

A-037

効率的な二次元 RAID のための完全二部グラフの ordering の構成  
 Constructions of Orderings for the Complete Bipartite Graph to speed up  
 Two-dimension RAID

菊池 大吾\*  
 Daigo Kikuchi

足立 智子\*  
 Tomoko Adachi

1. はじめに

RAID とはハードディスクドライブの処理速度と安全性を高める技術である。この技術は、ネットワーク構築やサーバなど、高い信頼性と性能が要求されるコンピュータでは不可欠な存在となっている。RAID は基本的に、ディスクの読み込み・書き込みを複数のディスクで並列に行うことにより処理速度を高め、記憶すべきデータを格納した information disk の他に、ディスクの破損箇所の発見・修復のための check disk と呼ばれる冗長性を持たせたディスクを用いることによって安全性を高めている。しかし、安全性を高めるためとって check disk を多くすると、追加のコストが増えてしまう。そこで、安全性と追加コストのバランスを考えることが重要になってくる。

RAID のアクセスコストを低減するため、Cohen 等(2001)によって cluttered ordering という概念が導入された。これは、RAID の information disk と check disk を完全グラフの辺と頂点に対応させて information disk の順序付けを考察する、というものである。また、Mueller 等(2005)は、二次元の RAID を完全二部グラフに対応させることで数理モデル化を行った。

本稿では Mueller 等の研究をさらに発展させ、効率的な RAID を構築するため、完全二部グラフの cluttered ordering の構成法について報告する。

2. 二次元 RAID の数理モデル化

information disk には保存したいデータを分割して格納し、check disk には information disk 内のデータが破損した場合に復旧するための冗長データを格納する。そして今、 $n$  個の information disk と  $c$  個の check disk があるとする。本稿で扱う二次元 RAID では、information disk、check disk を縦横の二次元に配列するので、information disk の個数  $n = m_1 \times m_2$  に対し、check disk の個数は  $c = m_1 + m_2$  となる。本稿では  $m_1 = m_2 (=m)$  の場合を扱う。

図1では9個の information disk を縦3行・横3列の二次元に配列しているの、対応する check disk は縦方向に3個・横方向に3個の計6個となる。

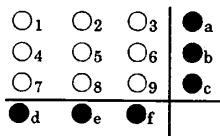


図1. 二次元の RAID

この二次元 RAID を完全二部グラフで表現することで数理モデル化を行う。

RAIDのcheck diskを頂点、information diskを辺とみなすことで、RAIDを完全グラフで表現することができる。 $n(=m^2)$ 個のinformation disk・ $c(=2m)$ 個のcheck diskを持つ二次元のRAIDは、上下に $m$ 個ずつ計 $c = 2m$ 個の頂点・ $n = m^2$ 本の辺を持つ完全二部グラフ $K_{m,m}$ に対応する。

先に図1で示した二次元のRAIDは、図2のように完全二部グラフ $K_{3,3}$ で表現できる。

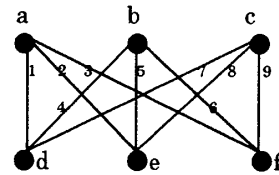


図2. 図1に対応する完全二部グラフ

3. Cluttered Ordering

あるグラフ $G=(V, E)$ について、 $c=|V|$ ,  $E=\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ とし、 $n$ より小さい正の整数 $d$ を考える。また、 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 上の置換 $\pi$ に対して $V_i^{n,d}$ を「 $\{e_{\pi(i)}, e_{\pi(i+1)}, \dots, e_{\pi(i+d-1)}\}$ の各辺に含まれる点の集合」とする(インデックスは $\text{mod } n$ で計算し、 $0 \leq i \leq n-1$ である)。

ここで、 $d$ 本の辺を持つ部分グラフのアクセスコストをその部分グラフの頂点数で測る。するとアクセスコストの上限は  $\max_i |V_i^{n,d}|$  で与えられる。このとき、 $\max_i |V_i^{n,d}| = f$ となる辺の順序付けを  $(d, f)$ -cluttered ordering と呼ぶ。

完全二部グラフ $K_{3,3}$ の(3,4)-cluttered orderingを図3に示す。

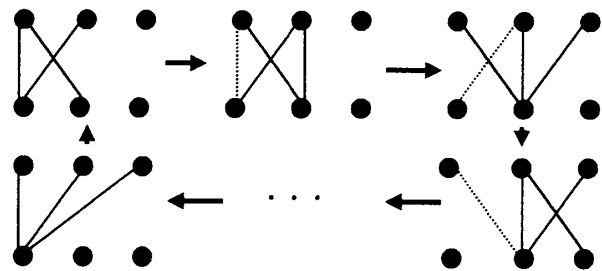


図3.  $K_{3,3}$ の(3,4)-cluttered ordering

4. 二部グラフにおける Cluttered Ordering

完全グラフにおける cluttered ordering の構成法は Cohen 等(文献[1]および[2])によって与えられた。

本稿では、二次元 RAID に自然に対応するように、Mueller 等(文献[3])によって与えられた完全二部グラフの cluttered ordering の構成法について述べる。そのために、wrapped  $\Delta$ -labelling と  $(d, f)$ -movement という2つの概念を導入する。

\* 東邦大学理学部情報科学科

4.1. wrapped  $\triangleleft$ -labelling

二部グラフ  $H=(U, E)$  について  $U=V \cup W, d=|E|$  とする。このとき、写像  $\delta: U \rightarrow Z_d \times Z_2$  が以下の二つの条件を満たすとき、この写像  $\delta$  のことを  $H$  の  $\triangleleft$ -labelling と呼ぶ。

- 1 :  $\delta(V) \subset Z_d \times \{0\}, \delta(W) \subset Z_d \times \{1\}$  を満たす。
- 2 :  $Z_d$  の各要素が  $\{\delta(v) - \delta(w) \mid v \in V, w \in W, (v, w) \in E\}$  に一つずつ存在する。

更に  $U$  の部分集合  $X, Y$  に対し、 $Z_d \times Z_2$  において  $\delta(Y) = \delta(X) + (k, 0)$ 、 $\gcd(k, d) = 1$  を満たす整数  $k$  が存在するとき、この  $\triangleleft$ -labelling  $\delta$  のことを  $H$  の wrapped  $\triangleleft$ -labelling と呼ぶ。

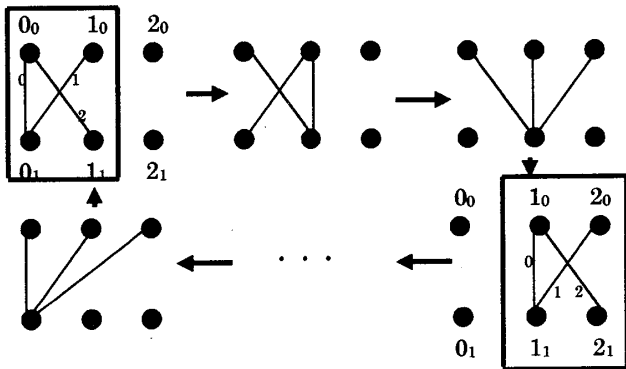


図4.  $K_{3,3}$  の wrapped  $\triangleleft$ -labelling

4.2. (d, f) - movement

次に (d, f) - movement について述べる。同型な二つの二部グラフ  $H=(U, E), H'=(U', E')$  について

$$U = V \cup W, U' = V' \cup W', |V|=|V'|, |W|=|W'|,$$

$$E = \{e_0, e_1, \dots, e_{d-1}\}, E' = \{e'_0, e'_1, \dots, e'_{d-1}\}$$

とする。また、 $\{0, 1, \dots, d-1\}$  上の置換  $\pi$  を用いて、完全二部グラフ  $G$  を

$$H_0 = H, H_i = (U_i, E_i), 1 \leq i \leq d$$

と、 $d+1$  個の部分グラフに分割する。但し

$$E_i = (E_{i-1} \setminus \{e_{\pi(i-1)}\}) \cup \{e'_{\pi(i-1)}\}$$

$U_i$  は  $E_i$  の各辺に含まれる頂点の集合

とする。このとき、 $H_d = H'$  となり、 $\max_{0 \leq i \leq d} |U_i| = f$  ならば、 $\pi$  を  $H$  から  $H'$  への (d, f) - movement と呼ぶ。

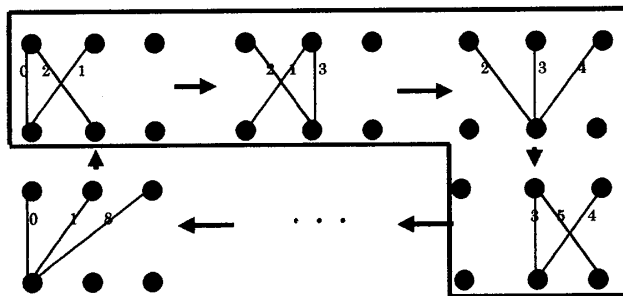


図5. (3,4)-movement

4.3. Cluttered Ordering の存在定理

wrapped  $\triangleleft$ -labelling と (d, f) - movement を用いることにより、完全二部グラフにおける (d, f) - cluttered ordering の存在に関して、次の定理が得られる。

定理 1(文献 [3]). 同型な二部グラフ  $H, H'$  に対し、wrapped  $\triangleleft$ -labelling と (d, f) - movement が存在するならば、完全二部グラフ  $K_{d,d}$  において (d, f) - cluttered ordering が存在する。

5. 特別な場合の Cluttered Ordering の構成法

本章では、自然数  $h, t$  をパラメータとして、次で与えられる特別な二部グラフ  $H(h; t) = (U, E)$  について考察する。

まず頂点集合  $U=V \cup W$  を、次のように各  $h(t+1)$  個の頂点を持つ 2 つの部分集合  $V, W$  に分ける。

$$V := \{v_i \mid 0 \leq i < h(t+1)\},$$

$$W := \{w_i \mid 0 \leq i < h(t+1)\},$$

よって頂点の個数は  $|U| = 2h(t+1)$  となる。

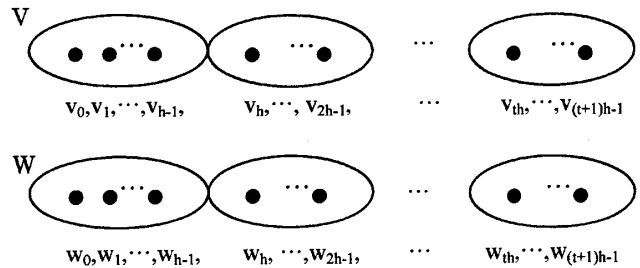


図6. 二部グラフ  $H(h; t)$  の頂点集合

次に辺集合を、次のように  $t$  個の部分集合  $E_s (0 \leq s < t)$  に分割する。更に、部分集合  $E_s$  は、それぞれ、 $E_s', E_s'', E_s'''$  の 3 つの部分集合に分けられる。

$$E_s' := \{(v_i, w_j) \mid s \times h \leq i < j < s \times h + h\},$$

$$E_s'' := \{(v_i, w_{h+j}) \mid s \times h \leq i < j < s \times h + h\},$$

$$E_s''' := \{(v_{h+i}, w_j) \mid s \times h \leq i < j < s \times h + h\},$$

$$E_s := E_s' \cup E_s'' \cup E_s''' \quad 0 \leq s < t$$

$$E := \bigcup_{0 \leq s < t} E_s$$

よって辺の本数は  $|E| = t \times (h^2 + h(h+1)/2 + h(h+1)/2) = th(2h+1)$  となる。下の図 7 は、 $h=3, t=1$  の場合の二部グラフ  $H(3; 1)$  の辺集合の分割を表している。

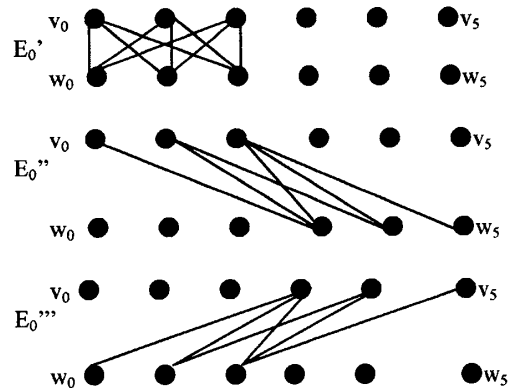


図7. 二部グラフ  $H(3; 1)$  の辺集合の分割

ここで、二部グラフ  $H(h; t)$  に関して、次の定理により

(d,f)-movement の存在が保証される。

**定理 2**(文献[3]). 自然数  $h, t$  (但し  $t \geq 2$ ) に対し、 $d=h(2h+1)$ ,  $f=4h$  とすれば、二部グラフ  $H(h;t)$  に関して  $E_0$  から  $E_{t-1}$  への (d,f)-movement が存在する。

従って、 $H(h;t)$  に関して、同型な二部グラフへの wrapped  $\triangleleft$ -labelling の構成法を与えれば、定理 1 および定理 2 より、対応する完全二部グラフにおける cluttered ordering が与えられる。このことより、次の定理が得られる。

**定理 3**(文献[3]). 自然数  $h, t$  に対して、二部グラフ  $H(h;t)$  の任意の wrapped  $\triangleleft$ -labelling から、完全二部グラフ  $K_{m,m}$  の (d,f)-cluttered ordering が得られる。このときのパラメータの値は、 $m=th(2h+1)$ ,  $d=h(2h+1)$ ,  $f=4h$  となる。

Mueller 等は、 $H(1;t) \cdot H(2;t) \cdot H(h;1)$  に対して、それぞれに同型な二部グラフへの wrapped  $\triangleleft$ -labelling の構成法を与えた。本稿では、 $H(1;t) \cdot H(2;t)$  の wrapped  $\triangleleft$ -labelling の構成法を紹介するとともに、更に研究を進展させ、 $H(3;t)$  に関して、同型な二部グラフへの wrapped  $\triangleleft$ -labelling の構成法を与える。

### 5.1. $H(1;t)$ の wrapped $\triangleleft$ -labelling の構成

本節では、任意の自然数  $t$  に対して、 $H(1;t)$  の wrapped  $\triangleleft$ -labelling の構成法を与える。

二部グラフ  $H(1;t)=(U, E)$  は、 $2(t+1)$  個の頂点と  $3t$  本の辺を持つ。自然数  $t$  が与えられた時、頂点集合  $U=V \cup W$  上の写像  $\delta: U \rightarrow Z_{3t} \times Z_2$  を次のように定める。

$$\delta(v_j) = \begin{cases} (jt, 0) & 0 \leq j \leq t-1 \text{ の時} \\ (t^2+1, 0) & j=t \text{ の時} \end{cases}$$

$$\delta(w_j) = \begin{cases} (j(t-1), 1) & 0 \leq j \leq t-1 \text{ の時} \\ (t^2+1, 1) & j=t \text{ の時} \end{cases}$$

但し、写像  $\delta$  による像の第 1 成分は、 $\text{mod } 3t$  で計算された整数である。

ここで、上で定めた  $\delta$  の差のリスト  $\Delta(E)$  を計算すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-1} E_j^s) &= \{jt-j(t-1) \mid 0 \leq j \leq t-1\} = \{0, 1, 2, \dots, t-1\}, \\ \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-2} E_j^s) &= \{jt-(j+1)(t-1) \mid 0 \leq j \leq t-2\} \\ &= \{2t+1, 2t+2, \dots, 3t-1\}, \\ \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-2} E_j^s) &= \{(j+1)t-j(t-1) \mid 0 \leq j \leq t-2\} \\ &= \{t, t+1, \dots, 2t-2\}, \\ \Delta(E_{t-1} \cup E_{t-1}) &= \{(t-1)t-(t^2+1), t^2+1-(t-1)^2\} = \{2t-1, 2t\}, \\ \Delta(E) &= \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-1} E_j^s) \cup \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-2} E_j^s) \\ &\quad \cup \Delta(\cup_{0 \leq s \leq t-2} E_j^s) \cup \Delta(E_{t-1} \cup E_{t-1}) \\ &= \{0, 1, 2, \dots, 3t-1\} \end{aligned}$$

以上のように、 $Z_{3t}$  のすべての要素は、 $\Delta(E)$  にちょうど 1 度ずつ現れることがわかる。

また、任意の  $t$  に関して、 $k=t^2+1$  とおけば、 $k$  は  $3t$  と互いに素である。よって明らかに上で定めた写像  $\delta$  は、4.1 節で定めた wrapped  $\triangleleft$ -labelling の条件を満たしている。従って、この写像  $\delta$  を  $H(1;t)$  の wrapped  $\triangleleft$ -labelling と定め

れば、定理 3 を適用することにより、次の結果が得られる。

**定理 4**(文献[3]). 任意の自然数  $t$  に対し、パラメータの値が  $d=3$ ,  $f=4$  となるような完全二部グラフ  $K_{3t,3t}$  の (d,f)-cluttered ordering が存在する。

**定理 5**(文献[3]). 任意の自然数  $t$  に対し、パラメータの値が  $d=3s+r$ ,  $f=2(s+1)+r$  ( $s > 0$ ,  $r=0, 1, 2$ ) となるような完全二部グラフ  $K_{3t,3t}$  の (d,f)-cluttered ordering が存在する。

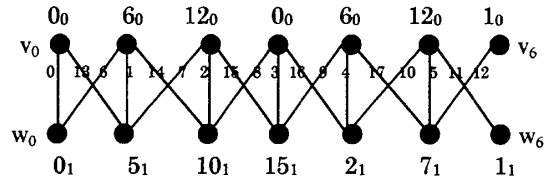


図 8.  $H(1;6)$ ,  $|E|=18$ ,  $|V|=12$ ,  $k=1$  の wrapped  $\triangleleft$ -labelling

### 5.2. $H(2;t)$ の wrapped $\triangleleft$ -labelling の構成

本節では、任意の自然数  $t$  に対して、 $H(2;t)$  の wrapped  $\triangleleft$ -labelling の構成法を与える。

二部グラフ  $H(2;t)=(U, E)$  は、 $4(t+1)$  個の頂点と  $10t$  本の辺を持つ。自然数  $t$  が与えられた時、labelling  $\delta$  は、頂点集合  $U=V \cup W$  上の写像  $\delta: U \rightarrow Z_{10t} \times Z_2$  である。

上部の頂点集合  $V=\{v_0, v_1, \dots, v_{2t+1}\}$  を写像  $\delta$  によって写した像  $(x, 0)$  の第一成分  $x$  は、下記のような  $2t+2$  個の整数の数列になるとする。

$$c_0, c_0+a, c_1, c_1+a, \dots, c_j, c_j+a, \dots, c_{t-1}, c_{t-1}+a, c_0+k, c_0+k+a$$

同様に、下部の頂点集合  $W=\{w_0, w_1, \dots, w_{2t+1}\}$  を写像  $\delta$  によって写した像の第一成分は、下記のような  $2t+2$  個の整数の数列になるとする。

$$d_0, d_0+b, d_1, d_1+b, \dots, d_j, d_j+b, \dots, d_{t-1}, d_{t-1}+b, d_0+k, d_0+k+b$$

ここで、 $a, b, c_j, d_j, k$  の値を、

$$\begin{aligned} a &= 6t-1, & c_j &= 2jt, & (j=0, 1, \dots, t-1) \\ b &= 6t-2, & d_j &= 2j(t-1), & (j=0, 1, \dots, t-1) \\ k &= 2t^2+1 \end{aligned}$$

と定める。すると  $Z_{10t}$  のすべての要素は、 $\Delta(E)$  にちょうど 1 度ずつ現れる(文献[3])。よってこの写像  $\delta$  は wrapped  $\triangleleft$ -labelling の条件を満たしている。従って、この写像  $\delta$  を  $H(2;t)$  の wrapped  $\triangleleft$ -labelling と定めれば、定理 3 を適用することにより、次の結果が得られる。

**定理 6**(文献[3]). 任意の自然数  $t$  に対して、パラメータの値が  $d=10$ ,  $f=8$  となるような完全二部グラフ  $K_{10t,10t}$  の (d,f)-cluttered ordering が存在する。

**定理 7**(文献[3]). 任意の自然数  $t$  に対して、パラメータの値が  $d=10s+r$ ,  $f=4(s+1)+\min(r, 4)$  ( $s > 0$ ,  $r=0, 1, 2, \dots, 9$ ) となるような完全二部グラフ  $K_{10t,10t}$  の (d,f)-cluttered ordering が存在する。

### 5.3. $H(3;t)$ の cluttered ordering の構成

本節では、任意の自然数  $t$  に対して、 $H(3;t)$  の wrapped

△ labelling の構成法を与える。

二部グラフ  $H(3;t)=(U, E)$  は、 $6(t+1)$ 個の頂点と  $21t$ 本の辺を持つ。自然数  $t$  が与えられた時、labelling  $\delta$  は、頂点集合  $U=V \cup W$  上の写像  $\delta: U \rightarrow Z_{21t} \times Z_2$  である。

上部の頂点集合  $V=\{v_0, v_1, \dots, v_{3t+2}\}$  を写像  $\delta$  によって写した像  $(x, 0)$  の第一成分  $x$  は、下記のような  $3t+3$  個の整数の数列になるとする。

$$c_0, c_0+a, c_0+2a, c_1, c_1+a, c_1+2a, \dots, c_j, c_j+a, c_j+2a, \dots, c_{t-1}, c_{t-1}+a, c_{t-1}+2a, c_0+k, c_0+k+a, c_0+k+2a$$

同様に、下部の頂点集合  $W=\{w_0, w_1, \dots, w_{3t+2}\}$  を写像  $\delta$  によって写した像の第一成分は、下記のような  $3t+3$  個の整数の数列になるとする。

$$d_0, d_0+b, d_0+2b, d_1, d_1+b, d_1+2b, \dots, d_j, d_j+b, d_j+2b, \dots, d_{t-1}, d_{t-1}+b, d_{t-1}+2b, d_0+k, d_0+k+b, d_0+k+2b$$

ここで、 $a, b, c_0, c_j, d_0, d_j, k$  の値を、

$$\begin{aligned} a &= 15t-1, & c_0 &= 0, & c_j &= 3jt, & (j=1, 2, \dots, t-1) \\ b &= 15t-2, & d_0 &= 0, & d_j &= 3j(t-1) & (j=1, 2, \dots, t-1) \\ k &= 3t^2+1 \end{aligned}$$

と定める。

ここで  $\Delta(E)$  を計算すると下記ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta(E_0') &= (c_0-d_0, c_0-d_0+(a-b), c_0-d_0+(2a-2b), c_0-d_0+a, c_0-d_0+2a, \\ & c_0-d_0-b, c_0-d_0-2b, c_0-d_0+(2a-b), c_0-d_0+(a-2b)) \\ &= (0, 1, 2, 15t-1, 9t-2, 6t+2, 12t+4, 15t, 6t+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(E_j') &= (c_j-d_j, c_j-d_j+(a-b), c_j-d_j+(2a-2b), c_j-d_j+a, c_j-d_j+2a, \\ & c_j-d_j-b, c_j-d_j-2b, c_j-d_j+(2a-b), c_j-d_j+(a-2b)) \\ &= (3j, 3j+1, 3j+2, 3j+15t-1, 3j+9t-2, \\ & 3j+6t+2, 3j+12t+4, 3j+15t, 3j+6t+3) \end{aligned}$$

各  $j$  の値は  $1, 2, \dots, t-1$

$$\begin{aligned} \Delta(E_{j-1}'') &= (c_{j-1}-d_j, c_{j-1}-d_j+a, c_{j-1}-d_j+2a, c_{j-1}-d_j+(a-b), \\ & c_{j-1}-d_j+(2a-b), c_{j-1}-d_j+(2a-2b)) \\ &= (3j+18t, 3j+12t-1, 3j+6t-2, 3j+18t+1, 3j+12t, 3j+18t+2) \end{aligned}$$

各  $j$  の値は  $1, 2, \dots, t-1$

$$\begin{aligned} \Delta(E_{j-1}''') &= (c_j-d_{j-1}, c_j-d_{j-1}-b, c_j-d_{j-1}-2b, c_j-d_{j-1}+(a-b), \\ & c_j-d_{j-1}+(a-2b), c_j-d_{j-1}+(2a-2b)) \\ &= (3j+3t-3, 3j+9t-1, 3j+15t+1, 3j+3t-2, 3j+9t, 3j+3t-1) \end{aligned}$$

各  $j$  の値は  $1, 2, \dots, t-1$

$$\begin{aligned} \Delta(E_{t-1}''') &= (c_{t-1}-d_0-k, c_{t-1}-d_0+(a-k), c_{t-1}-d_0+(2a-k), c_{t-1}-d_0+(a-b-k), \\ & c_{t-1}-d_0+(2a-b-k), c_{t-1}-d_0+(2a-2b-k)) \\ &= (18t-1, 12t-2, 6t-3, 18t, 12t-1, 18t+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(E_{t-1}''''') &= (c_0+k-d_{t-1}, c_0+k-d_{t-1}-b, c_0+k-d_{t-1}-2b, c_0+a+k-d_{t-1}-b, \\ & c_0+a+k-d_{t-1}-2b, c_0+2a+k-d_{t-1}-2b) \\ &= (6t-2, 12t, 18t+2, 6t-1, 12t+1, 6t) \end{aligned}$$

また、上記の  $\Delta(E)$  に各  $j$  の値を代入してまとめると、

- (1)  $\Delta(E_0')$  より、 $(0, 1, 2)$
- (2)  $\Delta(E_j')$  より、 $\{3j, 3j+1, 3j+2 \mid j=1, 2, \dots, t-1\} = (3, \dots, 3t-1)$
- (3)  $\Delta(E_{j-1}''')$  より、 $\{3j+3t-3, 3j+3t-2, 3j+3t-1 \mid j=1, \dots, t-1\} = (3t, \dots, 6t-4)$

となり、以下同様に

- (4)  $(6t-3, 6t-2, 6t-1, 6t)$
- (5)  $\{3j+6t+3, 3j+6t-2, 3j+6t+2 \mid j=1, \dots, t-1\} \cup \{6t+2, 6t+3, 9t-2\} = (6t+1, \dots, 9t)$
- (6)  $\{3j+9t, 3j+9t-2, 3j+9t-1 \mid j=1, \dots, t-1\} = (9t+1, \dots, 12t-3)$
- (7)  $(12t-2, 12t-1, 12t, 12t+1)$
- (8)  $\{3j+12t, 3j+12t+4, 3j+12t-1 \mid j=1, \dots, t-1\}$

$$\cup \{12t+4, 15t-1, 15t\}$$

$$= (12t+2, \dots, 15t+1)$$

$$(9) \{3j+15t, 3j+15t+1, 3j+15t-1 \mid j=1, \dots, t-1\} = (15t+2, \dots, 18t-2)$$

$$(10) (18t-1, 18t, 18t+1, 18t+2)$$

$$(11) \{3j+18t, 3j+18t+1, 3j+18t+2 \mid j=1, \dots, t-1\} = (18t+3, \dots, 21t-1)$$

となる。上記のように  $Z_{21t}$  のすべての要素は、 $\Delta(E)$  にちょうど1度ずつ現れることがわかる。

また、任意の  $t$  に関して  $k=3t^2+1$  は  $21t$  と互いに素である。よって明らかに写像  $\delta$  は wrapped  $\Delta$ -labelling の条件を満たしている。従って、この写像  $\delta$  を  $H(3;t)$  の wrapped  $\Delta$ -labelling と定め、定理3を適用することにより、次の結果が得られる。

**定理 8.** 任意の自然数  $t$  に対して、パラメータの値が  $d=21$ ,  $f=12$  となるような完全二部グラフ  $K_{21t, 21t}$  の  $(d, f)$ -cluttered ordering が存在する。

**定理 9.** 任意の自然数  $t$  に対して、パラメータの値が  $d=21s+r$ ,  $f=6(s+1)+\min(r, 6)$  ( $s>0, r=0, 1, 2, \dots, 20$ ) となるような完全二部グラフ  $K_{21t, 21t}$  の  $(d, f)$ -cluttered ordering が存在する。

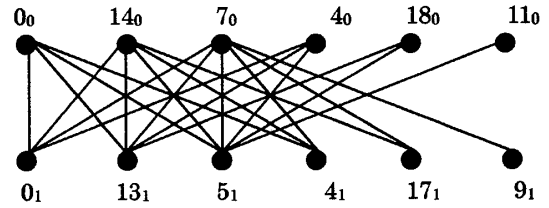


図9.  $H(3;1)$ ,  $|E|=21$ ,  $|V|=12$ ,  $k=4$  の wrapped  $\Delta$ -labelling

## 6. おわりに

いくつかの完全二部グラフの系列について、wrapped  $\Delta$ -labelling を構成し、最適な cluttered ordering を探索してきた。

一般の完全二部グラフや多次元 RAID の最適な cluttered ordering を探索するのが今後の課題である。

## 文献

- [1] M. Cohen, and C. Colbourn, Ladder orderings of pairs and RAID performance, *Discrete Applied Mathematics*, vol.138, no.29, pp.35-46, March 2004.
- [2] M. Cohen, C. Colbourn, and D. Froncek, Cluttered orderings for the complete graph, *COCOON 2001: Lect. Notes Comp. Sci.* 2108, pp.420-431, Springer Verlag, 2001.
- [3] M. Mueller, T. Adachi, and M. Jimbo, Cluttered orderings for the Complete Bipartite Graph, *Discrete Applied Mathematics*, in press