A-019

$2 \times n$ 双行列ゲームのナッシュ均衡点を求める高速アルゴリズム

Fast Algorithm for Finding a Nash Equilibrium Point in $2 \times n$ Bimatrix Game

石井 宏幸 † 山田 敏規 †
Hiroyuki Ishii Toshinori Yamada

1 はじめに

ゲーム理論は，合理的行動についての一般的な理論として，von Neumann と Morgenstern [7] によって確立され，以来，主に経済学の分野で発展してきた．しかしながら近年，ゲーム理論の研究は計算機科学の分野においても盛んに行われてきている．Papadimitriou は [2, 5] において，計算機科学の分野で解決されるべきいくつかのゲーム理論的な問題を提起した．これらの問題の一つに，(戦略型) 非協力ゲームにおけるナッシュ均衡点を求めるための多項式時間アルゴリズムの開発がある．

ナッシュ均衡点とは全てのプレイヤーにとって，他のプレイヤーが戦略を変えない限り，自分が戦略を変えたとしても決して得をすることがないような状態をいう．任意の非協力ゲームに対して混合戦略を用いた場合にナッシュ均衡点が存在することは，Nash[4] によって示されている．しかしながら，Nash[4] はナッシュ均衡点の存在を Brouwer の不動点定理 [8] を用いて非構成的に証明している．

戦略型 2 人ゲームは 2 つの $m \times n$ 行列を用いて表現することができるため，$m \times n$ 双行列ゲームとも呼ばれる．双行列ゲームのナッシュ均衡点を求めるアルゴリズムは Lemke と Howson [3],Porter ら [6] によってそれぞれ提案されている．しかしながら，これらのアルゴリズムの計算複雑度は指数オーダーであり，双行列ゲームのナッシュ均衡点を求める多項式時間アルゴリズムは知られていない．Porter ら [6] のアルゴリズムに関しては $2 \times n$ 双行列ゲームに対して高々 $O(n^2)$ 個の線形計画問題を解くことによってナッシュ均衡点を求めることができることが知られている．小文では，$2 \times n$ 双行列ゲームのナッシュ均衡点を $O(n \log n)$ 時間で求めるアルゴリズムを提案する．

なお紙面の都合上，証明は省略する．

2 双行列ゲーム

2.1 双行列ゲーム

2 つの $m \times n$ 行列 A, B によって定義される双行列ゲーム (A, B) を $m \times n$ 双行列ゲームと呼ぶ．行列 A, B の各行はプレイヤー 1 の (純) 戦略を，各列はプレイヤー 2 の (純) 戦略を表しており，A と B の (i, j) 成分は，プレイヤー 1 が第 i 行を，プレイヤー 2 が第 j 列を戦略に選んだときに得られるプレイヤー 1 と 2 の利得をそれぞれ表している．

2.2 混合戦略と利得

各プレイヤーが決定的に選ぶ戦略を純戦略と呼び，確率的に選ぶ戦略を混合戦略と呼ぶ．任意の正の整数 n に対して，

$$S_n = \{[p_1, p_2, \ldots, p_n]^{\mathrm{T}} : \forall i (0 \leq p_i \leq 1), \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

とおくと，$m \times n$ 双行列ゲーム (A, B) において，プレイヤー 1 と 2 の混合戦略はそれぞれ S_m と S_n の要素として表される．プレイヤー 1 と 2 がそれぞれ $\boldsymbol{p} \in S_m$ と $\boldsymbol{q} \in S_n$ を混合戦略に選んだときのプレイヤー 1 と 2 の利得をそれぞれ

$$E_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{q} \qquad E_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{q}$$

で表す．

2.3 最適応答とナッシュ均衡点

相手のプレイヤーのある戦略に対して，自分の利得が最大となるような戦略を最適応答と呼ぶ．形式的には，$\boldsymbol{q}' \in S_n$ $(\boldsymbol{p}' \in S_m)$ が与えられたとき，

$$E_1(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}') = \max_{\boldsymbol{p}} E_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}')$$

$$\left(E_2(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}^*) = \max_{\boldsymbol{q}} E_2(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q})\right)$$

を満たす戦略 $\boldsymbol{p}^* \in S_m$ $(\boldsymbol{q}^* \in S_n)$ を $\boldsymbol{p}' \in S_m$ $(\boldsymbol{q}' \in S_n)$ に対するプレイヤー 1 (プレイヤー 2) の最適応答と呼ぶ．

双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点は，互いに最適応答であるような戦略の対 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ である．すなわち，

$$E_1(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) = \max_{\boldsymbol{p}^*} E_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}^*)$$

$$E_2(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) = \max_{\boldsymbol{q}^*} E_2(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q})$$

を満たす $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ を双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点と呼ぶ．

2.4 凸包

二次元平面上の点の集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ に対して，S の全ての点を含む面積最小の凸多角形を S の凸包と呼び，$\mathrm{Conv}(S)$ で表す．厳密には以下のように定義される：

$$\mathrm{Conv}(S) = \{\boldsymbol{h} : \boldsymbol{h} = (\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_n)\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \text{ for some } \boldsymbol{\lambda} \in S_n\}$$

ここで，$\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \cdots, \boldsymbol{h}_n$ は S に含まれる点の位置ベクトルを表す．凸多角形は頂点によって表されるので，$\mathrm{Conv}(S)$ も頂点によって表されることに注意せよ．

† 埼玉大学 Saitama University

3 $2 \times n$ 双行列ゲームのナッシュ均衡点を求める高速アルゴリズム

定理 1 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ を $m \times n$ 双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点とする．このとき，任意の実数 c, d に対して，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ は $m \times n$ 双行列ゲーム $(A + cI_{m,n}, B + dI_{m,n})$ のナッシュ均衡点でもある．ここで，$I_{m,n}$ は全ての成分が 1 である $m \times n$ 行列を表す．

定理 1 により，一般性を失うことなく A, B の全ての成分が正であると仮定できる．

全ての成分が正である $2 \times n$ 行列 A, B に対して，双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点を求めるアルゴリズムを図 1 に示す．

定理 2 図 1 のアルゴリズムの出力は双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点である．

図 1 Step1 の凸包は Graham スキャン [1] を用いて計算複雑度 $O(n \log n)$ で構成できる．また，2×2 双行列ゲームのナッシュ均衡点を求める計算複雑度は定数である．このことから次の定理が成り立つ．

定理 3 図 1 のアルゴリズムの計算複雑度は $O(n \log n)$ である．

4 まとめ

小文では，$2 \times n$ 双行列ゲームのナッシュ均衡点を $O(n \log n)$ 時間で求める多項式時間アルゴリズムを提案した．しかしながら，$m \times n$ 双行列ゲームのナッシュ均衡点を求める多項式時間アルゴリズムが存在するか否かは，依然として未解決問題である．

Step 1: B の各列 $\boldsymbol{b_i}$ を二次元平面上の点の位置ベクトルと見なし，これに $(0,0)^{\mathrm{T}}$, $(x_{\max}, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, y_{\max})^{\mathrm{T}}$ を加えた点集合 S の凸包の頂点を求める．ここで，

$$x_{\max} = \max\left\{ b_{1,i} : \boldsymbol{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ b_{2,i} \end{pmatrix} \right\}$$

$$y_{\max} = \max\left\{ b_{2,i} : \boldsymbol{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ b_{2,i} \end{pmatrix} \right\}$$

である．

Step 2: Step 1 で求められた頂点のうち，B の列に対応する点の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2', \ldots, \boldsymbol{b}_k'$ とする．ここで，$\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2', \ldots, \boldsymbol{b}_k'$ は x 成分の降順に整列されているとする．また，$\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2', \ldots, \boldsymbol{b}_k'$ に対応する A の列を $\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2', \ldots, \boldsymbol{a}_k'$ とする．ここで $\boldsymbol{a}_{1,i}'$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は，$\boldsymbol{a}_i' = \begin{pmatrix} a_{1,i}' \\ a_{2,i}' \end{pmatrix}$ を表している．

$A' = (\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2', \ldots, \boldsymbol{a}_k')$

$B' = (\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2', \ldots, \boldsymbol{b}_k')$

とおく．このとき，A', B' によって定義される双行列ゲームに対して，以下のように混合戦略 $\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}'$ を計算する．

Case 1: $a_{1,1}' \geqq a_{2,1}'$ である場合，
$\boldsymbol{p}' = (1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{q}' = (1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$ とする．

Case 2: $a_{1,k}' \leqq a_{2,k}'$ である場合，
$\boldsymbol{p}' = (0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{q}' = (0,\ldots,0,1)^{\mathrm{T}}$ とする．

Case 3: 上記以外の場合，$a_{1,l}' \leqq a_{2,l}'$ かつ $a_{1,l+1}' \geqq a_{2,l+1}'$ である l が存在する．このとき，

$A'' = (\boldsymbol{a}_l', \boldsymbol{a}_{l+1}')$ $B'' = (\boldsymbol{b}_l', \boldsymbol{b}_{l+1}')$

によって定義される双行列ゲームのナッシュ均衡点 $((p_l, p_{l+1})^{\mathrm{T}}, (q_l, q_{l+1})^{\mathrm{T}})$ を求める．また，$i \neq l, l+1$ のとき，$p_i = q_i = 0$ とおく．このとき，$\boldsymbol{p}' = (p_1, p_2, \ldots, p_k)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{q}' = (q_1, q_2, \ldots, q_k)^{\mathrm{T}}$ とする．

Step 3: $\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}'$ を A, B によって定義される双行列ゲームの戦略に変換したものを出力する．

図 1 $2 \times n$ 双行列ゲームのナッシュ均衡点を求めるアルゴリズム

参考文献

[1] Thomas H.Cormen, Charles E.Leiserson, and Ronald L.Rivest. Introduction to algorithms, 1990.

[2] Christos H.Papadimitriou. Game theory and mathematical economics:a theoretical computer scientist's introduction. In *Proc.42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'01)*, pages 4–8, 2001.

[3] L. E. Lemke and J. T. Howson. Equilibrium points of bimatrix games. *Journal of Applied Mathematics*, Vol.12:pages 413–423, 1962.

[4] John Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proc. the National Academy of Sciences*, Vol.36(No.1):pages 48–49, 1950.

[5] Christos H. Papadimitriou. Algorithms,games,and the internet. In *Proc.ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'01)*, pages 749–753, 2001.

[6] Ryan Porter, Eugene Nudelman, and Yoav Shoham. Simple search methods for finding a Nash equilibrium. In *Proc.AAAI-04*, pages 664–669, 2004.

[7] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Wiley, 1944.

[8] 坂口 実. **ゲームの理論**. 森北出版, 2003.