Vol. 28 No. 5 情報処理学会論文誌 May 1987

交代級数の漸近展開と加速法†

長田 直樹††

ある種の条件を満たす関数 $f(x)$ により，第 i 項が $(-1)^{i-1}f(i)$ と表される交代級数の部分和 S_n の漸近展開を表す3つの型の公式を述べる．① 漸近列 $\{f'(n), f^{(3)}(n), \cdots, f^{(2j-1)}(n), \cdots\}$ に関する展開公式．② $f(x)$ が Sidi の意味での $A^{(\gamma)}$ に属すとき，$f(x)$ の漸近展開の係数から，$S_n-S\sim(-1)^{n-1}n^{\gamma}\sum c_jn^{-j}$ の型の展開係数 c_j を求める公式．③ 中心差分を用いた公式．さらに，②の例として，典型的な交代級数の γ と c_j を示す．また，③の公式を交代級数の加速法に適用し，有効性を数値例により確かめる．

1. はじめに

交代級数の和を数値計算する公式の一つに

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}f(i)\sim\frac{1}{2}f(1)-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}(2^{2j}-1)}{(2j)!}f^{(2j-1)}(1) \qquad (1.1)$$

がある［文献1) p. 205, 2) p. 172, 3) p. 309を参照］．ここで B_{2j} は Bernoulli 数である．(1.1)の右辺は，必ずしも収束するとは限らないが，最初の項数までの和は急速に収束するので，適当な項で打ち切ることにより，十分よい近似値が得られることが多い．しかし，文献1)-3) などでは，上記(1.1)式を $f(x)$ の条件を明示することなく，演算子を用いて導き出しているだけで，厳密な証明はされていない．

最近 G. E. Bell と G. M. Phillips は，Euler-Maclaulin の公式を用いて，$f(x)$ がある種の条件を満たすとき，(1.1)の特別な場合である次の漸近公式

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{i-1}f(i)=(-1)^n\left\{\frac{1}{2}f(n)+\frac{1}{4}f'(n)\right\}+O(f^{(3)}(n)) \qquad (1.2)$$

を証明した[4]．この公式は Aitken 加速などの誤差解析には有力であるが，精度がさほど良くないので実際の数値計算には余り役に立たない．

そこで本論文では，ある種の交代級数に対し，(1.1)に相当する漸近展開

$$S_n-S\sim(-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{2}f(n)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}(2^{2j}-1)}{(2j)!}f^{(2j-1)}(n)\right\} \quad (n\to\infty) \qquad (1.3)$$

が成り立つことを証明する．ここで

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}f(i), \quad S_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f(i)$$

である．(1.3)は(1.2)の拡張になっている．

次いで，(1.3)の応用として2つのことを取り上げる．

第一には，

$$S_n-S\sim(-1)^{n-1}n^{\gamma}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{c_j}{n^j} \quad (n\to\infty) \qquad (1.4)$$

の型の漸近展開が成立するための十分条件を示し，c_j を求める公式を与える．(1.4)の型の漸近展開を得る方法としては，誤差項を積分表示しそれに部分積分法を適用する方法[5]も知られているが，かなり技巧を要する．それに対し，本論文で示す公式は $f(x)$ の漸近展開を求めることを除いては，汎用的方法であり，計算機向きの算法と言える．

第二は，交代級数の新しい加速法への応用である：漸近展開(1.3)は高階微分を用いるので数値計算には適さないが，微分を差分に置き換えることにより交代級数に対する加速法が得られる．この加速法は，数値実験によれば許容誤差が $10^{-3}\sim10^{-10}$ のときには，交代級数の加速法として定評のある Levin の u 変換よりも少ない項数で所定の精度が達成される．したがって，$f(n)$, $f(n\pm1/2)$, $f(n\pm1/4)$ の値が容易に計算できる場合には，有力な加速法と言えよう．

数値計算はすべて NEC のパーソナル・コンピュータ PC-9801 VM による．精度は10進相当16桁強，使用言語は N_{88}-BASIC (86) である．

2. 交代級数の漸近展開

定理1では，Bernoulli 数と完全単調関数が必要となるので，まずこれらについて述べる．

本論文では，**Bernoulli 数** $B_i\,(i=0,1,\cdots)$ は，

---

† Asymptotic Expansions and Acceleration Methods for Alternating Series by NAOKI OSADA (General Education, Nagasaki Institute of Applied Science).

†† 長崎総合科学大学一般教育

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i$$

と定義する．このとき

$B_0=1,\ B_1=-1/2,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,$
$B_6=1/42,\ B_8=-1/30,\ B_{10}=5/66,$
$B_{12}=-691/2730,\ B_{14}=7/6$

となり，一般に

$B_{2i+1}=0,\ (-1)^{i-1}B_{2i}>0\quad(i=1,2,\cdots)$

が成り立つ．

また，関数 $f(x)$ が区間 (a,∞) で**完全単調**であるとは，次の3条件

（1） 区間 $(a,\infty)\,(a>0)$ で C^∞ 級

（2） $f(x)\to 0\quad(x\to\infty)$

（3） $(-1)^r f^{(r)}(x)>0\quad(x>a;\ r=0,1,\cdots)$

が成り立つとき言う［これについては文献6）に詳しく述べられている］．

区間 (a,∞) で完全単調な関数 $f(x)$ に対し，

（4） $f^{(r+1)}(x)/f^{(r)}(x)\to 0\quad(x\to\infty;\ r=0,1,\cdots)$

が成り立つとき，$f(x)$ は区間 (a,∞) で**性質 (C) を満たす**と定義する．

また，条件(2)，(3)，(4)から，

（5） $f^{(r)}(x)\to 0\quad(x\to\infty;\ r=1,2,\cdots)$

が数学的帰納法により容易に導かれる．

なお，条件(1)，(2)，(3)，(5)を満たしても(4)を満たすとは限らない．$f(x)=e^{-cx}\,(c>0)$ が反例となる．

以上の概念を使って，以下の定理を得る．

定理 1 関数 $f(x)$ が，区間 (a,∞) で性質 (C) を満たしていれば，$n\to\infty$ のとき漸近展開

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}f(n+i-1)\sim\frac{1}{2}f(n)-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}(2^{2j}-1)}{(2j)!}f^{(2j-1)}(n)\qquad(2.1)$$

が成立する．

証明 自然数 $l,m,n\,(n>a)$ をとる．Euler-Maclaulin の公式から

$$\sum_{i=1}^{2m+1}(-1)^{i-1}f(n+i-1)=\frac{1}{2}[f(n)+f(n+2m)]+\sum_{j=1}^{l}\frac{B_{2j}(2^{2j}-1)}{(2j)!}[f^{(2j-1)}(n+2m)-f^{(2j-1)}(n)]+R_{m,l}\qquad(2.2)$$

が導ける［文献7）p.36にある．証明の方針は文献8）p.140演習2）を見よ］．剰余項は，

$$|R_{m,l}|\leqq\frac{4e^{2\pi}(2^{2l+1}+1)}{(2\pi)^{2l+1}}\int_n^{n+2m}|f^{(2l+1)}(x)|\,\mathrm{d}x\qquad(2.3)$$

を満たしている[7),8)]．

条件（3）より，$f^{(2l+1)}(x)<0\,(x>a)$ だから

$$|R_{m,l}|\leqq\frac{4e^{2\pi}(2^{2l+1}+1)}{(2\pi)^{2l+1}}[f^{(2l)}(n)-f^{(2l)}(n+2m)].\qquad(2.4)$$

そこで，$m\to\infty$ とすると，(2.2)の左辺の級数は収束し $f(n+2m)\to 0$, $f^{(2j-1)}(n+2m)\to 0$ だから

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}f(n+i-1)=\frac{1}{2}f(n)-\sum_{j=1}^{l}\frac{B_{2j}(2^{2j}-1)}{(2j)!}f^{(2j-1)}(n)+R_l\qquad(2.5)$$

となる．剰余項は(2.4)と条件(4)より

$$R_l=o(f^{(2l-1)}(n))\quad(n\to\infty).\qquad(2.6)$$

(2.5)，(2.6)と条件(4)より，(2.1)が得られる．

証明終．

定理 2 交代級数が，区間 $(a,\infty)\,(a>0)$ で性質 (C) を満たす関数 $f(x)$ によって

$$S=f(1)-f(2)+f(3)-\cdots+(-1)^{n-1}f(n)+\cdots$$

と表されるとき部分和を S_n とすれば，漸近展開

$$S_n-S\sim(-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{2}f(n)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}(2^{2j}-1)}{(2j)!}f^{(2j-1)}(n)\right\}\quad(n\to\infty)\qquad(2.7)$$

が成立する．

証明

$$S_n-S=(-1)^{n-1}f(n)+(-1)^n\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}f(n+i-1)\qquad(2.8)$$

に定理1を用いれば求める結果が得られる． 証明終．

定理 3 性質 (C) を満たす関数 $f(x)$ が，さらに次の2条件

（i） $f(x)\sim x^\gamma\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j}{x^j}\quad(x\to\infty)\qquad(2.9)$

（ii） 高階微分 $f^{(r)}(x)\,(r=1,2,\cdots)$ は，(2.9)を形式的に項別微分した形に漸近展開される．

を満たしているものとする．このとき

$$c_j=\frac{1}{2}a_j+\sum_{k=1}^{k_e}\frac{B_{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}a_{j+1-2k}(\gamma-j-1+2k)\cdots(\gamma-j+1)\qquad(2.10)$$

とおくと，部分和 S_n の誤差は，

$$S_n-S\sim(-1)^{n-1}n^{\gamma}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{c_j}{n^j}\quad(n\to\infty)\tag{2.11}$$

と漸近展開される．ここで $ke=\lfloor(j+1)/2\rfloor$ は j が偶数のとき $j/2$, j が奇数のときは $(j+1)/2$ を表す．

証明　条件(ⅰ),(ⅱ)より

$$f^{(2k-1)}(x)\sim\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\gamma-m)(\gamma-m-1)\cdots(\gamma-m-2k+2)x^{\gamma-m-2k+1}\tag{2.12}$$

となる．(2.9), (2.12)を(2.7)に代入し，$(-1)^{n-1}n^{\gamma-j}$ の係数 c_j を求めると，

$$c_j=\frac{1}{2}a_j+\sum_{k,m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2^{2k}-1)a_m(\gamma-m)\cdots(\gamma-m-2k+2)\tag{2.13}$$

となる．ここで(2.13)の右辺は

$$k\geqq1,\ m\geqq0,\ m+2k-1=j\tag{2.14}$$

を満たす整数 k, m 全体の和をとる．(2.14)を満たす k は $1,2,\cdots,\lfloor(j+1)/2\rfloor$ に限るので，求める結果が得られる．　証明終．

定理3の2条件(ⅰ),(ⅱ)を満たす C^{∞} 級関数の族は，A. Sidi によって $A^{(\gamma)}$ と呼ばれている[9]．

3. 交代級数の漸近展開の例

定理2あるいは定理3を用いることにより，典型的な交代級数に対する(1.4)の型の漸近展開が得られる．

例 1　定理2において $f(x)=1/x$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}\sim\log 2+(-1)^n\left\{\frac{B_1}{n}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}(2^{2j}-1)}{(2j)n^{2j}}\right\}\tag{3.1}$$

が得られる．右辺の最初の5項は

$$\log 2+(-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{8n^4}-\frac{1}{4n^6}+\frac{17}{16n^8}+O\left(\frac{1}{n^{10}}\right)\right\}\tag{3.2}$$

となる．なお，(3.1)は文献10) p. 555 にある

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)}\sim\frac{1}{2x}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n-1}{nx^n}B_n\quad(x\to\infty)$$

からも容易に導かれる．

例 2　$\dfrac{\pi}{4}=\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{i-1}}{2i-1}$　(Leibniz 級数)

を考える．

$$\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{2x}\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2x)^j}\right\}\quad\left(|x|>\frac{1}{2}\right)$$

より，$f(x)=1/(2x-1)$ は定理3の条件(ⅰ),(ⅱ)を満たす．定理3において

$$f(x)=1/(2x-1),\ \gamma=-1,\ a_j=2^{-j-1}$$

とおき，(2.10)式により c_j を求めると

$$c_0=1/4,\ c_1=0,\ c_2=-1/16,\ c_3=0,\ c_4=5/64,$$
$$c_5=0,\ c_6=-61/256,\ c_7=0,\ c_8=1385/1024$$

となる．

さらに，

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{1}{i^{\alpha}}\quad(\alpha>0,\ \alpha\neq1)$$

に対しては，$f(x)=x^{-\alpha}$ とおき例1と同様の方法で求められる．また，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^{\alpha}}\quad(\alpha>0,\ \alpha\neq1)$$

に対しても，$f(x)=(2x-1)^{-\alpha}$ とおくと例2と同様の方法が適用できる．

4. 誤差項の中心差分による表示

定理2で与えた部分和の誤差項は，$f(x)$ の奇数階の導関数を用いて表され，中心差分の Taylor 展開

$$f(n+h)-f(n-h)=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{h^{2j-1}}{(2j-1)!}f^{(2j-1)}(n)\tag{4.1}$$

も奇数階の導関数により表される．そこで自然数 l と

$$n>h_1>h_2>\cdots>h_l>0\tag{4.2}$$

に対し，

$$\sum_{k=1}^{l}c_k[f(n+h_k)-f(n-h_k)]=\sum_{j=1}^{l}\frac{B_{2j}(2^{2j}-1)}{(2j)!}f^{(2j-1)}(n)+O(f^{(2l+1)}(n))\tag{4.3}$$

を満たす $c_k\,(k=1,\cdots,l)$ が求められれば，(4.3)の右辺の第 l 項までを左辺の中心差分で置き換えることができる．したがって，(4.1)を(4.3)の左辺に代入し，$f^{(2j-1)}(n)/(2j-1)!$ の係数を等値すると，$c_1,\cdots,c_l$ に関する l 元連立一次方程式

$$2\sum_{k=1}^{l}c_kh_k^{2j-1}=\frac{B_{2j}}{2j}(2^{2j}-1)\qquad j=1,\cdots,l\tag{4.4}$$

が得られる．(4.4)の解は，(4.3)を満たしている．

l および $h_1,\cdots,h_l$ は種々考えられるが，ここでは，**表1**のようにとる．(4.4)の解も表1に与えておく．

定理 4　関数 $f(x)$, 交代級数 S, 部分和 S_n は定理2と同じものとする．$h_k, c_k\,(k=1,\cdots,l)$ を表1によって与えると，部分和の誤差は，

$$S_n-S=(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{2}f(n)\right.$$

表 1 中心差分の刻み幅と係数

Table 1 Interval lengths and coefficients of central differences in (4.3).

l	k	hk	ck
1	1	1	0.125
2	1	2	-0.03125
	2	1	0.1875
3	1	2	0.0104166666666666667
	2	1	-0.2291666666666666667
	3	0.5	0.6666666666666666667
4	1	2	-0.03125
	2	1.5	0.25
	3	1	-0.8125
	4	0.5	1.25
5	1	2	0.04017857142857142857
	2	1.5	-0.52142857142857142857
	3	1	3.3875
	4	0.5	-19.75
	5	0.25	29.257142857142857143
6	1	2	-0.11696428571428571429
	2	1.5	2.9357142857142857143
	3	1	-69.2125
	4	0.75	281.6
	5	0.5	-527.95
	6	0.25	471.77142857142857143
7	1	2	0.75446428571428571429
	2	1.5	-65.035714285714285714
	3	1.25	488
	4	1	-1813.8125
	5	0.75	4088
	6	0.5	-5761.75
	7	0.25	4459.4285714285714286
8	1	2	-18.03125
	2	1.75	283
	3	1.5	-1755.75
	4	1.25	7063
	5	1	-18908.8125
	6	0.75	34859
	7	0.5	-43370.75
	8	0.25	31323

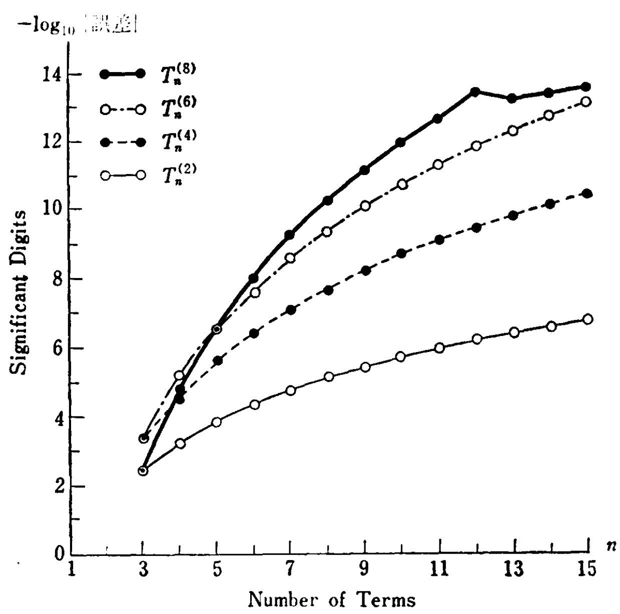


図 1 $T_n^{(l)}$ の有効桁数

Fig. 1 Application of $T_n^{(l)}$ defined by (4.6) to $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}$.

$$+\sum_{k=1}^{l} c_k\{f(n+h_k)-f(n-h_k)\}\Bigg]$$
$$+O(f^{(2l+1)}(n)) \tag{4.5}$$

と表せる．

$c_k, h_k\,(k=1,\cdots,l)$ を表 1 によって与え，$T_n^{(l)}$ を

$$T_n^{(l)}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f(i)+(-1)^n\Bigg[\frac{1}{2}f(n)$$
$$+\sum_{k=1}^{l} c_k\{f(n+h_k)-f(n-h_k)\}\Bigg] \tag{4.6}$$

と定義すれば，交代級数に対する一つの加速法が得られる．とくに，$f(x)$ が性質 (C) を満たすときは，

$$T_n^{(l)}-S=O(f^{(2l+1)}(n)) \quad (n\to\infty) \tag{4.7}$$

となる．

5. 数 値 例

前章で定義した加速法の有効性を調べるため，例 1 の

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}=\log 2$$

を用いて数値計算を行ってみる．$T_n^{(l)}(l=2,4,6,8:n=3,\cdots,15)$ の有効桁数 $(=-\log_{10}|$誤差$|)$ を図 1 に示す．

$l=2,4,6\,(3\leqq n\leqq 15)$ では，順調な加速が行われている．$l=8$ でも，$n\leqq 12$ のときは，順調である．

加速は，漸近展開 (3.1) を用いても可能である：

$$V_n^{(l)}\sim\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}+(-1)^{n-1}\Bigg\{\frac{B_1}{n}$$
$$+\sum_{j=1}^{l}\frac{B_{2j}(2^{2j}-1)}{(2j)n^{2j}}\Bigg\} \tag{5.1}$$

とおき，$V_n^{(l)}\,(l=2,4,6,8:n=3,\cdots,15)$ の有効桁数を図 2 に示す．図 1 と図 2 より，$V_n^{(8)}$ と $T_n^{(8)}$，および $V_n^{(6)}$ と $T_n^{(6)}$ がそれぞれ同程度の精度を持っていることが分かる．このことは，

$$T_n^{(l)}-S=O(f^{(2l+1)}(n))=O(n^{-2l-2}) \quad (n\to\infty)$$
$$V_n^{(l)}-S=O(n^{-2l-2}) \quad (n\to\infty)$$

から説明できる．

なお，$T_{10}^{(8)}-\log 2$ は 10^{-12} 程度であるが，

$$S_{10}-\log 2+\frac{1}{2}f(10)$$
$$+\sum_{j=1}^{7}c_j[f(10+h_j)-f(10-h_j)]$$
$$=156.7129455909954$$
$$c_8[f(10.25)-f(9.75)]=-156.7129455909944$$

より，約 14 桁の桁落ちが生じている．10 進 16 桁

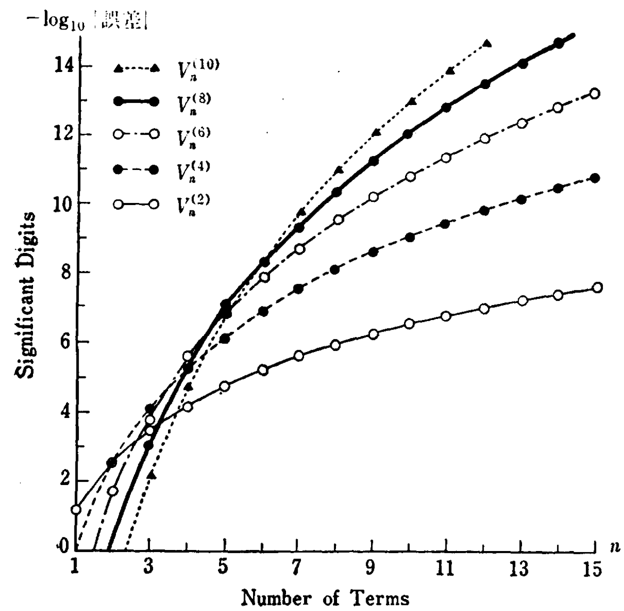


図 2 $V^{(l)}_n$ の有効桁数

Fig. 2 Performance of $V^{(l)}_n$ defined by (5.1) on $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}$.

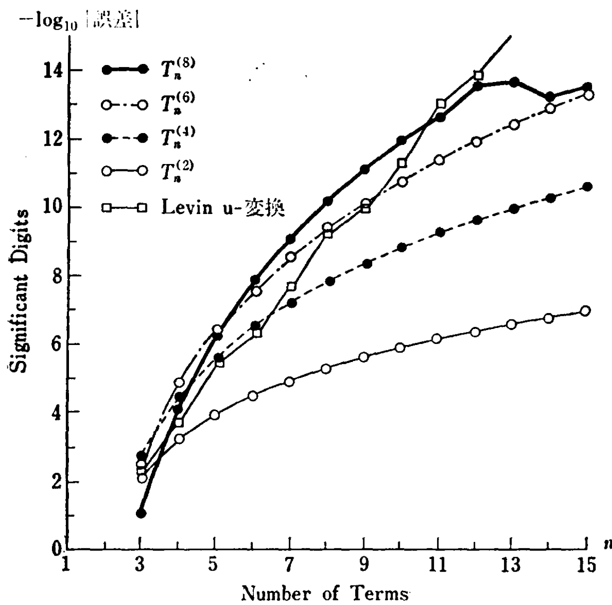


図 3 表 2 の 5 問に対する $T^{(l)}_n$ の平均有効桁数

Fig. 3 Performance of $T^{(l)}_n$ defined by (4.6) on alternating series, averaged over Smith-Ford's test problems.

強で計算しているのだから，$T^{(8)}_{10}-\log 2$ の有効数字はせいぜい 2 桁ということになる．さらに，$T^{(8)}_{12}$ では

$$S_{12}-\log 2+\frac{1}{2}f(12)$$

$$+\sum_{j=1}^{7}c_j[f(12+h_j)-f(12-h_j)]$$

$$=108.8076422058185$$

$$c_8[f(12.25)-f(11.75)]$$

$$=-108.8076422058185$$

となり，$T^{(8)}_{12}-\log 2$ の有効数字はなくなる．

以上のような桁落ちのため $T^{(8)}_n$ のグラフは，$n\geqq 12$ で不自然な形となっている．

一方，$T^{(6)}_n$ の場合，$c_j[f(n+h_j)-f(n-h_j)]$ は余り大きくならないので，$T^{(6)}_n$ の有効数字と，桁落ちの数がほぼ一致し，グラフは自然な形となる．ちなみに $T^{(6)}_{12}, T^{(6)}_{15}, T^{(6)}_{18}$ の誤差の絶対値は，それぞれ 1.7×10^{-12}, 7.4×10^{-14}, 6.1×10^{-15} となる．

$T^{(l)}_n$ の有効性を調べるため，**表 2** に示した Smith と Ford による問題[11] を適用してみる．なお，問題 4 と問題 5 の 2 項係数はガンマ関数を用いて

$$(-1)^{n-1}\binom{-\frac{1}{2}}{n-1}=\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!}=\frac{\Gamma(n-1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}$$

と表す．

表 2 の 5 問に $T^{(l)}_n$ $(l=2,4,6,8:n=3,\cdots,15)$ を適用した際の有効桁数の平均値を**図 3** に示す．Smith と Ford が調べた交代級数の加速法の中では Levin の u 変換が最良であった[11),12)]ので，比較のため Levin-u 変換の有効桁数も図 3 に載せた．

表 2 交代級数に対するテスト問題

Table 2 Smith-Ford's test problems for alternating series.

No.	a_n	$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$
1	$1/n$	$\log 2$
2	$1/(2n-1)$	$\pi/4$
3	$1/\sqrt{n}$	$(1-\sqrt{2})\zeta(1/2)$
4	$\binom{-\frac{1}{2}}{n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$	$2(\sqrt{2}-1)$
5	$\binom{-\frac{1}{2}}{n-1}^2$	$\Gamma(1/4)^2/(2\pi)^{3/2}$

$T_n^{(8)}$ は $n=3,\cdots,10$ においては Levin-u 変換よりも精度が良いことが見て取れる．なお，$n=12$ 付近で $T_n^{(8)}$ のグラフが歪んでいるのは，問題1についてみたように，桁落ちが原因である．

6. おわりに

本論文では，交代級数の部分和の誤差の漸近展開を求める3通りの公式を示した．

① $f(x)$ の高階微分による漸近公式（定理2）：この公式は，(1.1)を厳密に定式化したものである．

② $f(x)$ の漸近展開から，(1.4)の型の漸近展開の係数を求める公式（定理3）：この公式により(1.4)の型の漸近展開が，計算機により自動的に求められ交代級数の加速法の誤差解析などに利用できる[13]．

③ $f(x)$ の中心差分を用いる近似式（定理4）：これは，交代級数の加速法に適用でき $f(n)$，$f(n\pm1/2)$，$f(n\pm1/4)$ が計算できる場合には，効率の良い加速法となる．

今後の課題としては，$T_n^{(l)}$ に関し，

Ⅰ．最適な標本数 l と刻み幅 h_l を見つけること

Ⅱ．半無限振動積分への適用

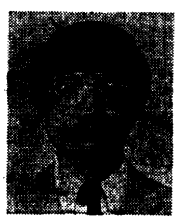
などが考えられる．

謝辞 有益な助言を頂いた査読者に感謝します．

参考文献

1) Hildebrand, F. B.: *Introduction to Numerical Analysis* (2nd ed.), McGraw-Hill, New York (1974).
2) 赤坂 隆：数値計算，コロナ社，東京 (1967).
3) Fröberg, C. E.: *Numerical Mathematics*, Benjamin, Menlo Park (1985).
4) Bell, G. E. and Phillips, G. M.: *Aitken Acceleration of Some Alternating Series*, *BIT*, Vol. 24, pp. 70-77 (1984).
5) 一松 信：教室に電卓を！ Ⅲ，海鳴社，東京 (1986).
6) Widder, D. V.: *The Laplace Transform*, Princeton Univ. Press, New Jersey (1946).
7) 森口繁一，宇田川銈久，一松 信：数学公式Ⅱ，岩波書店，東京 (1957).
8) ブルバキ：数学原論，実一変数関数（基礎理論）2，東京図書，東京 (1969).
9) Sidi, A.: Some Properties of a Generalization of the Richardson Extrapolation Process, *J. Inst. Math. Applies*, Vol. 24, pp. 327-346 (1979).
10) Knopp, K.: *Theory and Application of Infinite Series* (2nd English ed.), Blackie and Son, London and Glasgow (1951).
11) Smith, D. A. and Ford, W. F.: Acceleration of Linear and Logarithmic Convergence, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 16, No. 2, pp. 223-240 (1979).
12) Smith, D. A. and Ford, W. F.: Numerical Comparisons of Nonlinear Convergence Accelerators, *Math. Comp.*, Vol. 38, No. 158, pp. 481-499 (1982).
13) 室田一雄，杉原正顕：Aitken 加速に関する一つの注意，情報処理学会論文誌，Vol. 25, No. 5, pp. 892-894 (1984).

（昭和61年11月20日受付）
（昭和62年2月12日採録）



長田 直樹（正会員）

1948年生．1971年大阪大学理学部数学科卒業．1974年大阪大学大学院理学研究科修士課程修了．同年長崎総合科学大学工学部管理工学科助手．現在，長崎総合科学大学工学部一般教育等助教授．数値積分や加速法に興味を持つ．日本数学会会員．