

## 節点の移動に伴うユニフォームな3次式Bスプラインの 制御点・曲線の変化†

山崎 一生<sup>††</sup> 相澤 誠<sup>††\*</sup>

Bスプラインは生成しようとする曲線上ではなく、その曲線から少し離れたところに制御点をとって曲線セグメントを発生することから、制御点の設定方法に多少の問題がある。曲線的设计においては、制御点系列を与えるよりも、曲線上に節点系列を与える方が直観的で使いやすい。節点の一つを動かすとその影響がすべての制御点に及び、したがって生成される曲線全体にその影響が及ぶことになる。ユニフォームな3次式Bスプラインの場合において、一つの節点を動かしたとき、生成される曲線にいかなる影響が現れるかという問題について考察する。一つの節点の移動が制御点系列にいかなる影響を及ぼすかということを解析的に検討した結果、次の三つの点が明らかになった。i) 移動した節点に対応する制御点の変動は、節点を動かした向きと同じで、その変動量は節点の移動量のほぼ $\sqrt{3}$ 倍である。ii) 移動節点以外の節点に対応する制御点の変動は、移動節点番号に関して、閉曲線の場合にはほぼ対称であり、開曲線の場合には対称である。iii) 移動した節点から一つ離れるごとにその節点に対応する制御点の変動量はほぼ1/4倍になり、その移動の向きは交互に逆向きとなる。また、節点の移動が曲線に与える影響を例題について検討した結果、各曲線セグメントへの影響は移動節点から遠くなるに従って指数関数的に小さくなることが明らかとなった。

### 1. ま え が き

平面曲線の近似には直線または円弧が用いられることが多い<sup>1)-3)</sup>。曲線の近似に最もよく用いられているのは直線であり、コンピュータグラフィックスのライブラリには直線セグメント近似、あるいは多角形近似が用意されているのが普通である。任意の曲線は直線セグメントによって任意の精度で近似できるという意味で多角形近似は十分であるが、直線近似によって滑らかな曲線を得るためには膨大なデータを必要とする。

曲線の近似には区分的多項式やスプラインが、その滑らかさのゆえに用いられている。例えば、文字パターンの輪郭線や地図のデータ量の削減に区分的多項式やスプラインが用いられ効果を挙げている<sup>4)-6)</sup>。スプラインの中で最近特に注目を集めているのはBスプラインである<sup>9)-10)</sup>。Bスプラインには局所依存性、すなわち、ある制御点を移動したとき、それが曲線に及ぼす影響の範囲が限定されているという性質がある。言い換えると、Bスプラインでは曲線全体に影響を与えることなく、曲線の一部分を修正することができる。このことが、CADやコンピュータグラフィックス等にBスプラインがよく利用される大きな理由の一つである。

Bスプラインは生成しようとする曲線上ではなく、その曲線から離れたところに制御点をとって曲線セグメントを発生することから、制御点の設定方法に多少の問題がある。生成しようとする曲線上に節点系列をとって、これらの節点系列から制御点の系列を求めたあと、Bスプラインの曲線セグメントを決定する場合には、節点の一つを動かすとその影響がすべての制御点に及び、したがって生成される曲線全体にその影響が及ぶことになる。

本稿では節点の一つを動かしたとき、それが制御点系列、さらには曲線全体にいかなる影響を及ぼすかということについて検討する。

### 2. 問題の設定

簡単のために、2次元  $xy$  平面上の点  $(x, y)$  をベクトル記号をもって表記するものとしよう。図1に示すように、制御点系列  $Q_j (j=0, 1, \dots, n)$  が与えられるものとする。このとき、パラメータを  $t (0 \leq t \leq 1)$  とする一様 (ユニフォーム) な3次式Bスプライン  $P_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n-2$ ) は次式によって定義される<sup>11)</sup>。

$$P_i(t) = x_0(t)Q_{i-1} + x_1(t)Q_i \\ + x_2(t)Q_{i+1} + x_3(t)Q_{i+2}, \\ i=1, 2, \dots, n-2$$

ただし

$$\begin{cases} x_0(t) = (1-t)^3/6 \\ x_1(t) = (3t^3 - 6t^2 + 4)/6 \\ x_2(t) = (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)/6 \\ x_3(t) = t^3/6 \end{cases}$$

† Variation of Control Vertices and Curve of Uniform Cubic B-Spline with Shifting a Knot Point by ISSEI YAMASAKI and MAKOTO AIZAWA (Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Niigata University).

†† 新潟大学工学部情報工学科

\* 現在 ソニー(株)

すなわち、Bスプラインは与えられた制御点系列  $Q_j$  をもとに生成される。生成したい曲線があると、その曲線を発生できるように、その曲線とは離れた位置に適切な制御点系列を定めることになる。この制御点系列を設定するには多少の経験と勘が必要とされる。

生成されるBスプラインのパラメータ  $t=0$  あるいは  $1$  における点  $P_i (i=1, 2, \dots, n-1)$  は節点と呼ばれている。制御点系列  $Q_j (j=0, 1, \dots, n)$  を与えて曲線を決定すること、すなわち節点の系列  $P_i (i=1, 2, \dots, n-1)$  を求める問題は正変換と呼ばれ、逆に  $P_i$  を与えて  $Q_j$  を求める問題は逆変換と呼ばれている<sup>11)</sup>。

曲線の設計においては、制御点系列  $Q_j$  を与えるよりも、節点系列  $P_i$  を与える方が直観的で使いやすい。節点を与えて曲線を設計する場合、一つの節点を移動することによって、すべての制御点にその影響が及び、これに伴って曲線全体にその影響が及ぶことが問題点である。一つの節点を動かしたとき、制御点系列へいかなる影響が及ぶかを解析的に検討し、例題について曲線全体へ与える影響の程度を調べることにする。

### 3. 一つの節点移動の制御点への影響

ユニフォームな3次式Bスプラインは開いた曲線の場合と閉じた曲線の場合とで端条件が異なるので、二つの場合について別々に考察するものとする。

#### 3.1 開曲線の場合

ユニフォームな3次式Bスプラインの節点系列  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  が与えられたとき、対応する制御点系列  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$  は次の線形連立方程式の解として与えられる<sup>11)</sup>。

$$\begin{cases} Q_{i-1} + 4Q_i + Q_{i+1} = 6P_i, & i=1, 2, \dots, n-1 \\ Q_0 = Q_1 \\ Q_n = Q_{n-1} \end{cases}$$

行列の形に書けば次のとおりである。

$$AQ = 6P$$

ただし

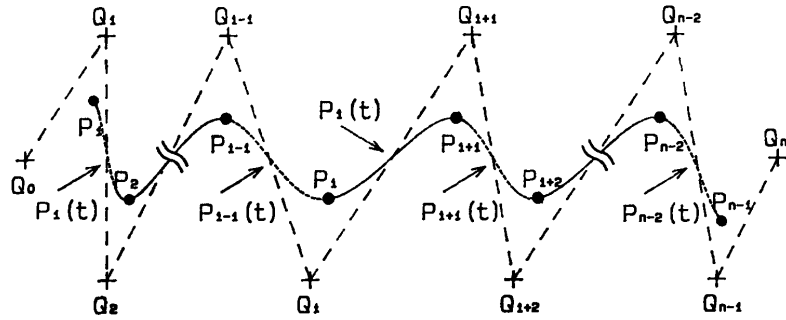


図1 3次式Bスプライン曲線の制御点系列  $Q_j (j=0, 1, \dots, n)$  と節点系列  $P_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ 。

Fig. 1 Control polygon  $Q_j (j=0, 1, \dots, n)$  and knot points  $P_i (i=1, 2, \dots, n-1)$  of a cubic B-spline curve.

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ Q = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_{n-1}]^T \\ P = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_{n-1}]^T \end{cases} \quad (1)$$

ここでTは転置を表す。

さて、節点系列の中の一つ、第  $k$  番目 ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) の節点  $P_k$  を  $\Delta P_k$  だけ移動したとき、すなわち  $P_k$  を  $P_k + \Delta P_k$  としたときに求まる制御点系列を  $Q'_i (i=1, 2, \dots, n-1)$  とすれば  $Q'_i$  は次の線形連立方程式の解である。

$$AQ' = 6P'$$

ただし

$$\begin{cases} Q' = [Q'_1 \quad Q'_2 \quad \dots \quad Q'_k \quad \dots \quad Q'_{n-1}]^T \\ P' = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_k + \Delta P_k \quad \dots \quad P_{n-1}]^T \end{cases}$$

いま、 $P_k$  を  $P_k + \Delta P_k$  と変更したことによる  $Q'_i$  の変動分  $\Delta Q_i$  を

$$\Delta Q_i = Q'_i - Q_i, \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

で定義すれば、 $\Delta Q_i$  は次の線形連立方程式の解である。

$$A \cdot \Delta Q = 6 \Delta P \quad (2)$$

ただし

$$\begin{cases} \Delta Q = [\Delta Q_1 \quad \Delta Q_2 \quad \dots \quad \Delta Q_k \quad \dots \quad \Delta Q_{n-1}]^T \\ \Delta P = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \Delta P_k \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \end{cases} \quad (3)$$

#### 1) 移動節点番号 $k \neq 1, 2, 3$ の場合

Gauss の消去法によって式(2)を解くものとしよう。係数行列  $A$  の各成分を  $a_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n+1)$  と書くものとし、前進消去後の各成分を  $a'_{ij}$  と書くものとする。また、式(2)の右辺の非斉次項(前進消去前)を  $\Delta P_i (i=1, 2, \dots, n-1)$  と書くこととし、前進消

去後の非斉次項を  $\Delta P'_i$  と書くものとする。

前進消去が完了した段階における係数行列  $A$  の対角項  $a_{ii}$  は

$$\begin{cases} a_{11}=5 \\ a_{ii}=4-b_{i-1}/b_i, \quad i=2, 3, \dots, n-2 \\ a'_{n-1, n-1}=5-b_{n-2}/b_{n-1} \end{cases} \quad (4)$$

ただし

$$b_i = \{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{i-1} + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{i-1}\}/2$$

となる (付録1参照)。

式(4)の右辺の第2項  $b_{i-1}/b_i$  は,  $|2-\sqrt{3}| < 1$  であることから,  $i$  が大きくなると  $(2-\sqrt{3})$  に収束するが, その収束は極めて速い\*。(式(5)の右辺第2項は, 式(4)の右辺第2項  $b_{i-1}/b_i$  で添字  $i$  を  $n-1$  とおいたものである。) そこで,  $i \geq 4$  のとき式(4), (5)の右辺の第2項を  $(2-\sqrt{3})$  とみなすものとする。そうすれば対角項  $a_{ii} (i=4, 5, \dots, n-1)$  は次のとおりとなる。

$$\begin{cases} a_{ii}=2+\sqrt{3}, \quad i=4, 5, \dots, n-2 \\ a'_{n-1, n-1}=3+\sqrt{3} \end{cases}$$

また, 式(3)の前進消去後の非斉次項  $\Delta P'_i$  は

$$\begin{cases} \Delta P'_i=0, \quad i=1, 2, \dots, k-1 \\ \Delta P'_i=(2-\sqrt{3})^{i-k} \Delta P_k, \quad i=k, k+1, \dots, n-1 \end{cases}$$

となる。(前進消去後の対角項  $a_{ii}$  を  $4 \leq i \leq n-2$  のとき  $(2+\sqrt{3})$  とみなしたことにより, 非斉次項  $\Delta P'_i$  が上のようになれることになる。このことが, 移動する節点の番号  $k$  が  $k \neq 1, 2, 3$  の場合を考察した理由でもある。)

以上の前進消去により線形連立方程式(2)は次のような形に変換される。

$$A' \cdot \Delta Q = 6 \Delta P' \quad (6)$$

ただし

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & & & & & \\ & 19/5 & & & & \\ & & 71/19 & & & \\ & & & 2+\sqrt{3} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2+\sqrt{3} & \\ & 0 & & & & & 3+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\Delta P' = [\Delta P'_1 \quad \Delta P'_2 \quad \dots \quad \Delta P'_i \quad \dots \quad \Delta P'_{n-1}]^T$$

\* 式(4)の右辺の第2項において,  $i$  を逐次増加したとき, その収束値  $(2-\sqrt{3})$  に対する相対誤差は下表のとおりである。

$i$	2	3	4	5	6
相対誤差	$2.54 \times 10^{-1}$	$1.79 \times 10^{-2}$	$1.28 \times 10^{-3}$	$9.20 \times 10^{-5}$	$6.61 \times 10^{-6}$

式(6)を後退代入によって  $\Delta Q_i (i=1, 2, \dots, n-1)$  について解けば

$$\begin{cases} \Delta Q_{n-i} = -\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{n-k-i+1} \\ \quad \cdot \{\sqrt{3}+2-(\sqrt{3}-2)^{2(n-k-i+1)}\} \Delta P_k, \\ \quad i=1, 2, \dots, n-k \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Delta Q_{k-i} = -\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{i+1} c_1 \Delta P_k, \\ \quad i=1, 2, \dots, k-4 \end{cases} \quad (8)$$

$$\Delta Q_3 = 19\sqrt{3} c_1 c_2 \Delta P_k \quad (9)$$

$$\Delta Q_2 = -5\sqrt{3} c_1 c_2 \Delta P_k \quad (10)$$

$$\Delta Q_1 = \sqrt{3} c_1 c_2 \Delta P_k \quad (11)$$

ただし

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{3} + 2 - (\sqrt{3}-2)^{2(n-k-1)} \\ c_2 = (\sqrt{3}-2)^{k-3}/71 \end{cases} \quad (12)$$

を得る (付録2参照)。

移動した節点番号  $k$  を基準とする表現に式(7)を書き換えるものとしよう。式(7)で  $i=n-k$  とおくと, 移動した節点番号  $k$  に対応する制御点の変動量  $\Delta Q_k$  は

$$\Delta Q_k = -\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) c_1 \Delta P_k \quad (13)$$

となる。また, 式(7)の添字を書き換えて  $k$  を基準とする表現とすれば,

$$\begin{cases} \Delta Q_{k+i} = -\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{i+1} \\ \quad \cdot \{\sqrt{3}+2-(\sqrt{3}-2)^{2(n-k-i-1)}\} \Delta P_k, \\ \quad i=1, 2, \dots, n-k-1 \end{cases} \quad (14)$$

となる。

さて, 上で得られた結果を用いて, 第  $k$  番目の節点の変動に伴う制御点系列の変動の大略を見ることにしよう。

$n \gg k$  のとき式(12)の右辺の第2項は無視できるので,

$$c_1 = \sqrt{3} + 2$$

となる。したがって式(13)より, 制御点の変動量  $\Delta Q_k$  は

$$\Delta Q_k \doteq -\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) \Delta P_k = \sqrt{3} \Delta P_k$$

となる。すなわち, 移動節点に対応する制御点の変動量  $\Delta Q_k$  は節点の移動量  $\Delta P_k$  のほぼ  $\sqrt{3}$  倍で, 変動する向きは  $\Delta P_k$  と同一である。

移動した節点に対応する制御点の変動量の大きさ  $|\Delta Q_i|$  に対する, 移動した節点の前後の節点に対応する制御点の変動量の大きさ  $|\Delta Q_{k \pm i}| (i=1, 2, \dots)$  の比は, 式(8), (13)より

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta Q_{k-i}|}{|\Delta Q_k|} &= \frac{|\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{i+1} c_1|}{|\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) c_1|} \\ &= (2-\sqrt{3})^i, \quad i=1, 2, \dots, k-4 \end{aligned} \quad (15)$$

となる。また、式(12)、(13)、(14)より

$$|\Delta Q_{k+i}|/|\Delta Q_k| = [|\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{i+1}\{(\sqrt{3}+2) - (\sqrt{3}-2)^{2(n-k-i-1)}\}|] / [|\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)\{(\sqrt{3}+2) - (\sqrt{3}-2)^{2(n-k-1)}\}|]$$

となるが、 $n \gg k, i$  のとき、この式の分母の  $\{ \}$  の中の第2項は無視できるので

$$= (2-\sqrt{3})^i, \quad i=1, 2, \dots, n-k-1 \quad (16)$$

となる。

式(15)、(16)より、移動した節点から一つ離れるごとに、対応する制御点の変動量の大きさ  $|\Delta Q_{k+i}|$  は、ほぼ  $(2-\sqrt{3}) \approx 1/4$  倍されることが分かる。また、式(8)、(13)あるいは式(13)、(14)から、 $i$  を変化したときの符号の変化は交互になっていることも分かる。すなわち、制御点の変動の向きは  $i$  の変化に伴って交互に逆向きとなっている。

2) 最初の節点移動 ( $k=1$ ) の場合

解くべき線形連立方程式は次のとおりである。

$$A \cdot \Delta Q = 6 \Delta P \quad (17)$$

ここで、 $A$  と  $\Delta Q$  とはそれぞれ式(1)、(3)で与えられ、

$$\Delta P = [\Delta P_1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

である。

先の1)の場合と同様にして線形連立方程式(17)を解けば

$$\Delta Q_{n-1} = (-1/71)(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)^{n-5} \Delta P_1 \quad (18)$$

$$\Delta Q_{n-i} = (-1/17)(\sqrt{3}-2)^{n-i-3} \cdot \{-3-2\sqrt{3} + (7\sqrt{3}-12)(\sqrt{3}-2)^{2(i-2)}\} \Delta P_1, \quad (19)$$

$$i=2, 3, \dots, n-4$$

$$\Delta Q_3 = (6/71+19c_3) \Delta P_1 \quad (20)$$

$$\Delta Q_2 = -(24/71+5c_3) \Delta P_1 \quad (21)$$

$$\Delta Q_1 = (90/71+c_3) \Delta P_1 \quad (22)$$

ただし

$$c_3 = (1/71)^2 \{ \sqrt{3} + (45-26\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)^{2(n-6)} \}$$

となる。

上の結果を用いて、第1番目の節点の移動に伴う制御点系列の変動の大略を検討するものとしよう。

$n > 6$  のとき、 $c_3$  は無視できるので、移動した節点に対応する制御点の変動量  $\Delta Q_1$  は式(22)より

$$\Delta Q_1 \approx 90/71 \Delta P_1 \approx 1.27 \Delta P_1$$

となる。すなわち、曲線の開始点(節点)を移動したとき、対応する制御点の変動量の大きさは移動量のほぼ  $90/71$  倍で、その向きは節点の移動した向きと同じ

である。

先の1)の場合よりも変動の大きさが小さいのは、端条件  $Q_0=Q_1$  が効いているものと思われる。(曲線のもう一方の端の点(最後の節点)を移動したときの、対応する制御点の変動量についても同様の結果が得られることは、式(13)において  $k=n-1$  とおき簡単な計算をすることにより容易に確かめられる。)

また、式(18)~(21)を用いて簡単な計算を行うことによって、第1番目の節点を移動したことによる制御点の変動量  $\Delta Q_i (i=2, 3, \dots, n-1)$  は、 $i$  が一つ増すごとに、その大きさがほぼ  $1/4$  になり、変動の向きは交互に逆向きとなっていることも分かる。

3) 第2番目の節点移動 ( $k=2$ ) の場合

解くべき線形連立方程式の形は次のとおりである。

$$A \cdot \Delta Q = 6 \Delta P \quad (23)$$

ただし、 $A$  と  $\Delta Q$  とはそれぞれ式(1)、(3)で与えられ

$$\Delta P = [0 \ \Delta P_2 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

である。

先の1)の場合と同様にして線形連立方程式(23)を解けば

$$\Delta Q_{n-1} = (5/71)(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)^{n-5} \Delta P_2 \quad (24)$$

$$\Delta Q_{n-i} = (-5/71)(\sqrt{3}-2)^{n-i-3} \cdot \{3+2\sqrt{3} + (12-7\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)^{2(i-2)}\} \Delta P_2, \quad (25)$$

$$i=2, 3, \dots, n-4$$

$$\Delta Q_3 = -(30/71-19c_4) \Delta P_2 \quad (26)$$

$$\Delta Q_2 = 5(24/71-c_4) \Delta P_2 \quad (27)$$

$$\Delta Q_1 = -(24/71-c_4) \Delta P_2 \quad (28)$$

ただし

$$c_4 = (5/71)^2 (\sqrt{3}-2) \{3+2\sqrt{3} + (12-7\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)^{2(n-6)}\}$$

を得る。

上の結果を用いて、第2番目の節点を移動したことによる制御点系列の変動の大略を検討すれば、次のとおりである。

$n > 6$  のとき  $c_4$  は無視できるので、移動した節点に対応する制御点の変動量  $\Delta Q_2$  は式(27)より

$$\Delta Q_2 \approx (120/71) \Delta P_2 \approx 1.69 \Delta P_2$$

となる。すなわち、第2番目の節点を移動したとき、対応する制御点の変動量の大きさは、節点の移動量  $\Delta P_2$  の約  $120/71$  倍で、変動の向きは節点の移動の向きと同じである。

また、式(28)から、開始点に対応する制御点の変動

量  $\Delta Q_1$  は、その大きさが  $\Delta Q_2$  の 1/5 倍で、向きが  $\Delta Q_2$  と逆向きであることが分かる。さらに式 (24)~(27) から、第 2 番目の節点を移動したことによる制御点の変動量  $\Delta Q_i (i=3, 4, \dots, n-1)$  は、 $i$  が一つ増すごとにその大きさがほぼ 1/4 倍され、変動の向きは交互に逆向きとなっていることが分かる。

#### 4) 第 3 番目の節点移動 ( $k=3$ ) の場合

解くべき線形連立方程式の形は次のとおりである。

$$A \cdot \Delta Q = 6 \Delta P \quad (29)$$

ただし、 $A$  と  $\Delta Q$  とはそれぞれ式 (1), (3) で与えられる

$$\Delta P = [0 \ 0 \ \Delta P_3 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

である。

先の 1) の場合と同様にして線形連立方程式 (29) を解けば

$$\Delta Q_{n-1} = (-19/71)(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)^{n-5} \Delta P_3 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Delta Q_{n-i} &= (-19/71)(\sqrt{3}-2)^{n-i-3} \\ &\cdot \{-3-2\sqrt{3} \\ &+ (7\sqrt{3}-12)(\sqrt{3}-2)^{2(i-1)}\} \Delta P_3, \quad (31) \\ & \quad i=2, 3, \dots, n-4 \end{aligned}$$

$$\Delta Q_3 = 19c_5 \Delta P_3 \quad (32)$$

$$\Delta Q_2 = -5c_5 \Delta P_3 \quad (33)$$

$$\Delta Q_1 = c_5 \Delta P_3 \quad (34)$$

ただし

$$\begin{aligned} c_5 &= (1/71) \\ &\cdot [6 + (19/71)\{\sqrt{3} \\ &+ (45-26\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)^{2(n-5)}\}] \end{aligned}$$

を得る。

上の結果を用いて、第 3 番目の節点を移動したことによる制御点系列の変動の概略を検討するものとしよう。

$n > 5$  のとき

$$c_5 = (6 + 19\sqrt{3}/71)/71 \approx 0.09$$

となり、移動節点に対応する制御点の変動量  $\Delta Q_3$  は式 (32) より

$$\Delta Q_3 \approx 1.73 \Delta P_3$$

となる。すなわち、第 3 番目の節点を移動したとき、対応する制御点の変動量  $\Delta Q_3$  の大きさは、移動量  $\Delta P_3$  の大きさの約 1.73 倍で、その向きは節点の移動の向きと同じである。

また、式 (30)~(34) から、移動した節点番号以外の制御点の変動量は、節点番号が一つ増す (減る) ごとに、その大きさがほぼ 1/4 倍されることと、変動の向きは交互に逆向きとなることとが分かる。

### 3.2 閉曲線の場合

節点系列  $P_0, P_1, \dots, P_n$  が与えられたとき、対応する制御点系列  $Q_{-1}, Q_0, \dots, Q_{n+1}$  は、次の線形連立方程式の解として与えられる<sup>11)</sup>。

$$\begin{cases} Q_{i-1} + 4Q_i + Q_{i+1} = 6P_i, & i=0, 1, \dots, n \\ Q_{-1} = Q_n \\ Q_{n+1} = Q_0 \end{cases}$$

行列の形に書けば次のとおりである。

$$A Q = 6 P$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$Q = [Q_{-1} \ Q_0 \ \dots \ Q_n]^T$$

$$P = [P_0 \ P_1 \ \dots \ P_n]^T$$

さて、節点系列の中の 1 点  $P_k (k=0, 1, \dots, n)$  を  $\Delta P_k$  だけ移動したとき、すなわち  $P_k$  を  $P_k + \Delta P_k$  と変更したときに求まる制御点系列を  $Q'_i (i=0, 1, \dots, n)$  とすれば  $Q'_i$  は次の線形連立方程式の解である。

$$A Q' = 6 P'$$

ただし、 $A$  は式 (35) で与えられ

$$\begin{cases} Q'_i = [Q'_0 \ Q'_1 \ \dots \ Q'_i \ \dots \ Q'_n]^T \\ P' = [P_0 \ P_1 \ \dots \ P_k + \Delta P_k \ \dots \ P_n]^T \end{cases}$$

である。

いま、 $P_k$  を  $\Delta P_k$  だけ動かしたことに伴う  $Q'_i$  の変動分  $\Delta Q'_i$  を

$$\Delta Q'_i = Q'_i - Q_i, \quad i=0, 1, \dots, n$$

で定義すれば、 $\Delta Q'_i$  は次の線形連立方程式の解である。

$$A \cdot \Delta Q = 6 \Delta P \quad (36)$$

ただし、 $A$  は式 (35) で与えられ

$$\begin{cases} \Delta Q = [\Delta Q_0 \ \Delta Q_1 \ \dots \ \Delta Q_k \ \dots \ \Delta Q_n]^T \\ \Delta P = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \Delta P_k \ 0 \ \dots \ 0]^T \end{cases}$$

である。

開曲線の場合には行列  $A$  は三重対角であるが、閉曲線の場合には三重対角ではない。そこで、まず三重対角化を行い、先の開曲線の場合とはほぼ同様の方法で式 (36) を解けば

$$\Delta Q_{k-i} = [(-1)^i \{R_{n-i+1} - (-1)^n R_i\} / c_6] \Delta P_k, \quad i=1, 2, \dots, k \quad (37)$$

$$\Delta Q_{k+i} = [(-1)^{n-i+1} \{R_i - (-1)^n R_{n-i+1}\} / c_6] \cdot \Delta P_k, \quad i=1, 2, \dots, n-k \quad (38)$$

$$\Delta Q_k = (3R_{n+1}/c_6) \Delta P_k \quad (39)$$

ここで

$$\begin{cases} R_i = (\sqrt{3}/6) \{ (2+\sqrt{3})^i - (2-\sqrt{3})^i \} \\ c_6 = 2R_{n+1} - R_n + (-1)^n \end{cases} \quad (40)$$

を得る.

ところで, 式(37), (38)から

$$\begin{aligned} \Delta Q_{k-i} &= [(-1)^{i+1+n} \{ R_i - R_{n-i+1} / (-1)^n \} / c_6] \Delta P_k \\ &= [(-1)^{2i} (-1)^{n-i+1} \{ R_i - (-1)^n R_{n-i+1} \} / c_6] \Delta P_k \\ &= [(-1)^{n-i+1} \{ R_i - (-1)^n R_{n-i+1} \} / c_6] \Delta P_k \\ &= \Delta Q_{k+i} \end{aligned} \quad (41)$$

となるので,  $\Delta Q_{k-i}$  と  $\Delta Q_{k+i}$  とは  $k$  に関して対称である.

移動した節点に対応する制御点の変動量の大きさ  $|\Delta Q_k|$  に対する, 移動した節点番号の前後の制御点の変動量の大きさ  $|\Delta Q_{k\pm i}| (i=1, 2, \dots)$  の比を考えよう. (式(41)に示すように  $\Delta Q_{k-i}$  と  $\Delta Q_{k+i}$  とは  $k$  に関して対称であることから, ここでは  $\Delta Q_{k-i}$  の場合について考察するものとする.) 式(37), (39), (40)より

$$\begin{aligned} |\Delta Q_{k-i}| / |\Delta Q_k| &= |R_{n-i+1} - (-1)^n R_i| / |R_{n+1}| \\ &= [|(2+\sqrt{3})^{n-i+1} - (2-\sqrt{3})^{n-i+1}| \\ &\quad - (-1)^n \{ (2+\sqrt{3})^i - (2-\sqrt{3})^i \}] / \\ &\quad [|(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}|] \end{aligned}$$

$n \gg i$  のとき  $(2-\sqrt{3})^{n+1}, (2-\sqrt{3})^{n-i+1}, (2-\sqrt{3})^i / (2+\sqrt{3})^{n+1}$  はゼロとみなせるので

$$\approx (2-\sqrt{3})^i$$

この式より, 移動した節点から一つ離れるごとに, 対応する制御点の変動量の大きさ  $|\Delta Q_{k-i}|$  は, ほぼ  $(2-\sqrt{3}) \approx 1/4$  倍されることが分かる. また, 式(37)あるいは式(38)より,  $i$  が一つ変わると  $\Delta Q_{k+i}$  の符号が変化するので, 制御点の変動の向きは交互に逆向きとなっていることが分かる.

#### 4. 例題による曲線への影響の検討

開曲線の場合についてまず考えよう.  $n=12$ , すなわち節点の数が 11 個の場合で, 第 6 番目の節点を動かしたとき, すなわち  $k=6$  のときについて考える. 式(7)~(11)を用いて制御点系列の変動量  $\Delta Q_i$  を計算すれば表 1 (a) に示すとおりとなる. 動かした節点に対応する制御点は, 節点の移動量のほぼ  $\sqrt{3}$  倍同じ向きに動く. 移動節点番号  $k$  以外の制御点の移動量は  $k$  に関してほぼ対称である. また, 移動した節点から一つ離れるごとに, 対応する制御点の変動の大きさは約  $1/4 (\approx 2-\sqrt{3})$  倍され, その動く向きは交互に変

表 1 節点  $P_k$  の移動に伴う制御点系列  $Q_i (i=1, 2, \dots, m)$  の変動 ( $\Delta Q_i = m_i \Delta P_k$  とする.)

- (a) 開曲線の場合 ( $n=12, k=6$  のとき)
- (b) 閉曲線の場合 ( $n=11, k=6$  のとき)

Table 1 Variation of control polygon  $Q_i (i=1, 2, \dots, m)$  with shifting a knot point  $P_k$ .  $\Delta Q_i = m_i \Delta P_k$ .

- (a) In the case of open curve ( $n=12, k=6$ ).
- (b) In the case of closed curve ( $n=11, k=6$ ).

(a)		(b)	
$i$	$m_i$	$i$	$m_i$
1	-0.0018	0	0.0013
2	0.0088	1	-0.0026
3	-0.0333	2	0.0090
4	0.1244	3	-0.0333
5	-0.4643	4	0.1244
6	1.7321	5	-0.4641
7	-0.4641	6	1.7321
8	0.1243		
9	-0.0333		
10	0.0088		
11	-0.0018		

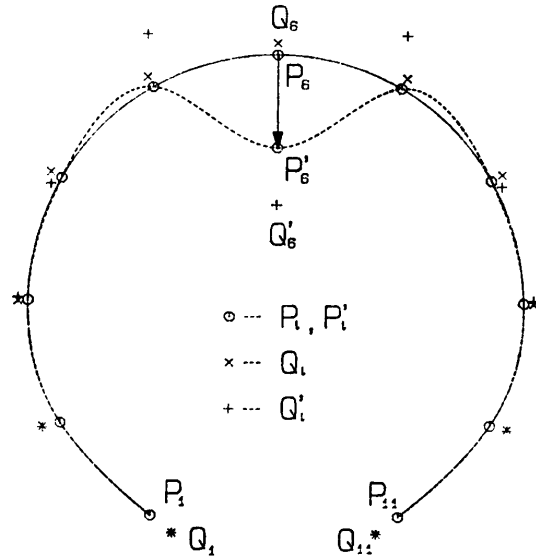


図 2 一つの節点  $P_k$  の移動に伴う 3 次 B スプライン曲線の変化 (開曲線,  $n=12, k=6$ )

Fig. 2 Variation of a cubic B-spline curve with shifting a knot point  $P_k$ . In the case of open curve ( $n=12, k=6$ ).

化する.

図 2 に具体的な曲線を示す. 実線は節点  $P_k (k=6)$  を移動する前のスプライン曲線であり, 破線は移動後のスプライン曲線である. また, 移動前後における制御点  $Q_i$  はそれぞれ  $\times$  と  $+$  とで示されている.

閉曲線の場合について次に考えよう。  $n=11, k=6$  とした場合について考える。先に見たように制御点の変化は、移動した節点に対応する制御点に関して対称であるので、式(37)、式(39)を用いて  $i=0, 1, \dots, 6$  の場合の  $\Delta Q_i$  を計算すると表1(b)に示すとおりとなる。図3に具体的な曲線を示す。閉曲線の場合にも、上の開曲線の場合とほぼ完全に同じことが言える。

さて、節点の移動前後における第  $i$  番目の曲線セグメント  $P_i(t), P'_i(t)$  間の相違量  $D_i$  を

$$D_i = \max_{0 \leq t \leq 1} |P'_i(t) - P_i(t)| / |\Delta P_k|$$

で定義するものとしよう。この相違量  $D_i$  は、第  $k$  番目の節点の移動前後における、第  $i$  番目の曲線セグメント  $P_i(t), P'_i(t)$  上を  $t=0$  から1までたどったとき、両者の間の距離の最大値を第  $k$  番目の節点の移動距離  $|\Delta P_k|$  で正規化した量である。

上の二つの例の場合について相違量  $D_i$  を計算すれば表2(a), (b)のとおりとなる。この閉曲線の例題の場合、制御点系列の変動は移動節点番号  $k$  に関して対称であることから、節点移動に伴う曲線の変動も、 $k$  に関して対称であるので片側半分のみ示した。節点移動前後における各曲線セグメントの相違量  $D_i$  は、 $i$  が移動節点番号  $k$  (上の二つの例題の場合  $k=6$ ) から離れるに従って指数関数的に小さな値になっていくことが分かる。また、開閉いずれの曲線の場合においても、移動した点から数えて三つ目のセグメントでは、相違量  $D_i$  は約4%以下となっている。

### 5. あとがき

ユニフォームな3次式Bスプラインにおいて、節点系列の中の一つを移動したとき、それが制御点系列へ与える影響について考察し、曲線へ与える影響の程度を例題によって検討した。

節点系列の中の一つの点を移動したとき、その影響は制御点系列全体に及ぶ。解析的にその影響について検討した結果、次の三つの点が明らかになった。

i) 移動した節点に対応する制御点の変動は、節点を動かした向きと同じで、その変動量は節点の移動量のほぼ  $\sqrt{3}$  倍である。

ii) 移動節点以外の節点に対応する制御点の変動は、移動節点番号に関して、開曲線の場合にはほぼ対称であり、閉曲線の場合には対称である。

iii) 移動した節点から一つ離れるごとにその節点に対応する制御点の変動量はほぼ  $1/4$  になり、その移動の向きは交互に逆向きとなる。

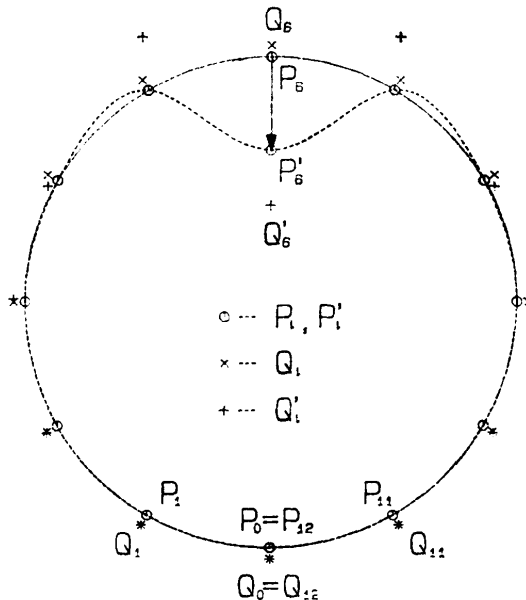


図3 一つの節点  $P_k$  の移動に伴う3次式Bスプライン曲線の変化(閉曲線,  $n=11, k=6$ )

Fig. 3 Variation of a cubic B-spline curve with shifting a knot point  $P_k$ . In the case of closed curve ( $n=11, k=6$ ).

表2 節点  $P_k$  の移動に伴う各曲線セグメントの相違量  $D_i$  の変化

(a) 開曲線の場合 ( $n=12, k=6$ )

(b) 閉曲線の場合 ( $n=11, k=6$ )

Table 2 Variation of the maximum difference  $D_i$  of each segment with shifting a knot point  $P_k$ .

(a) In the case of open curve ( $n=12, k=6$ ).

(b) In the case of closed curve ( $n=11, k=6$ ).

(a)		(b)	
$i$	$D_i$	$i$	$D_i$
1	0.0028	0	0.0006
2	0.0098	1	0.0026
3	0.0367	2	0.0098
4	0.1368	3	0.0367
5	1.0000	4	0.1367
6	1.0000	5	1.0000
7	0.1367		
8	0.0366		
9	0.0099		
10	0.0028		

また、実例について検討した結果、節点移動前後における各曲線セグメントの相違量  $D_i$  は、 $i$  が移動節点番号  $k$  から離れるに従って指数関数的に小さな値になっていくこと、および開閉いずれの曲線の場合にお

いても、移動した点から数えて三つ目の曲線セグメントでは、相違量  $D_i$  は約 4% 以下となっていることが分かった。

### 参考文献

- 1) 佐藤：平面曲線の最適折線近似，信学論 (D)，Vol. J65-D, No. 9, pp. 1145-1150 (1982).
- 2) 名倉：手書き線図形の直線と円弧とによる近似，信学論 (D)，Vol. J64-D, No. 9, pp. 839-845 (1981).
- 3) 山崎，井村：文字輪郭線の円弧と直線とによる近似，情報処理学会論文誌，Vol. 26, No. 4, pp. 726-732 (1985).
- 4) Knuth, D. E.: *TEX and METAFONT*, Digital Press, Massachusetts (1979).
- 5) Mei, T. U.: LCCD: A Language for Chinese Character Design, *Softw. Pract. Exper.*, Vol. 11, pp. 1273-1292 (1981).
- 6) Chen, K. J. and Cheng, K. Y.: A Structured Design Methodology for Chinese Fonts, *Proc. International Conf. on Text Processing '83*, pp. 47-52 (1983).
- 7) 石本，橋本，辻本，有本：修正動的計画法による線図形のスプライン近似，信学論，Vol. J68-D, No. 2, pp. 169-176 (1985).
- 8) 坂元，高木：高品質明朝体ひらがな・カタカナフォントの計算機による生成，信学論，Vol. J68-D, No. 4, pp. 702-709 (1985).
- 9) Gordon, W. J. and Riesenfeld, R. F.: B-Spline Curves and Surfaces, in Barnhill, R. E. and Riesenfeld, R. F. (eds.), *Computer Aided Geometric Design*, pp. 95-126, Academic Press, New York (1974).
- 10) Bartels, R. H., Beatty, J. C. and Barsky, B. A.: An Introduction to the Use of Splines in Computer Graphics, *Siggraph '85*, San Francisco (1985).
- 11) 山口：コンピュータディスプレイによる形状処理工学 [II]，pp. 69-89, 日刊工業新聞社，東京 (1982).

### 付録 1 前進消去後の対角項

与えられる方程式は

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & & & & \\ 0 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_{k-1} \\ \Delta Q_k \\ \Delta Q_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta Q_{n-2} \\ \Delta Q_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である (式 (2)). 前進消去後の対角項  $a'_{ii} (i=1, 2, \dots, n-1)$  は次のような値となる。

$$\begin{cases} a'_{11} = 5/1 \\ a'_{22} = 4 - 1/a'_{11} = 4 - 1/5 = 19/5 \\ a'_{33} = 4 - 1/a'_{22} = 4 - 5/19 = 71/19 \\ a'_{44} = 4 - 1/a'_{33} = 4 - 19/71 = 265/71 \\ a'_{55} = 4 - 1/a'_{44} = 4 - 71/265 = 989/265 \\ a'_{66} = 4 - 1/a'_{55} = 4 - 265/989 = 3691/989 \\ \vdots \end{cases}$$

いま，各対角項の分数を構成する要素の値を  $b_i (i=1, 2, \dots)$  と書くものとしよう。すなわち

$$\{b_i\} = \{1, 5, 19, 71, 265, 989, 3691, \dots\}$$

この数列の隣り合う三つの数の間には次の漸化式が成り立っている。

$$\begin{cases} b_i = 4b_{i-1} - b_{i-2}, \quad i=3, 4, 5, \dots \\ b_1 = 1 \\ b_2 = 5 \end{cases}$$

このことから，数列  $\{b_i\}$  の一般項は

$$b_i = \{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\}^{i-1} + \{(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\}^{i-1} / 2$$

と表される。

したがって，前進消去後の対角項  $a'_{ii} (i=2, 3, \dots, n-1)$  は

$$\begin{cases} a'_{ii} = 4 - b_{i-1}/b_i, \quad i=2, 3, \dots, n-2 \\ a'_{n-1, n-1} = 5 - b_{n-2}/b_{n-1} \end{cases}$$

となり，本文の式 (4)，(5) を得る。

### 付録 2 式 (6) の解

解くべき方程式は

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & & & & & \\ & 19/5 & 1 & & & & & & & & \\ & & 71/19 & 1 & & & & & & & 0 \\ & & & 2+\sqrt{3} & 1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & 2+\sqrt{3} & 1 & & & & \\ 0 & & & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & 2+\sqrt{3} & 1 & & \\ & & & & & & & & & & 3+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \\ \vdots \\ \Delta Q_k \\ \vdots \\ \Delta Q_{n-2} \\ \Delta Q_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \Delta P'_1 \\ \Delta P'_2 \\ \Delta P'_3 \\ \Delta P'_4 \\ \vdots \\ \Delta P'_k \\ \vdots \\ \Delta P'_{n-2} \\ \Delta P'_{n-1} \end{bmatrix}$$



ただし

$$\begin{cases} \Delta P'_i = 0, & i=1, 2, \dots, k-1 \\ \Delta P'_i = (2-\sqrt{3})^{i-k} \Delta P_k, & i=k, k+1, \dots, n-1 \end{cases}$$

後退代入によって最下行から次々に解を求めれば

$$\begin{cases} \Delta Q_{n-1} = (6/a'_{n-1, n-1}) \Delta P'_{n-1} \\ \quad = -c_1 (\sqrt{3}-2)^{n-k} \Delta P_k \\ \Delta Q_{n-2} = -c_2 (\sqrt{3}-2)^{n-k-1} \Delta P_k \\ \Delta Q_{n-3} = -c_3 (\sqrt{3}-2)^{n-k-2} \Delta P_k \\ \quad \vdots \\ \Delta Q_{n-i} = -c_i (\sqrt{3}-2)^{n-k-i+1} \Delta P_k \\ \quad \vdots \\ \Delta Q_k = (2-\sqrt{3}) \{6 + (7-4\sqrt{3})c_{n-k}\} \Delta P_k \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

ただし

$$\begin{cases} c_1 = 3 + \sqrt{3} \\ c_2 = 6 + (7-4\sqrt{3})c_1 \\ c_3 = 6 + (7-4\sqrt{3})c_2 \\ \quad \vdots \\ c_i = 6 + (7-4\sqrt{3})c_{i-1} \\ \quad \vdots \\ c_{n-k} = 6 + (7-4\sqrt{3})c_{n-k-1} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

となる。

式(A.2)の第2式を第3式へ、第3式を第4式へと逐次代入していけば

$$c_i = 6 \{1 + (7-4\sqrt{3}) + (7-4\sqrt{3})^2 + \dots + (7-4\sqrt{3})^{i-2} + (7-4\sqrt{3})^{i-1}\} c_1$$

となり、この式の右辺第1項の{ }の中は等比級数となっていることから

$$c_i = (3+2\sqrt{3}) \{1 - (7-4\sqrt{3})^{i-1}\} + (7-4\sqrt{3})^{i-1} c_1$$

となる。さらに、式(A.2)の第1式を代入して整理すれば

$$c_i = \sqrt{3} \{ \sqrt{3} + 2 - (7-4\sqrt{3})^{i-1} \}, \\ i=1, 2, \dots, n-k$$

となる。

したがって、式(A.1)は次の形に表される。

$$\begin{aligned} \Delta Q_{n-i} &= -\sqrt{3} (\sqrt{3}-2)^{n-k-i+1} \\ &\quad \cdot \{ \sqrt{3} + 2 - (7-4\sqrt{3})^{i-1} \} \Delta P_k, \\ i &= 1, 2, \dots, n-k \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

次に  $\Delta Q_{k-1}, \Delta Q_{k-2}, \dots, \Delta Q_1$  を求めよう。

$$\Delta P'_{k-i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, k-1$$

であるから

$$\begin{cases} \Delta Q_{k-1} = (-1/a'_{k-1, k-1}) \Delta Q_k \\ \quad = (\sqrt{3}-2) \Delta Q_k \\ \Delta Q_{k-2} = (-1/a'_{k-2, k-2}) \Delta Q_{k-1} \\ \quad = (\sqrt{3}-2)^2 \Delta Q_k \\ \quad \vdots \\ \Delta Q_k = (\sqrt{3}-2)^{k-4} \Delta Q_k \\ \Delta Q_3 = (-19/71) (\sqrt{3}-2)^{k-4} \Delta Q_k \\ \Delta Q_2 = (5/71) (\sqrt{3}-2)^{k-4} \Delta Q_k \\ \Delta Q_1 = (-1/71) (\sqrt{3}-2)^{k-4} \Delta Q_k \end{cases}$$

となる。

ここで、 $\Delta Q_k$  は式(A.3)で  $i=n-k$  とおいたもので、

$$\Delta Q_k = -\sqrt{3} (\sqrt{3}-2) \{ \sqrt{3} + 2 - (7-4\sqrt{3})^{n-k-1} \} \Delta P_k$$

である。

以上をまとめると本文中の式(7)~(11)を得る。

(昭和61年8月18日受付)

(昭和61年12月10日採録)



山崎 一生 (正会員)

昭和36年電気通信大学電波工学科卒業。同年通産省電気試験所(現電子技術総合研究所)入所。文字認識、印字品質評価等の研究に従事。

昭和54年新潟大学教授(工学部情報工学科)。文字と言葉とに興味をもっている。工学博士(東京工業大学)。電子情報通信学会、計測自動制御学会、自動制御協会各会員。



相澤 誠

昭和61年新潟大学工学部情報工学科卒業。同年ソニー(株)に入社。

現在ソニー・マグネ・プロダクツにおいてAVヘッド関係の仕事に従事。電子情報通信学会準会員。