-1)/720$

$g_3(x)=(x^7-3x^5+3x^3-x)/5040$

補題 3. Mクラスの境界値問題において，問題(1.1)の解 y に対する連続近似解 y_k $(k\geqq 1)$ の近似誤差 $e_k\,(=y-y_k)$ に対して，つぎが成立する：

（1） $r_k(x)(=y_k(x)-Ty_k(x))$ を残差とすれば
$\|e_k\|\leqq \Gamma_k^*\|r_k\|$

（2） 大きな k に対して
$\|e_k\|\leqq \Gamma_k\|\varepsilon_k\|$.

ここで，

$$\Gamma_k^*=(1+\sinh^2(2\bar{\mu}_k^{1/2})) \tag{2.12}$$

$$\Gamma_k=(1+\Gamma_k^*\bar{\mu}_kL_k)/(1-\delta_k), \tag{2.13}$$

$$\delta_k=2\left(\frac{1}{2}+L_k\right)\bar{\mu}_k\Gamma_k^*$$

$$\times(L_k\bar{\mu}_k''+(k+2)^{1/2}(\bar{\mu}_k+2\bar{\mu}_k'))/(k+1)$$

$\bar{\mu}_k=\max\{\max_I|h(x)|,\max_I|h_k(x)|\}$,

$\bar{\mu}_k'=\max\{\max_I|Dh(x)|,\max_I|Dh_k(x)|\}$,

$\bar{\mu}_k''=\max\{\max_I|D^2h(x)|,\max_I|D^2h_k(x)|\}$,

$h(x)=f_y(x,y(x)),\ h_k(x)=f_y(x,y_k(x))$,

$D=d/dx,\ D^2=d^2/dx^2$.

【証明】 文献6）に示される．　□

最後に，Lees and Schultz[10] のつぎの定理は有用である：

境界値問題(1.1)がMクラスに属せば，その解 y は

$$\|y\|\leqq\frac{1}{2}\max_I|f(x,0)|\equiv\kappa \tag{2.14}$$

を満たす．

3. 逆作用素の評価

本章では積分作用素の特殊なクラスとして，$y(-1)=y(0)=0$ を満たす区間 $I=[-1,1]$ において定義された連続関数 $y(x)$ の全体からなる空間 C 上のつぎの作用素について考察する：$b\in C$ に対して

$$[(E-K_k)b](x)=b(x)-\sum_{i=0}^{k+1}s_i(x)h(x_i)b(x_i) \tag{3.1}$$

ここで，E は C 上の恒等作用素，h は区間 I 上で定義された非負の連続関数とする．具体的には，作用素 $(E-K_k)$ の逆の存在とその評価を与えることが本章の目的である．これらの結果は，離散方程式のヤコビアンの逆を評価するために次章で用いる．

特に，作用素

$$K_k(b)(x)=\sum_{i=0}^{k+1}s_i(x)h(x_i)b(x_i)\ \text{for}\ b\in C \tag{3.2}$$

の族 $\tau\equiv\{K_k:k=1,2,\cdots\}$ は全コンパクト (Collectively compact, Anselone[7]) である．実際，集合 $S\equiv\{K_kb:k=1,2,\cdots,\|b\|\leqq 1\}$ は全有界でありかつ同等連続であることから，S は点列コンパクトである[5]．このことは τ が全コンパクトであることを意味する[8]．したがって，積分方程式における Nyström 法に対する全コンパクト作用素の理論[7] を適用することができる．

補題 4. C^2 上の一つの作用素 G を，$b\in C^2$ に対して

$$G(b)(x)=\int_{-1}^{1}g(x,u)h(u)b(u)\mathrm{d}u \tag{3.3}$$

と定義する．ここで，h は(3.1)式と同じである．そのとき，作用素 $(E-G)$ の逆が存在して，有界である：

$$\|(E-G)^{-1}\|\equiv\sup_{\|z\|\neq 0}\frac{\|(E-G)^{-1}z\|}{\|z\|}$$

$$\leqq 1+\sinh^2(2\mu^{1/2}) \tag{3.4}$$

ここで，$\mu=\max_I h(x)$.

【証明】 $b\in C^2$ に対して

$$z(x)=b(x)-\int_{-1}^{1}g(x,u)h(u)b(u)\mathrm{d}u$$

とおく．そのとき $g''(x)=h(x)g(x),\ g(-1)=g(1)=0$ に対するグリーン関数

$$Q(x,u)=\begin{cases}-a^{-1}s(x)v(u), & \text{for } x\leqq u\\ -a^{-1}s(u)v(x), & \text{for } x>u\end{cases}$$

を用いて，b は次のように陽的に表せる[2]：

$$b(x)=z(x)-\int_{-1}^{1}Q(x,u)h(u)z(u)\mathrm{d}u$$

$$\equiv[(E-G)^{-1}z](x). \tag{3.5}$$

ここで，$a\geqq 2$ は定数，s と v はつぎの初期値問題の解である：

$s''(x)=h(x)s(x),\ s(-1)=0,\ s'(-1)=1$

$v''(x)=h(x)v(x),\ v(1)=0,\ s'(1)=-1.$

したがって，(3.5)から逆の存在は明らかである．また(3.5)式の直接的な評価から

$\|b\|\leqq\|z\|+\mu\|v\|\|s\|\|z\|$

を得る．文献6）の補題2の適用により，$\|v\|$ と $\|s\|$ はつぎのように評価できる：

$$\|v\| \leqq \mu^{-1/2}\sinh(2\mu^{1/2})$$
$$\|s\| \leqq \mu^{-1/2}\sinh(2\mu^{1/2})$$

したがって，$\|(E-G)^{-1}z\| \leqq \{1+\sinh^2(2\mu^{1/2})\}\|z\|$ を得る．□

作用素 G と作用素 K_k の間に，つぎの補題が成立する．

補題 5. C 上の作用素 $(G-K_k)K_k$ に対して，つぎが成立する．$b\in C$ に対して

$$\|(G-K_k)K_kb\| \leqq \left(\frac{1}{2}+L_k\right)\|Z-B_k\| \tag{3.6}$$

ここで，$Z(x)=h(x)z(x)$ $(z=K_kb)$，そして B_k は Z に対する $k+1$ 次のベルンスタイン多項式近似である；

$$B_k(x)=2^{-(k+1)}\sum_{i=0}^{k+1}Z(u_i)p_i(x),\ u_i=\frac{2i-(k+1)}{k+1}$$

$$p_i(x)={}_{k+1}C_i(1+x)^i(1-x)^{k-i+1}.$$

【証明】 $b\in C$ に対して $z=K_kb$ と置き，$Z=hz$ と置けば

$$[(G-K_k)z](x)=\int_{-1}^{1}g(x,u)Z(u)\mathrm{d}u-\sum_{i=0}^{k+1}s_i(x)Z(x_i)$$
$$=\int_{-1}^{1}g(x,u)\{Z(u)-B_k(u)\}\,\mathrm{d}u$$
$$+\sum_{i=0}^{k+1}s_i(u)\{B_k(x_i)-Z(x_i)\}$$

を得る．上式の右辺の第2項に補題1を適用して評価すれば，(3.6)は直ちに得られる．□

ベルンスタイン多項式による近似を評価することによりつぎの系を得る．

補題5の系 補題5の条件に加えて，h が2階連続微分可能であれば，次式の評価を得る：

$$\|(G-K_k)K_k\| \leqq 2\left(\frac{1}{2}+L_k\right)\times\frac{\mu\{L_k\mu''+(k+2)^{1/2}(2\mu'+\mu)\}}{(k+1)}$$

ここで

$$\mu=\|h\|,\quad \mu'=\|h'\|,\quad \mu''=\|h''\|.$$

【証明】 仮定により Z は2階連続微分可能となる．ワイエルストラスの定理の変形（Wendroff[9] の定理2.3）により

$$\|Z-B_k\| \leqq 2\|Z''\|/(k+1) \tag{3.7}$$

を得る．$Z(x)$ の2階微分は

$$Z''=h''z+2h'z'+hz''.$$

また，z は C^2 に属すことから

$$\|z'\| \leqq \frac{1}{4}\|z''\|\{(x+1)^2+(x-1)^2\}$$
$$\leqq \frac{1}{2}(x^2+1)\|z''\| \leqq \|z''\|$$

が成立する[6]．これから，Z'' の評価を得る：

$$\|Z''\| \leqq \|h''\|\|z\|+(2\|h'\|+\|h\|)\|z''\|.$$

$\|z\|$ の評価は補題1の適用により，また $\|z''\|$ の評価はシュワルツの不等式と $\|\Sigma_i l_i^2\| \leqq 1$[11] の関係により，それぞれ次の評価を得る：

$$\|z\|=\|K_kb\| \leqq L_k\|h\|\|b\|.$$
$$\|z''\| \leqq (k+2)^{1/2}\|h\|\|b\|.$$

したがって，

$$\|(G-K_k)K_kb\| \leqq 2\left(\frac{1}{2}+L_k\right)\times\{L_k\mu''+(2\mu'+\mu)(k+2)^{1/2}\}\|b\|/(k+1).\ \square$$

補題5の系により，k が大きければ

$$\|(E-G)^{-1}(G-K_k)K_k\|$$
$$\leqq \|(E-G)^{-1}\|\|(G-K_k)K_k\| \equiv \delta_k<1 \tag{3.8}$$

が成立する．したがって，Anselone[7] の定理1.10を利用することができる．すなわち $(E-G)$ の逆が存在して $\delta_k<1$ が成立すれば，作用素 $(E-K_k)$ の逆が存在し，

$$\|(E-K_k)^{-1}\| \leqq (1+\|(E-G)^{-1}\|\|K_k\|)/(1-\delta_k)$$
$$\leqq [1+\{1+\sinh^2(2\mu^{1/2})\}\mu L_k]/(1-\delta_k) \tag{3.9}$$

が成立する．

4. ニュートン法

ニュートン法による離散方程式の解法について考える．離散方程式(2.8)式へのニュートン法の適用は

$$H_k(Y_k^{(n)})+J_k(Y_k^{(n)})\Delta Y_k^{(n)}=0$$
$$Y_k^{(n+1)}=Y_k^{(n)}+\Delta Y_k^{(n)},\ n=0,1,\cdots \tag{4.1}$$

となる．ここで，$J_k(Y_k^{(n)})$ は H_k のヤコビアンである．出発値ベクトルは連続近似解 y_m $(m<k)$ を k-選点 X_k 上で離散化することによって与える；

$$Y_k^{(0)}=(y_m(x_1),\cdots,y_m(x_k))^{\mathrm{T}}. \tag{4.2}$$

本章では，近似解 y_m を既知として上述のニュートン反復が収束的となるための条件を議論する．4.1では，カントロビッチのニュートン法の収束定理を適用するために必要な各種の量，例えば，ヤコビアンの逆や最初の修正量などの評価を与える．4.2において，カントロビッチの定理を適用して，各 k に対する離散近似解 Y_k の存在性と存在領域などを示す．

4.1 諸量の評価

4.1.1 ヤコビアン $J_k(Y_k^{(0)})$ の逆の評価

関数 h を

$$h(x)=f_y(x, y_m(x))$$

と置いて得られる(3.1)の方程式$[(E-K_k)z](x)=u(x)$を k-選点で離散化すれば，$\{z(x_i)\}$ に対する係数行列は $J_k(Y_k^{(0)})$ と一致する．一方，前章の結果からは条件(3.8)のもとで逆作用素 $(E-K_k)^{-1}$ の存在は保証されている．したがって

$$z(x)=[(E-K_k)^{-1}u](x),\ \text{for}\ {}^\forall u\in C^2 \qquad (4.3)$$

が得られる．(4.3)式を k-選点上で離散化すれば，$\{u(x_i)\}$ に対する係数行列は $J_k^{-1}(Y_k^{(0)})$ と一致する．この関係は離散化する点の取り方に依存しない．したがって，$R=\{u\in C^2: \|u\|_k=\|u\|\}$ とすれば，つぎの評価が有効である：

$$\begin{aligned}\|J_k^{-1}(Y_k^{(0)})\|_k &\equiv \sup_{\|u\|_k=1}\|J_k^{-1}(Y_k^{(0)})u\|_k\\ &\leqq \sup_{\|u\|=1}\|(E-K_k)^{-1}u\|_k\\ &\leqq \sup_{u\in R}\|(E-K_k)^{-1}u\|\\ &\leqq \|(E-K_k)^{-1}\|\end{aligned}$$

を得る．したがって，(3.9)式により

$$\begin{aligned}\|J_k^{-1}(Y_k^{(0)})\|_k \leqq [1+\{1+\sinh^2(2\mu_m^{1/2})\}\\ \times\mu_m L_k]/(1-\delta_{m,k})\equiv B_{m,k} \quad (4.4)\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}\delta_{m,k}=2\{1+\sinh^2(2\mu_m^{1/2})\}\left(\frac{1}{2}+L_k\right)\\ \times\frac{\mu_m\{L_k\mu_m''+(k+2)^{1/2}(2\mu_m'+\mu_m)\}}{(1+k)} \quad (4.5)\end{aligned}$$

$$\mu_m=\max_I|f_y(x, y_m(x))|$$
$$\mu_m'=\max_I|[f_y(x, y_m(x))]'|$$
$$\mu_m''=\max_I|[f_y(x, y_m(x))]''|.$$

4.1.2 初回修正量の評価

カントロビッチのニュートン法の収束性に関する定理を適用するためには，最初の反復によって得られる修正量 $\Delta Y_k^{(0)}$ の評価が必要である．この修正量の評価はつぎの補題で与えられる：

補題 6. 連続近似解 $y_m(x)$ によって構成される出発値ベクトル $Y_k^{(0)}$ のもとで，ニュートン法(4.1)の最初の反復で得られる修正量 $\Delta Y_k^{(0)}$ に対して，適当な整数 $K>0$ が存在して，任意の $k\geqq K$ に対し

$$\|\Delta Y_k^{(0)}\|_k\leqq B_{m,k}\{\|\varepsilon_k\|+\Gamma_m^*(1+L_k\underline{\mu})\|r_m\|\}$$

が成立する．ここで

$$\underline{\mu}=\max_{I\times[-\kappa,\kappa]}|f_y(x, y)|.$$

そして $\kappa=\max_I\frac{1}{2}|f(x, 0)|$, y は(1.1)の解.

【証明】 $(E-K_k)$ は $h(x)=f_y(x, y_m(x))$ とする(3.1)式で定義される作用素とする．そのとき，式

$$z(x)+[(E-K_k)\delta y_k^{(0)}](x)=0 \qquad (4.6)$$

の k-選点上での離散化は，$n=0$ とする(4.1)式と一致する．ここで

$$\delta y_k^{(0)}(x)=y_k^{(1)}(x)-y_m(x)$$
$$z(x)=y_m(x)-\sum_{i=0}^{k+1}s_i(x)f(x_i, y_m(x_i)) \qquad (4.7)$$

K を(3.8)式が成立する最小の整数とすれば，$k\geqq K$ に対して $(E-K_k)^{-1}$ は存在する．したがって

$$\delta y_k^{(0)}(x)=-[(E-K_k)^{-1}z](x)$$

を得る．これから

$$\|\delta y_k^{(0)}\|\leqq\|(E-K_k)^{-1}\|\|z\| \qquad (4.8)$$

z は $y_m=y-e_m$ の関係と平均値の定理を用いることにより

$$\begin{aligned}z(x)=\varepsilon_k(x)\\ +\sum_{i=0}^{k+1}s_i(x)f_y(x_i, y(x_i))\underline{e}_m(x_i)-e_m(x)\\ (4.9)\end{aligned}$$

と展開できる．ここで y は(1.1)の問題の解，$\underline{e}_m$ は y に対する y_m の 近似誤差，そして $\underline{e}_m(x_i)$ は $y(x_i)$ と $y_m(x_i)$ を両端に持つ開区間に属する適当な点である．したがって，$\max_i|\underline{e}_m(x_i)|\leqq\|e_m\|$．補題1を用い，(4.9)式をもとに，

$$\|z\|\leqq\|\varepsilon_k\|+(1+L_k\underline{\mu})\|e_m\|$$

の評価を得る．したがって，これと4.1.1の結果を組み合わせて

$$\|\delta y_k^{(0)}\|\leqq B_{m,k}[\|\varepsilon_k\|+(1+L_k\underline{\mu})\|e_m\|]$$

が得られる．最後に補題3の(1)を適用して $\|e_m\|$ を $\|r_m\|$ により評価し，そして

$$\|\Delta Y_k^{(0)}\|_k\leqq\|\delta y_k^{(0)}\|$$

の関係から，証明は完了する． □

4.1.3 $\partial J_k(Y)/\partial Y$ のノルムの評価

ニュートン法に関するカントロビッチの定理の適用には，ヤコビアンの偏導関数

$$B\equiv\partial J_k(Y)/\partial Y=S_k\partial^2F(Y)/\partial Y^2$$

を（Y の適当な領域において）評価することが必要となる．

$B=(b_{ijh})$ を C^2 から R^k への双線形作用素であると見なせば，$v\in C^2$ に対して，

$$Bv\equiv A=(a_{ij})=\left[\sum_{h=1}^{k}b_{ijh}v(x_h)\right]$$

そして

$$Z=Av=\left[\sum_{j=1}^{k}\sum_{h=1}^{k}b_{ijh}v(x_h)v(x_j)\right]$$

と書くことができる．そのとき，$\|v\|_k=1$ の拘束条件のもとで

$$\|Z\|_k=\sup_{1\leq i\leq k}\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{h=1}^{k}b_{ijh}v_hv_j\right|$$

を計算することにより B のノルムが得られる．ここで $v_i=v(x_i)$．簡単な計算により，B の成分 b_{ijh} は

$$b_{ijh}\equiv\partial^2h_i/\partial y_j\partial y_h=s_k(x_i)\xi_h\delta_{jh}$$

となる．ここで $\xi_h=f_{yy}(x_h,y_h)$, h_i は H_k の第 i 成分そして δ_{jh} はクロネッカー・デルタである．したがって補題1を適用して

$$\|Z\|_k=\sup_{1\leq i\leq k}\left|\sum_{j=1}^{k}s_j(x_i)\xi_jv_j^2\right|$$
$$\leq L_k\max_j|\xi_j|$$

を得る．したがって，つぎの評価を得る：

$$\|B\|_k\leq L_k\max_{1\leq j\leq k}|f_{yy}(x_j,y_j)| \tag{4.10}$$

ここで，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)^T$.

4.2 カントロビッチの定理

最初にカントロビッチの定理の適用に必要な各種の評価結果を整理する．

【A】 出発ベクトル $Y_k^{(0)}$ の点でのヤコビアンの逆の評価は4.1.1により

$$\|J_k^{-1}(Y_k^{(0)})\|_k\leq B_{m,k}. \tag{4.11}$$

この評価が有効であるためには

$$\delta_{m,k}<1 \tag{4.12}$$

の条件を必要とする．簡単な考察により，$m\leq k$ ならば，$B_{m,m}\geq B_{m,k}$ かつ $\delta_{m,m}\geq\delta_{m,k}$ となることが分かる．

【B】 集合 G_m を

$$G_m=\{z\in R^1:\max_{1\leq i\leq m}|z-y_m(x_i)|\leq N(h_0)\eta_{m,k}\}$$

とし，

$$K_{m,k}\equiv L_k\sup_{I\times G_m}|f_{yy}(x,y)| \tag{4.13}$$

とする．ここで，

$$N(h_0)=\left[\frac{1-(1-2h_0)^{1/2}}{h_0}\right].$$

とする．そのとき，4.1.3 により，$\|Y-Y_k^{(0)}\|_k\leq N(h_0)\eta_{m,k}$ を満たす Y に対して

$$\|\partial^2H_k(Y)/\partial Y^2\|_k\leq K_{m,k}$$

が成立する．

【C】 初回反復における修正量の評価は補題6により

$$\|\Delta Y_k^{(0)}\|_k\leq\eta_{m,k}$$

となる．ここで

$$\eta_{m,k}=B_{m,k}[\|\varepsilon_k\|+\Gamma_m^*(1+L_k\mu)\|r_m\|] \tag{4.14}$$

簡単な考察により，$m\leq k$ なら $\eta_{m,m}\geq\eta_{m,k}$, そして $m\to\infty$ なら $\eta_{m,m}\to0$ が成立することが分かる．また，$\|\varepsilon_k\|$ は f の滑らかさに応じて補題2の(1)か(2)を用いて評価することができる．

【D】 今【A】〜【C】により $h_0\equiv B_{m,k}K_{m,k}\eta_{m,k}<\dfrac{1}{2}$ を満たすような $m,k\,(m<k)$ の存在は保証される．一方，$K_{m,k}$ および $B_{m,k}$ は任意の m,k に対して有界である．したがって適当な m,k において，不等式 $h_0<\dfrac{1}{2}$ が満たされれば，ニュートン法の収束性を保証するカントロビッチの定理の条件（Henrici[2]，7.61 式から 7.64 式，各変数の間の関係は $B_0=B_{m,k}$, $K=K_{m,k}$, $\eta_0=\eta_{m,k}$）を満足する．ゆえに，つぎの定理が成立する．

定理 7. Mクラスの問題において，$f(x,y)$ は滑らかとする．$m,k\,(k>m\geq1)$ は $\delta_{m,k}<1$ が成立するような整数とし，m は固定する．そのとき，適当な整数 $K\geq1$ が存在して，$k\geq K$ であれば，近似解 y_m により構成される出発値ベクトル $Y_k^{(0)}$ のもとで

$$h_0=B_{m,k}K_{m,k}\eta_{m,k}<\frac{1}{2} \tag{4.15}$$

が成立し，離散方程式 $H_k(Y)=0$ に対するニュートン法は収束する．離散方程式の解 Y_k は

$$\|Y_k-Y_k^{(0)}\|_k\leq N(h_0)\eta_{m,k} \tag{4.16}$$

を満たす．また，反復の収束速度は

$$\|Y_k-Y_k^{(n)}\|_k\leq\frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2^n-1}\eta_{m,k}. \tag{4.17}$$

□

注釈：定理における f の滑らかさは少なくとも3階連続微分が可能であることを必要としている．これは実際的な数値計算上の観点からであり，(4.5)の $\delta_{m,k}$ を具体的に計算するために必要とした．しかし数学的には，f の滑らかさは f_y の連続性のみで十分である．

定理7の適用において，$K_{m,k}$ の計算に h_0 が陰的に含まれている．したがって，h_0 を解くことが必要となる．しかし，実際的な観点からは，$h_0<\dfrac{1}{2}$ であれば $N(h_0)<2$ であることを利用して，領域

$$I\times G_m^* \tag{4.18}$$

において，$|f_{yy}|$ を評価すると便利である．ここで

$$G_m^*=\{z\in R^1:\max_i|z-y_m(x_i)|\leq2\eta_{m,k}\}.$$

離散方程式の解の存在が仮定されるときは，その解の存在範囲の推定は容易である．

定理 8. Mクラスの問題において，$f(x,y)$ は x, y に関して1階連続微分可能であるとする．そのとき，離散方程式 $H_k(Y)=0$ が解 Y_k を持てば，k が大きいとき，Y_k はつぎを満たす：

$$\|Y_k-Y_k^{(0)}\|_k\leqq\eta_{m,k} \tag{4.19}$$

ここで $Y_k^{(0)}$ は y_m から構成される出発値ベクトル そして

$$\eta_{m,k}=(1+L_k\mu_k\Gamma_k)\|\varepsilon_k\| +\|\varepsilon_m\|+L_m\mu_m\Gamma_m^*\|r_m\|$$

証明：k-選点 X_k の各点を x_i で表し，m-選点 X_m の各点は u_i で表す．そして，$x_0=-1, x_{k+1}=1$ と k-選点で定義される多項式 s_i を $s_{k,i}$，そして $x_0=-1$, $x_{m+1}=1$ と m-選点で定義される多項式 s_i を $s_{m,i}$ によって表す．問題(1.1)の解 y と平均値の定理を用いて，$y_k(x)$ と $y_m(x)$ の差をつぎのように展開することができる：

$$\begin{aligned}y_k(x)-y_m(x)&=\{y_k(x)-y(x)\}-\{y_m(x)-y(x)\}\\&=\varepsilon_k(x)+\sum_{i=1}^{k}s_{k,i}(x)f_y(x_i,\eta_i)\{y_k(x_i)-y(x_i)\}\\&\quad-\varepsilon_m(x)-\sum_{i=1}^{m}s_{m,i}(x)f_y(u_i,\xi_i)\{y_m(u_i)-y(u_i)\}\end{aligned}$$

ここで，η_i は $y_k(x_i)$ と $y(x_i)$ (ξ_i は $y_m(u_i)$ と $y(u_i)$) を両端とする開区間に属する適当な点である．したがって，上式をもとにつぎの評価が得られる．

$$\begin{aligned}\|Y_k-Y_k^{(0)}\|_k&\leqq\|y_k-y_m\|\\&\leqq\|\varepsilon_k\|+L_k\mu_k\|e_k\|+\|\varepsilon_m\|+L_m\mu_m\|e_m\|\end{aligned}$$

さらに補題3を用いて，$\|e_k\|, \|e_m\|$ を $\|\varepsilon_k\|, \|r_m\|$ によって評価することにより(4.19)の不等式が得られる． □

この定理を実際に利用する場合に（未知量である y_k を持つ）Γ_k の評価が必要である（式(2.13)参照)．そのためには $\|y_k\|$ の値を知らねばならない．一般に $k\gg m$ ならば，近似誤差 e_k と e_m の間には $\|e_k\|\leqq\|e_m\|$ の関係が成立する．したがって y_k のノルムは

$$\begin{aligned}\|y_k\|&\leqq\|y\|+\|e_k\|\leqq\kappa+\|e_m\|\\&\leqq\kappa+\Gamma_m^*\|r_m\|\end{aligned}$$

によって評価できる．

5. 数　値　例

文献6）の数値例で扱われた2点境界値問題

$$\begin{cases}y''=\dfrac{1}{4}\exp(y),\ (=f(x,y))\\y(-1)=y(1)=0\end{cases}$$

について考察する．

問題の初期近似解として簡単に得られる $y_1(x)$ を用いる．すなわち，$m=1$ として定理7の適用を試みる．$B_{1,k}, \eta_{1,k}, K_{1,k}$ を評価するために必要な諸量，すなわち，離散方程式

$$H_1(Y_1)=Y_1+\frac{5}{48}\exp(Y_1)+\frac{1}{48}=0$$

の解 Y_1，定数 κ（(2.14)式参照)，$\underline{\mu}$（補題6を参照)，μ_1, μ_1', μ_1'' (4.1.1を参照)，Γ_1^*（(2.12)式参照）の各値を計算する．これらの結果を下記に示す：

$Y_1=-0.113795847$

$\kappa=0.1250$

$\underline{\mu}=0.2833$

$\mu_1=0.2801$

$\mu_1'\leqq4\mu_1^2=0.31382$

$\mu_1''\leqq16\mu_1^3+4\mu_1^2=0.665428$

$\Gamma_1^*=2.63143$

L_k は任意の $k\geqq1$ に対して $\leqq1/\sqrt{2}$ が成立する．ヤコビアンの逆の評価が有効であるための条件は(4.12)が成立することである．$\delta_{1,k}$ は

$$\delta_{1,k}=\frac{1.7626[0.4705+0.9077(k+2)^{1/2}]}{k+1}$$

である．k を1から順次増加して $\delta_{1,k}$ を計算すると

$\delta_{1,1}=1.6616$

$\delta_{1,2}=1.3431$

$\delta_{1,3}=1.1018$

$\delta_{1,4}=0.9497$

が得られ，$k=4$ において，$\delta_{1,k}<1$ が成立する．そのとき，$B_{1,4}=10.2666$．つぎに，f が十分滑らかであることを考慮して $\eta_{1,4}$ を(4.14)に基づき計算すれば，$\eta_{1,4}=1.5663\times10^{-3}$（数値的に $\|r_1\|=1.268\times10^{-4}$)．最後に(4.18)式による G_1^* を用いて，(4.13)式から $K_{1,4}$ を計算すると，$K_{1,4}=0.2038$．このとき，

$$h_0=0.002858<\frac{1}{2}$$

となり，定理7の条件(4.15)は満たされる．したがってつぎが成立する：$k\geqq4$ であれば

$$\begin{aligned}\|Y_k-Y_1^{(0)}\|_k&\leqq1.0014\,\eta_{1,k}\\&\leqq1.0014\,\eta_{1,4}\\&=1.5685\times10^{-3}.\end{aligned}$$

が成立し，収束の速度は

$$\|Y_k-Y_k^{(n)}\|_k\leqq d_n\eta_{1,k}\leqq d_n\eta_{1,4}.$$

と評価される．ここで

$$d_n=2^{-(n-1)}(5.716\times10^{-3})^{2^n-1}.$$

この収束の速度から，つぎのことが分かる：パラメータ $\varepsilon=10^{-15}$ の反復停止則のもとでの本例題に対する不動点法の数値実験では，各 k ともニュートン反復は2ないし3回で収束する．この事実は，収束の速度が $n=1,2,3$ に対して

$$\|Y_k - Y_k^{(1)}\| \leqq 8.953\times 10^{-6}$$
$$\|Y_k - Y_k^{(2)}\| \leqq 1.4626\times 10^{-10}$$
$$\|Y_k - Y_k^{(3)}\| \leqq 7.807\times 10^{-20}.$$

と評価されることから，説明できる．

初期近似として $y_2(x)$ を用いれば，さらに良好な結果が得られるが，上述の諸量の評価に手間を必要とする．なお，数値実験では FACOM 380 の計算機を用いたが，上記の評価のための計算には 10 桁表示の電卓を用いた．

6. 結　　び

関数方程式に対する数値解法の理論が具備しなければならない基本的事項として

（1） 列としての近似解の存在性
（2） 近似解とその列の構成アルゴリズムの提示
（3） 近似解列の収束性の証明
（4） 近似解の誤差の評価

などが挙げられる．非線形２点境界値問題に対する不動点法は文献５）において提案され，一般的条件下において（2）と（3）が示されている．またMクラスという制限を設けて，（4）が文献６）において示された．一方，実際的には，非線形問題はあらかじめ与えられる初期近似解をもとにして解かれることが多い．また理論的にも近似解の列の存在と初期近似解との間に緊密な関係を持つことが多く，本質的でもある．この観点から，問題がMクラスに制限されているが，実践と理論の懸橋として本論文の結果は重要である．すなわち，適当な初期近似解のもとで，低次数の幾つかを除いて，離散方程式に対するニュートン法が収束的となることは，（1）の近似解の列の存在を意味する．この収束的であるための条件が定理７によって与えられた．

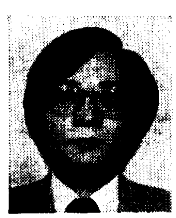
最後に，本論文の結果はMクラスの問題に対する不動点法の自動解法サブルーチンに有効である．

謝辞　日頃から問題の本質を適切にご教示くださる当研究所北川敏男会長に感謝の意を表するとともに，日頃よりご指導くださる当研究所榎本肇所長に感謝します．折りにふれて激励くださる名古屋大学鳥居達生教授ならびに山梨大学田中正次教授に感謝します．

参　考　文　献

1) Urabe, M.: Numerical Solution of Boundary Value Problems in Chebyshev Series *Conference on the Numerical Solutions*, *Lecture Notes in Math.*, 109, pp. 40-86, Springer Verlag, Heidelberg, New York (1969).
2) Henrici, P.: *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney (1962).
3) Chawla, M. M. and Shivakumar, N. P.: Numerov's Method for Non-linear Two-Point Boundary Value Problems, *Intern. J. Computer Math.*, Vol. 17, No. 2, pp. 167-176 (1985).
4) Lees, M.: Discrete Methods for Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems, in Bramble, J. H. (ed.), *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, pp. 59-72 (1966).
5) 鈴木：不動点近似による非線形２点境界値問題の数値解法，情報処理学会論文誌，Vol. 26, No. 5, pp. 24-35 (1985).
6) 鈴木：Mクラスの非線形２点境界値問題における不動点法—誤差解析—，情報処理学会論文誌，投稿中．
7) Anselone, M. P.: *Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations*, 186 p., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1971).
8) Cryer, C. W.: *Numerical Functional Analysis*, 568 p., Oxford Univ. Press, New York (1982).
9) Wendroff, B.: *Theoretical Numerical Analysis*, Academic Press, New York (1966)
10) Lees, M. and Schultz, H. M.: A Leray-Schauder Principle for A-Compact Mappings and the Numerical Solution of Non-Linear Two-Point Boundary Value Problems, Greenspan, D. (ed)., *Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations*, pp. 167-179, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney (1966).
11) Bala'zs, J. and Tura'n, P.: Notes on Interpolations III, Convergence, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, Vol. 9, pp. 195-214 (1955).

（昭和 61 年 5 月 7 日受付）
（昭和 61 年 11 月 5 日採録）



鈴木　千里（正会員）

昭和 21 年 2 月生．昭和 46 年名古屋工業大学大学院修士課程電子工学研究科修了．同年（株）富士通研究所に入所．人工衛星の追跡管制システムにおける軌道計算や軌道決定などの数値計算アルゴリズムの研究を経て，昭和 54 年より富士通（株）国際情報社会科学研究所に勤務．現在，非線形関数方程式によって記述される数学モデルに対する大規模数値シミュレーション理論の構築に興味をもっている．日本数学会会員．