A-017

WDM光ネットワークの波長変換器配置問題
Wavelength Converter Placement Problem in WDM Optical Networks

田中 貴章 †
Takaaki Tanaka

山田 敏規 †
Toshinori Yamada

1. はじめに

近年の通信需要の拡大に伴い，WDM光ネットワークが注目されている．WDMは，1本の光ファイバを波長の異なる光信号を多重化し，同時に伝送することによって，光ファイバの本数を増やすことなく通信容量を増やすことのできる技術である．WDM光ネットワークにおいては，与えられたノード対の間の通信を確立するため，経路(光パスと呼ぶ)が決定され，同じリンクを通るどの二つの光パスもそのリンク上で同じ波長を使わないように光パスに波長が割り当てられる．しかしながら，各リンクで利用できる波長の数には制限があるため，通信を確立するために利用される波長の数を最小化することは基礎的な問題である．

WDM光ネットワークは大きくWS(Wavelength Selective)ネットワークとWI(Wavelength Interchanging)ネットワークの2つに分類される．WSネットワークにおいては，光パス上の全てのリンクに同じ波長を割り当てなければならない．一方，WIネットワークにおいては，いくつかのノードに波長変換器を置くことで，波長変換器が置かれているノードを通る光パスに対して，そのノードの前後のリンクに異なる波長を割り当てることができる．

小文では，WIネットワークにおいて波長変換器を効率的に配置する方法について考察する．オフライン[オンライン]通信要求は光パスの集合[系列]である．オフラインまたはオンライン通信要求の混雑度とは，同一のリンクを通る通信要求中の光パスの数の最大値である．SをNのノードの部分集合とする．Sの全ての点に波長変換器を置いたとき，任意のオフライン[オンライン]通信要求に対してその混雑度と同じ数の波長で正常に通信を行うことができるとき，Sをオフライン[オンライン]の下でのネットワークNの適切配置と呼ぶ．[1-3]において，オフラインの下での最小適切配置を求める問題はNP-困難であることが知られている．しかしながら，オンラインの下での最小適切配置を求める問題の計算複雑度は知られていない．

小文では，Sがオンラインの下でのネットワークNの適切配置であるための必要十分条件を与える．また，この必要十分条件に基づいて，オンラインの下でのNの最小適切配置を求める線形時間アルゴリズムを提案する．

† 埼玉大学 Saitama University

2. 準備

Gを無向グラフとし，$V(G)$と$E(G)$をそれぞれGの点集合と辺集合とする．また，Dを有向グラフとし，$V(D)$と$A(D)$をそれぞれDの点集合と有向辺集合とする．グラフGの各辺$e=(u,v)\in E(G)$を，u,vを端点とする双方向の有向辺に置き換えることによって得られるグラフをN_Gで表す．すなわち，N_Gは次のように定義される有向グラフである：

$$V(N_G)=V(G).$$
$$A(N_G)=\{\langle u,v\rangle,\langle v,u\rangle:(u,v)\in E(G)\}$$

N_G上のオフライン通信要求R_GはN_G上の有向パスの多重集合である．任意のR_Gに対して，

$$\mathcal{P}_e(R_G)=\{P\in R_G:e\in A(P)\}$$
$$\nu(e,R_G)=|\mathcal{P}_e(R_G)|$$

と定義する．$\nu(e,R_G)$は辺eにおけるR_Gの辺負荷と呼ばれる．また，

$$\nu(R_G)=\max_{e\in A(N_G)}\nu(e,R_G)$$

をR_Gの最大辺負荷と呼ぶ．R_Gに対する有向辺$e\in A(N_G)$上の波長配置ϕ_eは$\mathcal{P}_e(R_G)$から$\{1,2,\ldots,\nu(R_G)\}$への1対1写像(単射)である．R_Gに対する波長割り当てϕは以下のように定義される．

$$\phi=\{\phi_e:e\in A(N_G)\}$$

$S\subseteq V(N_G)(=V(G))$とする．全ての点$v\notin S$と，有向辺$\langle u,v\rangle,\langle v,w\rangle$を含む全ての有向パス$P\in R_G$に対して，$\phi_{\langle u,v\rangle}(P)=\phi_{\langle v,w\rangle}(P)$であるならば，$\phi$は$S$の下で正当であると言われる．もし$N_G$上の全てのオフライン要求通信に対して$S$の下で正当である波長割り当てが存在するならば，$S$はオフラインの下での$G$に対する適切配置と呼ばれる．

N_G上のオンライン通信要求はN_G上の有向パスの系列$\mathcal{R}_G=\langle P_1,P_2,\ldots\rangle$である．また，$R_G(n)=\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$とする．$\mathcal{R}_e$に対する波長割り当ては，各$n\geq 2$に対して$\phi^{(n)}$の$R_G(n-1)$への制限が$\phi^{(n-1)}$と同一であるような$R_G(n)$に対する波長割り当て$\phi^{(n)}$の系列$\Phi=\langle\phi^{(1)},\phi^{(2)},\ldots\rangle$である．各$n\geq 1$に対して

$\phi^{(n)}$ が S の下で正当であるような波長割り当て Φ は S の下で正当であると言われる．もし N_G 上の全てのオンライン通信要求に対して S の下で正当である波長割り当てが存在するならば，S はオンラインの下での G に対する適切配置と呼ばれる．

3. オンラインの下での適切配置

定理 1 G を連結グラフとする空集合がオンラインの下での G に対する十分集合であるための必要十分条件は，G が 3 点以下のパスであることである．

証明： G が 3 点以下のパスではないと仮定する．このとき，G は (i) 次数 3 以上の点を持つ，(ii)4 点パスを含む，(iii)3 点閉路を含む，のいずれかが成り立つ．

(i)G が次数 3 以上の点 v を持つとし，x_1, x_2, x_3 を v の隣接点とする．$P_1 = (x_1, x_2), P_2 = (x_2, x_1), P_3 = (x_3, x_1), P_4 = (x_3, x_2)$ とする．このとき，$\nu(\mathcal{R}_G(1)) = \nu(\mathcal{R}_G(2)) = 1, \nu(\mathcal{R}_G(3)) = \nu(\mathcal{R}_G(4)) = 2$ である．従って，$\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \phi^{(3)}$ が $\emptyset$ の下で正当であるためには $\phi^{(3)}(P_1) = 1, \phi^{(3)}(P_2) = 1, \phi(3) = 2$ でなければならない．しかしながら，$\phi^{(4)}(P_4) \leq \nu(\mathcal{R}_G(4)) = 2$ であるので，$\phi^{(4)}$ は $\emptyset$ の下で正当ではない．これは，$\emptyset$ がオンラインの下での G に対する適切配置であることに反する．

(ii)G が x_1, x_2, x_3, x_4 の 4 点から成るパスを含むと仮定する．$P_1 = (x_1, x_2), P_2 = (x_3, x_4), P_3 = (x_1, x_3), P_4 = (x_2, x_4)$ とする．このとき，(i) と同様に矛盾を示すことができる．

(iii)G が 3 点から成る閉路を含む場合，(i) と同様に矛盾を示すことができる．

(i),(ii),(iii) より，G は 3 点以下のパスである．

逆に，G が 3 点以下のパスであると仮定する．G 上のオンライン通信要求を $\mathcal{R}_G = \langle P_1, P_2, \ldots \rangle$ とする．$\phi^{(1)}(P_1) = 1$ とすることで，$\phi^{(1)}$ は正当な波長割り当てである．$R_G(n)$ に対する正当な波長割り当て $\phi^{(n)}$ が存在すると仮定する．$W = \{\phi^{(n)}(P_i) : P_i$と P_{n+1}は辺を共有する $(i \leq n)\}$ とし，

$$w = \min\{w' : w' \notin W \text{ かつ } w' \text{は正の整数}\}$$

とする．このとき，$\phi^{(n+1)}(P_{n+1}) = w$ とおくと，$\phi^{(n+1)}$ も S の下での正当な波長割り当てである．したがって，$\emptyset$ はオンラインの下での G に対する適切配置である．**(証明終)**

グラフ G と集合 $S \in V(G)$ に対して，以下の操作を行うことによって G から得られるグラフを $G(S)$ で表す．

(操作 1) 各点 $s \in S$ を，d 個の点 $[s, e_1], [s, e_2], \ldots, [s, e_d]$ で置き換える．ここで，d は s に接続する辺の数であり，$e_1, e_2, \ldots, e_d$ は s に接続する辺である．

(操作 2)$e = (u, v) \in E(G)(u \in S)$ を，

- $v \notin S$ ならば辺 $([u, e], v)$ で，
- $v \in S$ ならば辺 $([u, e], [v, e])$ で，

それぞれ置き換える．

定理 2 S がオンラインの下での G に対する適切配置であるための必要十分条件は，$G(S)$ の全ての連結成分が 3 点以下のパスであることである．

証明： $G(S)$ の全ての連結成分が 3 点以下のパスであるとする．このとき，N_G 上のオンライン通信要求 $\mathcal{R}_G = \langle P_1, P_2, \ldots \rangle$ の代わりに，$N_G(S)$ 上の通信要求 $\mathcal{R}_G(S) = \langle P_1(S), P_2(S), \ldots \rangle$ を考える．各連結成分は 3 点以下のパスであるので，$\mathcal{R}_G(S)$ に対する $\emptyset$ の下での正当な波長割り当て Φ が存在する．明らかに，Φ は $\mathcal{R}_G$ に対する S の下での正当な波長割り当てである．したがって，S はオンラインの下での G の適切配置である．

逆に，$G(S)$ が 3 点以下のパスではない連結成分を含むとき，定理 1 より明らかに S はオンラインの下での G に対する適切配置ではない．**(証明終)**

4. 最小適切配置を求めるための線形時間アルゴリズム

定理 3 以下で示すアルゴリズムは G に対する $|S|$ が最小であるような適切配置 S を線形時間で求める．

操作 1) 全ての点の次数を求める． 操作 2) 次数 3 以上の点を S に追加する． 操作 3) 次数 1 の点から次数 2 の点が 2 つ連続して存在する場合，2 つ目の次数 2 の点を S に追加する． 操作 4) 既に波長変換器が置かれている点から次数 2 の点が 2 つ連続して存在する場合，2 つ目の次数 2 の点 v を S に追加し，v から同じ処理を繰り返す．

図 1 最小適切配置を求めるための線形時間アルゴリズム

参考文献

[1] Jon Kleinberg and Amit Kumer. Wavelength Conversion in Optical Networks. *Journal of Algorithms*, Vol. 38, pp. 25–50, 2001.

[2] Gordon Wilfong and Peter Winkler. Ring Routing and Wavelength Translation. In *SODA 98*, pp. 333–341, 1998.

[3] 粟田英樹, 山田敏規, 上野修一. WDM ネットワークにおけるルーティングと波長変換. 信学技報, Vol. CPSY98-153, No. 572, pp. 15–22, 1999.