モデル理論に基づくデフォルト論理の基礎的考察†

相原恒博†† 村上研二††
馬場口登†† 四反田秀樹†††

機械による推論システムにおいて，現在最も広く利用されているのは，述語論理による演繹推論であろう．しかしこの演繹推論においては推論に必要なすべての知識をシステムに与えなければならず，膨大な知識が不可欠となる．そこで人間が行っているような常識による推論や不十分な知識からも推論可能なシステムが要求される．Reiter は不十分な知識からも推論を可能とするデフォルト論理を提案したが，矛盾のない推論結果を導出する具体的手法は示されておらず，そのような推論結果の“世界”を定式化しているのみである．本論文では，モデル理論的手法によりデフォルト論理の基礎的考察を行う．すなわち，このような世界のモデル集合を求めるアルゴリズムを提案し，このアルゴリズムの完全性および健全性（アルゴリズムにより求めたモデル集合がデフォルト論理による推論結果と同値となること）を証明する．

1. まえがき

コンピュータにより知識を表現・利用・獲得するいわゆる知識情報処理システムにおいて，述語論理は現在のところ最も広く利用されているものの一つと言えよう．知識表現および知識利用の面から見ると，一階述語論理は日常言語や数学上の言語の大部分を記述し得ること，論理体系として健全性と完全性を兼ね備えていることなどからその重要性は極めて大きく，一階述語論理を基にした演繹推論を用いるシステムが多く見られる．この演繹推論は「公理系に新しい公理を追加したとき，公理系から導出される定理の集合は増加することがあっても減少はしない」，すなわち単調であるという特徴を持つ．一方，知識獲得という面から見ると，一階述語論理では推論に必要なすべての知識をシステムに与えなければならないことから，膨大な知識を取り扱うことが不可欠となり，必ずしも有利な論理体系であるとは言えない．

そこで人間が行っているような常識による推論や，不十分な知識を基にした推論などが要求される．このような推論を含む論理の中に，非単調論理と言われるものがある．これは従来の古典的論理の枠組を越える新しい論理体系と考えられ，推論に要する知識の量を格段に減少できるという特徴を持つ．したがって，近年その重要性が認識され様々な研究が行われている[1)~8)]．しかし，非単調論理では「新しい公理（知識）が付け加えられたとき，それまでに導出された定理が成り立たなくなる」ことがありその取り扱いは簡単ではない．

非単調推論の定式化の一つとして，Reiter が定式化したデフォルト推論 (default reasoning)[3)] がある．デフォルト推論は従来の一階述語論理にデフォルト式なる推論規則を導入し，不完全な知識のもとでの推論を可能にしたもので，従来の推論方法に比べて強力なものであると考えられる．

さて Reiter は，デフォルト推論により推論可能な世界を extension（以下，拡張世界と言う）と定義している．この拡張世界はデフォルト推論の種々の性質を知る上で最も重要な概念であり，これを介して従来の一階述語論理との関係が議論される．しかしながら，Reiter の拡張世界の定義では，その定義の中に拡張世界自身を含んでいるため，これを形式的証明により求めることは困難である．そこで本論文ではデフォルト推論に対してモデル理論的な考察を行い，これを求めることを考える．モデル理論とは与えられた論理式の真偽を論じる立場であり，形式的意味論と呼ばれることもある．モデル理論は，公理系および演繹体系を与え定理式を導出する形式的証明論とは異なる立場に位置するものであり，公理系や演繹体系を完全には設定できない高階述語論理，様相論理などに対しても適用できるという利点がある[9)]．ところで，モデル理論によれば，形式的証明とモデル理論の恒真式は同値であることが知られている．この立場に立って，本論文では拡張世界のモデル集合を求めるアルゴリズムを提案し，このアルゴリズムの完全性および健全性

† A Model Theoretic Approach for Default Logic by TSUNEHIRO AIBARA, KENJI MURAKAMI, NOBORU BABAGUCHI (Department of Electronics Engineering, Faculty of Engineering, Ehime University) and HIDEKI SHITANDA (Matsushita Electric Industrial Co., Ltd.).
†† 愛媛大学工学部電子工学科
††† 松下電器産業(株)

(アルゴリズムにより求めたモデル集合が，拡張世界のモデル集合と同値であること）を証明する[10),11)].

本論文で与えるアルゴリズムは，1982年に筆者らが提案したアルゴリズム[12)]に基づいており，本論文ではこのアルゴリズムを整理し，その厳密な証明を与えたものである．なお，1985年，Łukaszewics は筆者らの研究とは独立に，モデル理論（意味論）に基づいた正規デフォルト理論の拡張世界についての報告を行っている[6)]．この Łukaszewics のアルゴリズムと筆者らのアルゴリズムの最大の違いは，Łukaszewics のアルゴリズムが正規デフォルト理論にしか適用できないのに対し，筆者らのアルゴリズムは正規デフォルト理論を含む一般のデフォルト理論に適用できることである．Reiter によれば，正規デフォルト理論では一般のデフォルト理論と異なり，1) 拡張世界の存在性の保証，2) デフォルト式に対する単調性 (semimonotonicity) 等の性質があり，これらの性質が拡張世界を求める操作を極めて容易なものにしている．筆者らのアルゴリズムと Łukaszewics のアルゴリズムの違いもこれらの性質に基づいており，筆者らのアルゴリズムではデフォルト式の選択の際にバックトラックの手順を含むのに対し，Łukaszewics のアルゴリズムではこの手順を含まない．なお，当然のことながら，正規デフォルト理論に筆者らのアルゴリズムを適用すればバックトラックは生じず，Łukaszewics のアルゴリズムと同じ結果が得られる．このように，筆者らのアルゴリズムは Łukaszewics のアルゴリズムを含む，より一般的なアルゴリズムであるといえる．

2. デフォルト推論に関する諸定義[3)]

次章以降で必要となる諸定義を以下に示す．通常の一階述語論理式 (well formed formula, wff と略す) からなる一階述語の言語全体を L とする．また，wff に自由変数が含まれないとき wff は閉じているという．まずデフォルト式の定義を述べる．

［定義 2.1］（デフォルト式） デフォルト式 d は，$d=a:Mb/c$ で定義される．ただし，a, b, c は閉じた wff である．d は「a が成り立ち，かつ b が無矛盾（b の否定が証明されない）ならば，c を推論する」ことを表す．a, b, c を各々，前提 (prerequisite)，弁明 (justification)，帰結 (consequent) と呼ぶ．

なお，Reiter はデフォルト式に自由変数を含めて定義しているが，自由変数を具体例 (instance) で置き換えたときには閉じた場合と同様になるため本論文では閉じた場合に限定して議論して行く．

［定義 2.2］（正規デフォルト式） デフォルト式のうち $a:Mb/b$ の形のデフォルト式を正規デフォルト式と定義する．

［定義 2.3］（デフォルト理論） デフォルト理論 A は，$A=(D, W)$ で定義される．ここで D はデフォルト式の集合，W は閉じた wff の集合である．特に，D に含まれる各デフォルト式が閉じているものは閉じたデフォルト理論という．

［定義 2.4］（拡張世界） $A=(D, W)$ をデフォルト理論とする．$S\subseteq L$ なる wff の集合に対して，$\Gamma(S)$ を以下の3条件を満たす最小の集合とする．

D1. $W\subseteq\Gamma(S)$

D2. $Th(\Gamma(S))=\Gamma(S)$，（ただし，$Th(A)$ は論理式の集合 A から導かれる定理の集合を表す）

D3. $a:Mb/c\in D, a\in\Gamma(S), \neg b\notin S$ であれば $c\in\Gamma(S)$ が成り立つ．

このとき，

$$\Gamma(E)=E$$

を満たす集合 E，すなわちオペレータ Γ についての不動点，を $A=(D, W)$ の拡張世界と定義する．

拡張世界は確定的知識の集合 W からデフォルト理論 A により推論できる知識の集合と考えることができる．拡張世界は次の定理により形式的に表現される．

［定理 2.1］ $E\subseteq L$ を閉じた wff の集合，$A=(D, W)$ を閉じたデフォルト理論とする．

$$E_0=W$$

とし，$i\geqq 0$ に対して，

$$E_{i+1}=Th(E_i)\cup\{c\,|\,a:Mb/c\in D, a\in E_i, \neg b\notin E\}$$

とすると，E が A の拡張世界である必要十分条件は

$$E=\cup_{i=0}^{\infty}E_i$$

である．

（証明） 文献 3) を参照． ■

［定理 2.1］は E_{i+1} の定義に E を含んでいるので，$A=(D, W)$ の拡張世界をこの定理を使用して構成することは困難である*．そこで，モデル理論の立場から拡張世界を構成しようとするのが本研究の主たる目的である．

次に拡張世界とデフォルト理論についてさらに以下の定義を行う．

* ある与えられた wff の集合が $A=(D, W)$ の拡張世界になっているか否かの確認はこの定理を用いて行うことができる．第5章ではモデル理論から得られた wff の集合が $A=(D, W)$ の拡張世界になっていることの確認をこの定理を用いて行う．

［定義 2.5］ $A=(D, W)$ を閉じたデフォルト理論，E を A の拡張世界とする．A に対して E の生成デフォルト式の集合 GD(E, A) を

$$\mathrm{GD}(E, A)=\{a : Mb/c\in D \mid a\in E, \neg b\notin E\}$$

と定義する．D をデフォルト式の任意の集合とすると，CONSEQUENTS(D) を

$$\mathrm{CONSEQUENTS}(D)=\{c \mid a : Mb/c\in D\}$$

と定義する．CONSEQUENTS(D) は D のデフォルト式の帰結の集合である．

［定理 2.2］ E を閉じたデフォルト理論 $A=(D, W)$ の拡張世界とすれば，

$$E=Th(W\cup\mathrm{CONSEQUENTS}(\mathrm{GD}(E, A)))$$

（証明） 文献 3) を参照．■

3. 拡張世界のモデル集合を求めるアルゴリズム

モデル理論によれば一階述語論理式の集合 S から導かれる定理式の集合に式 p が含まれていることは，S のモデル集合のすべての元で p が真なることと等価である．ここで p のモデルとは，論理式 p を真とするような解釈とする．また，S のモデル集合とは，S に含まれるすべての論理式を真とするようなすべての解釈の集合とする．したがって，拡張世界のモデル集合を作ることは拡張世界を構成するのと同様の意味を持つ．このことは第4章で定理として証明する．

拡張世界のモデル集合を求める［アルゴリズム］を以下に述べる．

［アルゴリズム］

手順1；I_0 を W のモデル集合とする．このとき $I_0=\phi$ ならば拡張世界は L．

手順2；$I_0, \cdots, I_{m-1}$ が既に求められているとする．このとき $d=a : Mb/c\in D$ なる一つの d において

条件1；a は I_0 に含まれるモデルすべてで真（I_0 は a のモデルである）

条件2；I_0 の中で b を真とするような解釈すべての集合を I_m としたとき，$I_m\neq\phi$

条件3；I_0 の中で c を真とするような解釈すべての集合を I' としたとき，$I'\neq\phi$ かつ $I_k\cap I'\neq\phi$，$(k=1\sim m)$

① 以上の3条件が満足されるならば，$I_0, \cdots, I_m$ を次のように再構成する．

$I_0\leftarrow I'$

$I_k\leftarrow I_k\cap I'$，$(k=1\sim m)$

$m\leftarrow m+1$

その後，d を D より取り除き，手順2の最初に戻る．

② 以上の3条件が一つでも満足されないならば，$I_0, \cdots, I_{m-1}$ の再構成は行わず手順2の最初へ戻る．ただし，どのような $d\in D$ を用いても $I_0, \cdots, I_m$ の再構成がなされないときは手順3へ行く．

③ $D=\phi$ のときには最終状態で I_0 をアルゴリズムの結果とする．

手順3；手順2の $I_0, \cdots, I_m$ の構成不能の理由を調べる．

（A） $d\in D$ に対して，すべて条件1または条件2の原因のときは最終状態で I_0 をアルゴリズムの結果とする．

（B） 条件3の原因の $d\in D$ が一つでもあるときは手順2で取り除いた d を D に戻し，手順1へ戻り，d の順を最初から取り直す．d の順をどのようにとっても条件3の原因で再構成に使用されない d が存在するときは，拡張世界は存在しない．

なお，手順2の条件3は，新たに拡張世界に加えようとする知識 c が過去に使用したデフォルト式の弁明を妨げないかどうかを改めてチェックするもので，ここではこの手順をバックトラック手順と呼ぶ．先に述べたように，正規デフォルト論理に対してはこの手順は不要となる．

4. 定理とその証明

前章で示したアルゴリズムの健全性および完全性に関する種々の定理を以下に述べる．

［定理 4.1］（アルゴリズムの健全性） アルゴリズムの結果 I_0 は，$A=(D, W)$ の拡張世界のモデル集合である．

（証明） I_0 の中のすべての解釈で真となるすべての論理式の集合を X とする（以下，I_0 と X のこのような関係を $I_0\langle\rangle X$ と表す）．X が $A=(D, W)$ の拡張世界であること $(X=\Gamma(X))$ を証明する．

まず，$\Gamma(X)\subseteq X$ を示す．

$d_1, d_2, \cdots, d_m$ というデフォルト式 $(d_j\in D, d_j=a_j : Mb_j/c_j, j=1\sim m)$ の列がアルゴリズムにこの順序に適用され，I_0 がその最終状態であると仮定する．X が［定義 2.3］の $\Gamma(X)$ の条件 D1～D3（最小集合となる条件を除く）を満たすことを示す．

W に対する I_0 を I_0^0，d_j を使用後の I_0 を I_0^j と表

し，I_0^j 内のすべての解釈で真となるすべての式の集合を X_j と表す ($j=1\sim m, X_m=X$).

D 1. $I_0^0\langle\rangle X_0=Th(X_0), I_0^0$ の作り方より $W\subseteq X_0$. また，$I_0^0\cap I=I_0$ (I は $\{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ のモデル集合) より $X_0\subseteq X$. したがって $W\subseteq X$.

D 2. $Th(X)=X$.

D 3. $d'\in D-\{d_1, d_2, \cdots, d_m\}, d'=a':Mb'/c'$ については，I_0 が最終状態であることから，a' が偽となる解釈が I_0 の中に存在する ($a'\notin X$) かあるいは，I_0 の中に b' を真とする解釈が存在しない ($\neg b'\in X$) のいずれかであり，このときには D 3 の条件を満たさない．したがって，これらの d' については [定義 2.3] においても本アルゴリズムにおいても共に結果に影響を与えない．

一方，$\{d_1, d_2, \cdots, d_m\}, d_j=a_j:Mb_j/c_j, j=1\sim m,$ については I_0 の作り方より，$I_0^j\langle\rangle X_j=Th(X_j), a_j\in X_j$. また，$I_0^j\cap I=I_0$($I$ は $\{c_{j+1}, c_{j+2}, \cdots, c_m\}$ のモデル集合) より，$X_j\subseteq X$. ゆえに $a_j\in X$. また，アルゴリズムの条件3が最終状態でないので $I_j\neq\phi$, $j=1\sim m$. したがって，I_0 の中には各 b_j ($j=1\sim m$) のモデルが少なくとも一つは存在しているから $\neg b_j\notin X_j'$ (ただし，$I_j\langle\rangle X_j'$), $X\subseteq X_j'$. ゆえに $\neg b_j\notin X$. このとき I_0 の作り方より，I_0 内のすべての解釈は c_j を真とするから $c_j\in X$.

ゆえに，X は [定義 2.3] の D 1〜D 3 の各条件を満たす．

$\Gamma(X)$ は D 1〜D 3 の各条件を満たす式の集合のうち最小のものであるから $\Gamma(X)\subseteq X$.

次に，$X\subseteq\Gamma(X)$ を帰納法で示す．

$X_0=Th(W)$. また，$W\subseteq\Gamma(X)$ より $Th(W)\subseteq Th(\Gamma(X))=\Gamma(X)$. ゆえに，$X_0\subseteq\Gamma(X)$.

$I_0^j\langle\rangle X_j, X_j=Th(X_j)$ なる X_j において $X_j\subseteq\Gamma(X)$ が成立していると仮定する．このとき，$I_0^{j+1}\langle\rangle X_{j+1}$, $X_{j+1}=Th(X_{j+1})$ なる X_{j+1} において，$X_{j+1}\subseteq\Gamma(X)$ が成立することを証明する．

a_{j+1} は I_0^j のすべての解釈で真であるから，$a_{j+1}\in X_j\subseteq\Gamma(X)$. 最終状態での I_{j+1} が空でないから b_{j+1} のモデルが I_0 にも含まれる (すなわち，$\neg b_{j+1}\notin X$). したがって，$\Gamma(X)$ の定義の仕方より $c_{j+1}\in\Gamma(X)$. ところで仮定より，$X_j\subseteq\Gamma(X)$ であるから，$X_j\cup\{c_{j+1}\}\subseteq\Gamma(X)$. 両辺の Th をとって，$Th(X_j\cup\{c_{j+1}\})\subseteq Th(\Gamma(X))=\Gamma(X)$. 一方，$I_0^{j+1}$ の作り方より，$I_0^{j+1}=I_0^j\cap \mathrm{model}(c_{j+1})$ であるから，$X_{j+1}=Th(X_j\cup\{c_{j+1}\})$. ただし，$\mathrm{model}(c_j)$ は論理式 c_j を真とするすべての解釈の集合を表す．以上の結果より，$X_{j+1}\subseteq\Gamma(X)$. $X_m=X$ であるから，$X\subseteq\Gamma(X)$.

したがって，$X=\Gamma(X)$. ■

[定理 4.2] (アルゴリズムの完全性) $A=(D, W)$ の拡張世界のモデル集合は，アルゴリズムの結果 I_0 である．

定理を証明する前に，$A=(D, W)$ の拡張世界について考察する．E を A の一つの拡張世界とすれば，[定理 2.2] より

$A'=(D', W)$

$D'=D-\{d\in D: a\notin E$ または $\neg b\in E\}$

なるデフォルト理論 A' は唯一の拡張世界 E を持ち，それは次のように表される．

$E=Th(W\cup \mathrm{CONSEQUENTS}(D'))$

この $A'=(D', W)$ について，

1) A' にアルゴリズムを適用したとき，最終状態を持つ (このときの，結果を I_0 とする). ([補題 4.3])
2) E のモデル集合は I_0 に含まれる．([補題 4.4])
3) E のモデル集合は I_0 を含む．([補題 4.5])
4) A' の結果は A の結果に等しい．([補題 4.6])

の 4 点を証明すれば，[定理 4.2] は証明されたことになる．

[補題 4.3]〜[補題 4.6] を以下に示す．D' の元を $d_1, d_2, \cdots, d_r$ とし，$d_j=a_j:Mb_j/c_j$ と表す．なお，先と同様，W に対する I_0 を I_0^0, d_j を使用後の I_0 を I_0^j と表す．

[補題 4.3] $A'=(D', W)$ にアルゴリズムを適用したとき，最終状態を持つ．

(証明) アルゴリズムで最終状態が存在しないと仮定すると，$d_1, d_2, \cdots, d_{m-1}$ を適用した後，少なくとも一つのデフォルト式 $d_m=a_m:Mb_m/c_m$ について

1) a_m は I_0^{m-1} に含まれるすべてのモデルで真．
2) I_0^{m-1} の中で b_m を真とするすべての解釈の集合を I_m としたとき，$I_m\neq\phi$.
3) I_0^{m-1} の中で c_m を真とするすべての解釈の集合を I' としたとき，少なくとも一つの k ($1\leqq k\leqq m$) について $I_k\cap I'=\phi$.

という状態になる．

今，I' 内のすべての解釈で真となるすべての論理式の集合を E^* と表すと

$E^*=Th(W\cup \mathrm{CONSEQUENTS}(\{d_1, d_2, \cdots, d_{m-1}\})\cup c_m)$ ところで，$E=Th(W\cup \mathrm{CONSEQUENTS}(D'))$ より，$E^*\subseteq E$.

一方，$I_k \cap I' = \phi$ より，I' の中には b_k と c_m を共に真とするような解釈は存在しない．つまり，I' の解釈は $\neg b_k$ を真とする．すなわち $\neg b_k \in E^*$．ゆえに，$\neg b_k \in E$．これは，D' の定義に矛盾する．したがって，A' に対してアルゴリズムは必ず最終状態を持つ（なお，$I' = \phi$ のときには $c_m \notin E$ であることに矛盾する）．■

［補題 4.4］ E のモデル集合 I^* は I_0 に含まれる．

（証明） アルゴリズムの最終状態に至るまでに I_0 の（再）構成に用いられたデフォルト式を $d_1, d_2, \cdots, d_m$ $(d_j \in D', j = 1 \sim m)$ とする．これより作られる I_0 はその作り方より，$I_0 = \mathrm{model}(W) \cap_{j=1}^{m} \mathrm{model}(c_j)$ であるから，I_0 は $Th(W \cup \mathrm{CONSEQUENTS}(\{d_1, d_2, \cdots, d_m\}))$ のモデル集合である．

一方，$A' = (D', W)$ の拡張世界 E は，$E = Th(W \cup \mathrm{CONSEQUENTS}(D'))$ であり，E のモデル集合を I^* とすると，$\{d_1, d_2, \cdots, d_m\} \subseteq D'$ より，$I^* \subseteq I_0$．すなわち，E のモデル集合 I^* は I_0 に含まれる．■

［補題 4.5］ E のモデル集合 I^* は I_0 を含む．

（証明） I_0 を作るために用いられたデフォルト式の列を $d_1, d_2, \cdots, d_m$ とし，アルゴリズムは最終状態とする．このとき I_0 は $Th(W \cup \mathrm{CONSEQUENTS}(\{d_1, d_2, \cdots, d_m\}))$ のモデル集合である．一方，E は $A' = (D', W)$ の拡張世界であるから［定理 2.1］より

$$E_0 = W$$

$$\vdots$$

$$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{c \mid a : Mb/c \in D', a \in E_i, \neg b \notin E\}$$

としたとき，

$$E = \cup_{i=0}^{\infty} E_i$$

が成立している．

最初の $I_0(I_0^0)$ は W のモデル集合である．

今，アルゴリズムで使用した $d_1, d_2, \cdots, d_m$ のデフォルト式に含まれないで，上記の E_i の構成に使用されるデフォルト式 $d'(d' \in D')$ が存在すると仮定する．デフォルト式を適当に選ぶと，アルゴリズムの I_0 を求めるのに用いたデフォルト式の順序と，上記の E_i を求めるのに用いたデフォルト式の順序を一致させることができる．したがって，上記の d' は E_{m+1} の構成の際に使用されるデフォルト式であると仮定しても一般性を失わない．すると，この $d' = a' : Mb'/c'$ は $a' \in E_m, \neg b' \notin E$ が成立する．ここで，$E_m = Th(W \cup \mathrm{CONSEQUENTS}(\{d_1, d_2, \cdots, d_m\}))$ であり，I_0 は E_m のモデル集合であるから，a' は I_0 内のすべての解釈で真である．また，$\neg b' \notin E$ であるから，E のモデル集合を I^* とすると I^* の中には b' を真とする解釈が少なくとも一つは存在する．一方，［補題 4.4］より，$I^* \subseteq I_0$ であるから，I_0 の中にも b' を真とする解釈が少なくとも一つは存在する．したがって，アルゴリズムより，このような d' に対して最終状態ではない．これは I_0 が最終状態における結果であるという仮定に反する．ゆえに，$\{d_1, d_2, \cdots, d_m\}$ 以外で拡張世界を構成する際に用いられるデフォルト式は存在しない．すなわち，$E \subseteq Th(W \cup \mathrm{CONSEQUENTS}(\{d_1, d_2, \cdots, d_m\}))$ である．ゆえに，$I_0 \subseteq I^*$．すなわち，E のモデル集合 I^* は I_0 を含む．■

［補題 4.4］，［補題 4.5］によりデフォルト理論 A' の拡張世界のモデル集合とアルゴリズムの結果 I_0 が等しいことが証明された．つぎに［補題 4.6］を示し，［定理 4.2］の証明を終える．

［補題 4.6］ A' の結果は A の結果に等しい．

（証明） A' に対してアルゴリズムの最終状態に至るまでに I_0 の（再）構成に用いられたデフォルト式を $d_1, d_2, \cdots, d_m$ $(d_j \in D', j = 1 \sim m)$ とする．この同じ系列は A においてもアルゴリズムの各ステップの条件を満たすので，A においても $d_1, d_2, \cdots, d_m$ で最終状態であることを示せば十分である．D に含まれ D' に含まれない任意のデフォルト式 $d = a : Mb/c$ を考える．D' の作り方より，d は，$a \notin E$ または $\neg b \in E$ の条件を満たす．$a \notin E$ のときはアルゴリズムの条件 1 を，$\neg b \in E$ のときにはアルゴリズムの条件 2 を満たさない．したがって，I_0 は A に対しても最終状態である．■

5. 例　　題

本章では提案のアルゴリズムの適用例を示すとともに，これによって得られた拡張世界が Reiter の定義した拡張世界と一致することを［定理 2.1］を用いて確かめる．なお，本章の例題で用いる P, Q, R, S, T, U の文字は命題を表すものとする．

［例題 1］ 次のデフォルト理論 $A = (D, W)$ を考える．

$$D = \{Q : MP/R\}$$

$$W = \{P\}$$

アルゴリズムの手順に従い，A のモデル集合を求める．

手順 1；W のモデル集合を求め，これを I_0 とする．

$$\begin{array}{cccc} & P & Q & R \\ I_0 = (& 1 & - & -) \end{array} \quad (1)$$

式(1)の I_0 は，P を真とする解釈の集合であり，(P, Q, R) に対する解釈の割当が，$\{(1,1,1)(1,1,0)(1,0,1)(1,0,0)\}$ であることを表す．なお，1は真，0は偽，ーは真偽いずれも取り得ることを表す．以下，特別の場合を除き，P, Q, R 等の記号を付すのを省略する．

手順 2；$d=Q:MP/R$ を選ぶ．この場合，d の前提が Q であるので，条件1は成立しない．例えば解釈 $(1,0,1)$ や $(1,0,0)$ は Q を真としない．したがって，手順2の②により，手順3へ行く．

手順 3；再構成不能の理由が（A）に相当する．したがって式(1)の I_0 が最終状態で，これが求める拡張世界のモデル集合である．

ところで，式(1)の4個の解釈すべてで真となる式（モデル集合 I_0 に対応する恒真式）の集合は $Th(\{P\})$ で与えられる．したがって，これがモデル理論より求めた $A=(D, W)$ の拡張世界である．

次に，この拡張世界が［定理 2.1］を満たす拡張世界であることを確かめる．（［定理 2.1］において，$E=Th(\{P\})$ と仮定して各 E_i を求め，この E_i において $\cup_{i=0}^{\infty} E_i=Th(\{P\})$ が成立していることを示す．）

$E_0=\{P\}$

$E_1=Th(\{P\})\cup\phi=Th(\{P\})$

$\because$ $Q:MP/R\in D$ において，

$Q\notin E_0=\{P\}$

$E_2=Th(Th(\{P\}))\cup\phi=Th(\{P\})$

$\because$ $Q:MP/R\in D$ において，

$Q\notin E_1=Th(\{P\})$

以下同様に，

$E_1=E_2=E_3=\cdots=E_\infty=Th(\{P\})$

したがって，

$\cup_{i=0}^{\infty} E_i=Th(\{P\})$

［例題2］ 次のデフォルト理論 $A=(D, W)$ を考える．

$D=\{Q:MP/R\}$

$W=\{Q\}$

アルゴリズムの手順に従い，A のモデル集合を求める．

手順 1；W のモデル集合を求め，これを I_0 とする．

$\quad P \quad Q \quad R$

$I_0=(-\ \ 1\ \ -)$

手順 2；$d=Q:MP/R$ を選ぶ．

条件 1；この場合，d の前提 Q は I_0 に含まれるモデルすべてで真であるので，条件1は成立する．

条件 2；I_0 の中で弁明 P を真とする解釈を I_1 とすると，

$I_1=(1\ \ 1\ \ -)$.

条件 3；I_0 の中で帰結 R を真とする解釈を I' とすると，

$I'=(-\ \ 1\ \ 1)$.

明らかに，$I'\neq\phi$，$I_1\cap I'\neq\phi$.

以上の3条件が満足されるので，①により I_0, I_1 を再構成する．

$I_0\leftarrow I'$，すなわち

$$I_0=(-\ \ 1\ \ 1). \qquad (2)$$

$I_1\leftarrow I_1\cap I'$，すなわち

$I_1=(1\ \ 1\ \ 1)$.

d を D より取り除き，手順2の最初に戻る．

手順 2；$D=\phi$ であるから，③により，式(2)の I_0 がアルゴリズムの結果である．

ところで，式(2)の2個の解釈（$\{(1\ 1\ 1)(0\ 1\ 1)\}$）すべてで真となる式（モデル集合 I_0 に対応する恒真式）の集合は $Th(\{Q, R\})$ で与えられる．したがって，これがモデル理論より求めた $A=(D, W)$ の拡張世界である．

次に，この拡張世界が［定理 2.1］を満たす拡張世界であることを確かめる．（［定理 2.1］において，$E=Th(\{Q, R\})$ と仮定して各 E_i を求め，この E_i において $\cup_{i=0}^{\infty} E_i=Th(\{Q, R\})$ が成立していることを示す．）

$E_0=\{Q\}$

$E_1=Th(\{Q\})\cup\{R\}$

$\because$ $Q:MP/R\in D$ において，

$Q\in E_0$ かつ $\neg P\notin E=Th(\{Q, R\})$

$E_2=Th(Th(\{Q\})\cup\{R\})\cup\{R\}=Th(\{Q, R\})$

$\because$ $Q:MP/R\in D$ において，

$Q\in E_1$ かつ $\neg P\notin E=Th(\{Q, R\})$

以下同様に，

$E_2=E_3=\cdots=E_\infty=Th(\{Q, R\})$

したがって，次の関係が成立している．

$\cup_{i=0}^{\infty} E_i=Th(\{Q, R\})$

［例題3］ 文献 3) 例題 2.4 のデフォルト理論 $A=(D, W)$ を考える．

$D=\{:MP/P, Q:MR/R,$

$\quad S\vee^{*} P:MT/T,$

$\quad R\wedge T:M\neg P, M(S\vee P)/U\}$

$W=\{Q, R\supset S\vee P, P\wedge R\supset\neg T\}$

* 文献 3) では "∧" となっているが，これはミスプリントであると思われる．

アルゴリズムの手順に従い，A のモデル集合を求める．

手順 1；W のモデル集合を求め，これを I_0 とする．

$$I_0=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P & Q & R & S & T & U \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 1 & 0 & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & 0 & - \\ 0 & 1 & - & 1 & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

手順 2；

（i）$d_1=MP/P$ を選ぶ．

条件 1；d_1 の前提が空であるので，条件 1 は無条件に成立．

条件 2；I_0 の中で弁明 P を真とする解釈を I_1 とすると，

$$I_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & 0 & - \end{pmatrix}.$$

条件 3；I_0 の中で帰結 P を真とする解釈 I' は（弁明と帰結が同じ式 P であるから）I_1 と等しく，

$$I'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & 0 & - \end{pmatrix}.$$

明らかに，$I'\neq\phi, I_1\cap I'\neq\phi$.

以上の 3 条件が満足されるので，①により I_0, I_1 を再構成する．

$I_0\leftarrow I'$，すなわち

$$I_0=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & 0 & - \end{pmatrix}.$$

$I_1\leftarrow I_1\cap I'$，すなわち

$$I_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & 0 & - \end{pmatrix}.$$

d_1 を D より取り除く．

（ii）$d_2=Q:MR/R$ を選択する．

条件 1；Q は I_0 のモデルすべてで真．

条件 2；$I_2=(1\ \ 1\ \ 1\ \ -\ \ 0\ \ -)$.

条件 3；I' は条件 2 の I_2 と等しく，

$I'\neq\phi$，$I_1\cap I'\neq\phi$，$I_2\cap I'\neq\phi$

以上の 3 条件が満足されるので，①により I_0, I_1, I_2 を再構成する．

$I_0\leftarrow I'$，すなわち

$$I_0=(1\ \ 1\ \ 1\ \ -\ \ 0\ \ -).$$

$I_1\leftarrow I_1\cap I'$，すなわち

$$I_1=(1\ \ 1\ \ 1\ \ -\ \ 0\ \ -).$$

$I_2\leftarrow I_2\cap I'$，すなわち

$$I_2=(1\ \ 1\ \ 1\ \ -\ \ 0\ \ -).$$

d_2 を D より取り除く．

（iii）$d_3=S\vee P:MT/T$ を選択する．

この場合，条件 1 は満足するが，条件 2 に反する．したがって，再構成は行わず次のデフォルト式を選択する．

（iv）$d_4=R\wedge T:M\neg P, M(S\vee P)/U$ を選択する．

条件 1 に反する．手順 3 へ行く．

手順 3；再構成不能の理由が，条件 1 または 2 である．したがって（ii）で求めた I_0 が最終状態で，モデル集合となっている．

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P & Q & R & S & T & U \end{array} \\ I_0=(1\ \ 1\ \ 1\ \ -\ \ 0\ \ -) \end{array} \tag{3}$$

同様にして，d_1, d_3, d_2, d_4 の順に選択すると，

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P & Q & R & S & T & U \end{array} \\ I_0=(1\ \ 1\ \ 0\ \ -\ \ 1\ \ -). \end{array} \tag{4}$$

d_2, d_3, d_4, d_1 の順に選択すると，

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P & Q & R & S & T & U \end{array} \\ I_0=(0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1). \end{array} \tag{5}$$

式（3），（4），（5）で与えられるモデル集合に対応する恒真式の集合は，それぞれ次式で与えられる．

$$Th(\{P, Q, R, \neg T\}) \tag{6}$$

$$Th(\{P, Q, \neg R, T\}) \tag{7}$$

$$Th(\{\neg P, Q, R, S, T, U\}) \tag{8}$$

したがって，これがモデル理論より求めた $A=(D, W)$ の拡張世界である．一方，文献 3）では $A=(D, W)$ の拡張世界を次のように与えている．

$$Th(W\cup\{P, R\}) \tag{9}$$

$$Th(W\cup\{P, T\}) \tag{10}$$

$$Th(W\cup\{R, T, U\}) \tag{11}$$

式（6）と式（9），式（7）と式（10），式（8）と式（11）が同値であることは明らかであろう．

6. む す び

本論文ではモデル理論の立場に立って，Reiter のデフォルト推論の拡張世界のモデル集合を求めるアルゴリズムを与え，そのアルゴリズムの健全性および完全性を証明した．拡張世界を形式証明論的に求めるのは困難であるが，本アルゴリズムによれば拡張世界のモデル集合を機械的に求めることができる．さらに拡張世界を定理式の集合として見る場合，推論結果が直感的には理解しにくいこともあるが，モデルで表現した場合には，推論結果は容易に理解でき有効であると思われる．

なお，提案のアルゴリズムは命題のみでなく一階述語に対するデフォルト論理に対して記述されており，理論的な意味からはこの一般性は非常に興味深いもの

である．しかしながら，一階述語に対するモデルは一般には無限になるため，この意味では本アルゴリズムを実際に有効に利用できるのは現在のところ命題に対するデフォルト論理の範囲に限定される．この問題に対する検討は今後の課題である．

謝辞 本研究の一部は文部省科学研究費補助金，特定研究「多元知識情報」によるものである．

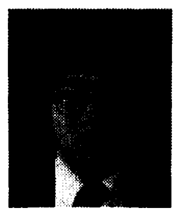
参 考 文 献

1) 大須賀節雄：知識の獲得と学習，情報処理，Vol. 26, No. 12, pp. 1520-1528 (1985).
2) McCarthy, J.: Circumscription—A Form of Non-monotonic Reasoning, *Artif. Intell.*, Vol. 13, No. 1/2, pp. 27-39 (1980).
3) Reiter, R.: A Logic for Default Reasoning, *ibid.*, pp. 81-132.
4) McDermott, D. and Doyle, J.: Non-monotonic Logic I, *ibid.*, pp. 41-72.
5) Łukaszewicz, W.: Considerations on Default Logic, *Proc. AAAI, Non-monotonic Reasoning Workshop*, pp. 165-193 (1984).
6) Łukaszewicz, W.: Two Results on Default Logic, *Proc. 9th IJCAI*, pp. 459-461 (1985).
7) McDermott, D.: Nonmonotonic Logic II: Nonmonotonic Modal Theories, *J. ACM*, Vol. 29, No. 1, pp. 33-57 (1982).
8) Moore, R. C.: Semantical Considerations on Nonmonotonic Logic, *Artif. Intell.*, Vol. 25, No. 1, pp. 75-94 (1985).
9) 長尾，淵：論理と意味，岩波書店，東京 (1983).
10) 相原，村上，馬場口：非単調論理の実現についての基礎的研究，文部省特定研究「多元知識情報の知的処理と統合化に関する研究」昭和60年度報告集(2)，pp. 803-815 (1986).
11) 相原，村上，馬場口，四反田：DEFAULT 推論の一実現法，昭和61年度電子通信学会総合全国大会講演論文集，1443, p. 6-85 (1986).
12) 四反田，村上，相原：default logic におけるモデル理論について，昭和57年度電気関係学会四国支部連大，pp. 255-256 (1982).

(昭和61年 2 月 17 日受付)
(昭和61年 11 月 5 日採録)

相原　恒博（正会員）
昭和5年生．昭和30年愛媛大学工学部電気工学科卒業．昭和37年同大助手，現在同大学工学部電子工学科教授．工学博士．主としてしきい値論理の研究に従事してきたが，近年はパターン認識，画像処理，非単調論理などの研究に従事．電子情報通信学会，人工知能学会，IEEE などの会員．

村上　研二（正会員）
昭和23年生．昭和46年愛媛大学工学部電気工学科卒業．昭和48年同大学院修士課程修了．同年同大学工学部電子工学科助手．現在，同助教授．工学博士．しきい値論理，非単調論理，連想形記憶，画像処理などの研究に従事．電子情報通信学会，人工知能学会などの会員．



馬場口　登（正会員）
昭和32年生．昭和54年大阪大学工学部通信工学科卒業．昭和57年同大学院博士後期課程退学，同年愛媛大学工学部電子工学科助手．昭和59年工学博士，現在に至る．この間，パターン認識，画像処理の研究に従事し，近年，知識情報処理，特に非単調推論に興味を持つ．電子情報通信学会，人工知能学会各会員．

四反田秀樹（正会員）
昭和33年生．昭和56年愛媛大学工学部電子工学科卒業．昭和58年同大学院修士課程修了．同年松下電器産業(株)入社．現在，同社システム研究所において知的情報処理システムの研究開発に従事．