

簡便法による分散計算の誤差†

星 守††

1パスで分散を計算する方法としてよく用いられている簡便法： $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2$ の第1項（2乗和の平均）と第2項（平均の2乗）の累積誤差の振舞いを解析し、シミュレーション実験によって解析結果を確かめた。ただし、 n 個のデータは平均 μ 、分散 σ^2 の同一分布からの独立標本であるとみなし、計算は M 進 L 桁の浮動小数演算によるものとした。 n_1 番目のデータのときに $\sum x_i^2$ の指数部が1増加したとすると、 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ の累積誤差は次式で記述される（切り捨て、丸めの場合をそれぞれ EV , EVR と記す）： $\frac{EV}{n(\mu^2 + \sigma^2)} \doteq -\frac{n_1}{n}$
 $\times \left\{1 - \left(1 - \frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n}\right)\right\} M^{-L}$, $\frac{EVR}{\sqrt{n(\mu^2 + \sigma^2)}} \doteq \frac{n_1}{n} \sqrt{\frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n} + 1 - \frac{n_1}{n}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} M^{L-1}$ ただし $n_1 \leq n < n_1 M$. n_1 番目のデータを加えたときに $\sum x_i$ の指数部が1増加したとすると、 $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2$ の累積誤差は次式で記述される（切り捨て、丸めの場合をそれぞれ ET , ETR と記す）： $\frac{ET}{n\mu^2} \doteq -2 \frac{n_1}{n} \left\{1 - \left(1 - \frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n}\right)\right\} M^{-L}$, $\frac{|ETR|}{\sqrt{n\mu^2}} \doteq 2 \frac{n_1}{n}$
 $\times \sqrt{\frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n} + 1 - \frac{n_1}{n}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} M^{L-1}$ ただし $n_1 \leq n < n_1 M$.

1. はじめに

基本統計量である標本分散（以下では分散とよぶ）の計算法には、計算が2パスとなる定義式、1パスですむ簡便法 (textbook algorithm), 仮平均法, 逐次法など様々な算法が提案され (表1参照), それらの算法における誤差の (漸近的) 上界やシミュレーションによる比較実験などが報告されている。たとえば, 文献1), 2) では計算機の誤差単位 η , データ数 n と “データの条件数” κ ($\kappa = \sqrt{1 + \bar{x}N / \sum (x_i - \bar{x})^2}$) による分散の相対誤差の上界がいくつかの算法に対して与えられている。また文献2), 4), 6) では, 各種算法の比較実験結果, 算法の選び方, 変動係数の重要性などが述べられている。

本報告では, データが母平均 μ , 母分散 σ^2 の同一分布からの独立標本であるとして, M 進 L 桁の浮動小数演算で計算するときの簡便法における累積誤差の振舞いを解析し, シミュレーションによって解析結果を実験的に確かめた。

2. 誤差評価

予備実験として, 正規乱数データを用いて $S^2 = \frac{1}{n}$

$\times \sum x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum x_i\right)^2$ を単精度で計算するとともに,

第1項2乗和の平均 (第2項平均の2乗) の振舞いを調べるために, 第1項を単精度 (倍精度), 第2項を倍精度 (単精度) で計算した。その結果, (a) S^2 は振動しながら振幅が大きくなる (図1参照), (b) 振動の山の点は $\sum x_i^2$ の指数部が1増加する点で第1項の誤差が大きくなっている点である, (c) 振動の谷の点は $\sum x_i$ の指数部が1増加する点で第2項の誤差が大きくなっている点である。(d) 山 (谷) の位置は前の山 (谷) の約16倍の位置であることなどが観察された。(計算は HITAC M-180, FORTRAN, 16進浮動小数による。) これらのことを手掛りに以下のような解析を行った。

2.1 準備

以下の解析で用いる基礎的命題を述べる。これらは数値解析および確率・統計でよく知られていることである (例えば文献5) 参照)。

以下では M 進 L 桁の浮動小数演算を用いるものとする。誤差の単位は $\eta = \gamma \times M^{L-1}$ ($\gamma = 0.5$: $M/2 - 1$ 捨 $M/2$ 入; $\gamma = 1$: 切り捨て, 切り上げ) である。実数 x の計算機内での値を $fl(x)$, 指数部が d , 仮数部が m ($0 < m < 1$) である数 x を $x = M^d(m)$ と記す。

命題1 (局所丸め誤差)

$$fl(x \pm y) = (x \pm y) + \max\{|x|, |y|, |x \pm y|\} \cdot \theta_1$$

$$fl(x \div y) = (x \div y)(1 + \theta_2) \quad (1)$$

† Error Analysis of the “Textbook One-Pass Algorithm” for Computing the Sample Variance by MAMORU HOSHI (Faculty of Engineering, Chiba University).

†† 千葉大学工学部

表 1 分散の計算方法

Table 1 Four algorithms for computing variance.

定義式	簡便法
Two-Pass Algorithm, Definition	Textbook Algorithm, Desk Calculator Method
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$
仮平均法	逐次法
Trial Mean Algorithm	West's Algorithm
$d_i = x_i - x_1$	$\bar{x}_j = \bar{x}_{j-1} + (x_j - \bar{x}_{j-1})/j$
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i + x_1$	$\bar{x} = \bar{x}_n$
$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2 - \bar{d}^2$	$T_1 = 0$
	$T_k = T_{k-1} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \times (x_k - \bar{x}_{k-1})^2$
	$\sigma^2 = T_n$

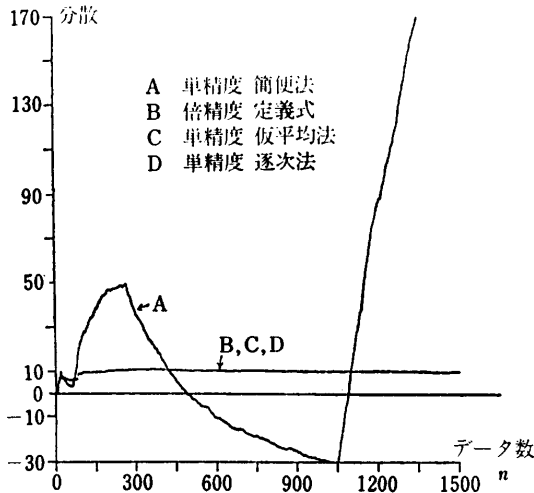


図 1 分散の計算方法の比較 (データ数 1500)

Fig. 1 Comparison of algorithms for computing variances (on data set of 1500 random numbers generated from normal distribution $N(1000, 10)$).

ただし $|\theta_1|, |\theta_2| \leq \eta$

命題 2 (累積丸め誤差)

$$S = \sum_{i=1}^n x_i, S_0 = 0, S_k = fl(S_{k-1} + x_k),$$

$$(k=1, \dots, n)$$

とする。このとき累積丸め誤差 $\Delta S_n (\equiv S_n - S)$ は

$$\Delta S_n = \sum_{i=1}^n e_i \quad (2)$$

で与えられる。ただし、 e_i は S_i を求めたときの局所丸め誤差である。

さらに、 e_i が独立な確率変数で、その期待値と分散がそれぞれ $E(e_i) = \mu_i, V(e_i) = \sigma_i^2$ とすると、

$$E(\Delta S_n) = \sum \mu_i, V(\Delta S) = \sum \sigma_i^2$$

である。

チェビシエフの不等式から次の命題が得られる。

命題 3

確率変数 X_1, X_2, \dots は互いに独立で同一の分布に従い、 $E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2$ が存在するものとする。このとき任意の正数 ε に対し

$$Pr. \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad (3)$$

が成り立つ ($Pr.(E)$ は事象 E の発生確率)。

命題 3 において $\varepsilon = \mu/M$ とおくと、

$$Pr. \left\{ n\mu \left(1 - \frac{1}{M}\right) < \sum X_i < n\mu \left(1 + \frac{1}{M}\right) \right\}$$

$$\geq 1 - \frac{M^2 \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2}{n} \quad (3')$$

が得られる。したがって十分大きな n に対しては $\sum X_i$ の指数部が $n\mu$ の指数部と同じであるとしてよく、 $\sum_{i=1}^n X_i$ は $\sum_{i=1}^{n-1} X_i$ より 1桁大きい値であるとしてよい。このことが成り立つ n は M と変動係数 $\delta \equiv \sigma/\mu$ によるが、 δ が小さい方が小さい n で成り立つ。

2.2 第 1 項と第 2 項の誤差評価

本節では切り捨て計算の場合を考察する。 $S_0 = 0$ から $S_n = fl(S_{n-1} + x_n)$ までの計算過程で S_{n_1} で桁上りが生じた後 S_n まで桁上りは生じていないとする。 $S_{n_1} = M^{d_1}(m)$ とする。前節の議論から S_1, \dots, S_{n_1-1} のうち指数部が $d_1 - 1$ であるものの個数はほぼ $n_1(M-1)/M$ であり、それらの局所丸め誤差 e_i は $-M^{d_1-1}(m) \cdot \eta$ で評価される。 $(m$ は e_i によって異なるが、以下の議論では誤差のオーダーを評価しているので適当でよい。以下同様。) x_{n_1} から x_n までの加算における局所丸め誤差は $-M^{d_1}(m) \cdot \eta$ で評価される。したがって、最高次数 -2 以下のオーダーの誤差 (この場合約 n_1/M 個ある) を無視すると (以下同様)、 ΔS_n は命題 2 より

$$\Delta S_n = -n_1 \frac{(M-1)}{M} M^{d_1-1}(m) \cdot \eta$$

$$- (n - n_1 + 1) M^{d_1}(m) \eta \quad (4)$$

で評価できる (ただし $1/M < n_1/n \leq 1$)。命題 1 より

$$fl(S_n/n) = (\sum x_i/n + \Delta S_n/n)(1 + \theta_2) \quad |\theta_2| \leq \eta$$

である。 $\theta_2 = -\eta$ とすると $fl(S_n/n)$ の誤差 E は

$$E \triangleq fl(S_n/n) - (\sum x_i/n)$$

$$\doteq - \left\{ 1 - \left(1 - \frac{(M-1)n_1}{M^2}\right) \frac{n_1}{n} \right\} M^{d_1}(m) \cdot \eta \quad (5)$$

と評価できる。

次に $fl(fl(S_n/n)^2)$ の誤差 E_2 を評価すると

$$fL(fL(S_n/n)^2) = fL((\sum x_i/n + E)^2) = (\sum x_i/n + E)^2(1 + \theta_3) \quad |\theta_3| \leq \eta$$

となるので、 $\theta_3 = -\eta$ とすると次式を得る：

$$E2 = 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot E \cdot \sum x_i - (\sum x_i/n)^2 \eta. \quad (6)$$

十分大きな n_1 に対しては

$$fL(\sum x_i) = M^{d_1}(m) \doteq \sum_{i=1}^{n_1} x_i \doteq n_1 \mu$$

としてよいので、第2項の誤差 (ET と記す) は(5)、(6)式を用いて、

$$ET \doteq -2\mu \left\{ 1 - \left(1 - \frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n} \right) n_1 \mu \eta - \mu^2 \eta \right\}$$

$$\frac{ET}{n\mu^2} \doteq -2 \frac{n_1}{n} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n} \right) \eta \right\} \quad (7)$$

と評価される。

次に第1項の誤差を評価する。 $y_i = x_i^2$ として漸化式 $T_k = T_{k-1} + y_k$ を考えると(5)式が適用できる ($T_k > x_k^2$ なので $fL(x_k^2)$ の誤差は無視してもよい)。仮定から $E(y) = E(x^2) = \mu^2 + \sigma^2$ なので、

$$T_{n_1} \doteq M^{d_1}(m) \doteq \sum_{i=1}^{n_1} y_i = \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 \doteq n_2(\mu^2 + \sigma^2)$$

が成り立ち (T_{n_1} で桁上りが生じた後 T_n まで桁上りは生じていないとする)、 $fL(\sum x_i^2/n)$ の誤差 (EV と記す) は

$$EV \doteq \left\{ 1 - \left(1 - \frac{M-1}{M^2} \frac{n_2}{n} \right) n_2(\mu^2 + \sigma^2) \eta \right\}$$

$$\frac{EV}{n(\mu^2 + \sigma^2)} \doteq - \frac{n_2}{n} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{M-1}{M^2} \frac{n_2}{n} \right) \eta \right\} \quad (8)$$

と評価される。

2.3 誤差の標準偏差を用いた評価

局所丸め誤差 e_i が独立で、丸められる桁の値が一樣に分布するとすると、命題2から ΔS_n の標準偏差は

$$\sqrt{n_1 \frac{M-1}{M^2} \frac{1}{M} + (n-n_1+1) M^{d_1}(m) \theta}$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{2\sqrt{3}} M^{1-L} \quad (9)$$

と評価できる。式(4)の代りに式(9)を用いて2.2節と同様に論じると、 $fL(S_n/n)$ と $fL(fL(S_n/n)^2)$ の誤差評価としてそれぞれ

$$\bar{E} \doteq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n} + \left(1 - \frac{n_1}{n} \right) M^{d_1}(m) \bar{\theta}} \quad (10)$$

$$\bar{E}2 \doteq 2 \frac{1}{n} \cdot \bar{E} \cdot \sum x_i - \left(\frac{1}{n} \sum x_i \right)^2 \bar{\theta} \quad (11)$$

が得られる。したがって第1項と第2項の誤差評価として(それぞれ EVR, ETR と記す)、式(12)、(13)が得られる。

$$\frac{EVR}{\sqrt{n}(\mu^2 + \sigma^2)} \doteq \frac{n_2}{n} \left\{ \sqrt{\frac{M-1}{M^2} \frac{n_2}{n} + 1 - \frac{n_2}{n}} \right\} \bar{\theta}, \quad (12)$$

$$\frac{ETR}{\sqrt{n} \mu^2} \doteq 2 \frac{n_1}{n} \left\{ \sqrt{\frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n} + 1 - \frac{n_1}{n}} \right\} \bar{\theta}, \quad (13)$$

$$(1/M < n_2/n \leq 1, 1/M < n_1/n \leq 1).$$

式(8)、(12)の右辺の値を表2、3に示した。

3. シミュレーション実験

前章の解析結果を確かめるシミュレーション実験を行った。計算には千葉大学の HITAC M-180 (日立製作所) と東京農工大学数理工学学科の ACOS-600 (日本電気) を使用した。

データは(1) 区間 (a, b) 上の一様乱数 $U(a, b)$ からの100万個の数、(2) 平均 μ 、分散 σ^2 の正規乱数 $N(\mu, \sigma^2)$ からの100万個の数、および(3) $c+d$ と $c-d$ とを交互に発生させた100万個の数である。パラメータの組 (a, b) 、 (μ, σ^2) 、 (c, d) は、変動係数 δ が 10^{-3} と 10^3 の間となる範囲内でそれぞれ4、28、2通りに変えた。(ただし $N(0, 1^2)$ の $\delta = \infty$ は例外である。) 一様乱数は乗算合同法 ($x_{i+1} = 48828125 \times x_i \pmod{2^{31}}$)、正規乱数は12個の一様乱数を用いて

表2 $-\frac{n_1}{n} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n} \right) \eta \right\}$

Table 2 $-\frac{n_1}{n} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n} \right) \eta \right\}$

$\frac{n_1}{n}$	M-180		$\frac{n_1}{n}$	ACOS-600		
	M=16	$\eta=16^{-3}$		M=16	$\eta=16^{-5\frac{3}{4}}$	M=2
$\frac{1}{16}$		-0.5610×10^{-7}	$\frac{1}{16}$	-0.7012×10^{-3}	$\frac{1}{2}$	-0.4783×10^{-3}
$\frac{256}{241 \times 2}$		-0.2533×10^{-6}	$\frac{256}{241 \times 2}$	-0.3166×10^{-7}	$\frac{2}{3}$	-0.4967×10^{-3}
1		-0.5588×10^{-7}	1	-0.6984×10^{-3}	1	-0.3725×10^{-3}

表 3 $\frac{n_1}{n} \sqrt{\frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n} + 1 - \frac{n_1}{n}} \bar{\theta}$
 Table 3 $\frac{n_1}{n} \sqrt{\frac{M-1}{M^2} \frac{n_1}{n} + 1 - \frac{n_1}{n}} \bar{\theta}$.

$\frac{n_1}{n}$	M-180		$\frac{n_1}{n}$	ACOS-600			
	M=16	$\bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} 16^{-5}$		M=16	$\bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} 16^{5/4}$	$\frac{n_1}{n}$	M=2
$\frac{1}{16}$		0.1666×10^{-7}	$\frac{1}{16}$	0.2083×10^{-8}	$\frac{1}{2}$		0.1613×10^{-8}
$\frac{1}{8}$		0.3220×10^{-7}	$\frac{1}{8}$	0.4025×10^{-8}	$\frac{5}{8}$		0.1810×10^{-8}
$\frac{1}{4}$		0.5946×10^{-7}	$\frac{1}{4}$	0.7455×10^{-8}	$\frac{3}{4}$		0.1892×10^{-8}
$\frac{1}{2}$		0.9733×10^{-8}	$\frac{1}{2}$	0.1219×10^{-7}	$\frac{7}{8}$		0.1822×10^{-8}
$\frac{3}{4}$		0.1038×10^{-8}	$\frac{3}{4}$	0.1298×10^{-7}	1		0.1521×10^{-8}
$\frac{7}{8}$		0.8625×10^{-7}	$\frac{7}{8}$	0.1078×10^{-7}			
$\frac{15}{16}$		0.6627×10^{-7}	$\frac{15}{16}$	0.8284×10^{-8}			
1		0.1666×10^{-7}	1	0.2083×10^{-8}			

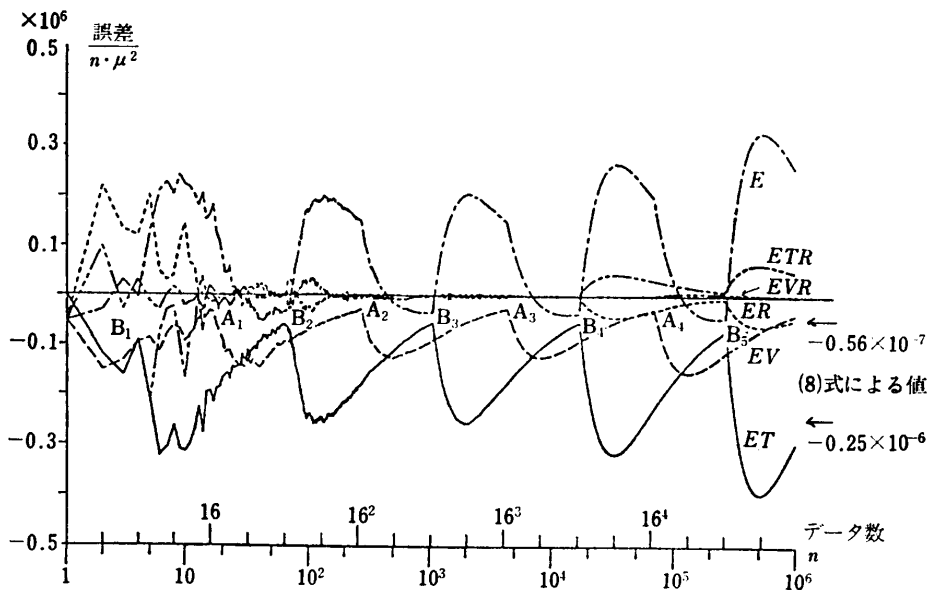


図 2 簡便法の誤差 (M-180 上で、16 進 6 桁、切り捨てと 7 捨 8 入による計算、データは正規乱数 $N(1000, 10)$ より生成)

Fig. 2 Errors of $\frac{1}{n} \sum x_i^2 - (\sum x_i/n)^2$, $\frac{1}{n} \sum x_i^2$ and $(\sum x_i/n)^2$ calculated in floating-point arithmetic (the base is 16, the mantissa is 24 bits) with chopping and rounding on data generated from normal distribution $N(1000, 10)$.

M-180 上で生成した。(乱数の初期値はいろいろの値を用いたが、図の例では 153249823 としたときのものである。) 分散の値は単精度計算によるもので、真の値としては M-180 では 4 倍精度、ACOS-600 では倍

精度での計算値を用いた。

例として正規乱数 $N(1000, 10)$ からの 100 万個のデータに対する実験結果を示す。以下では、E, R は分散の誤差 (それぞれ切り捨て、丸めの場合)、EV,

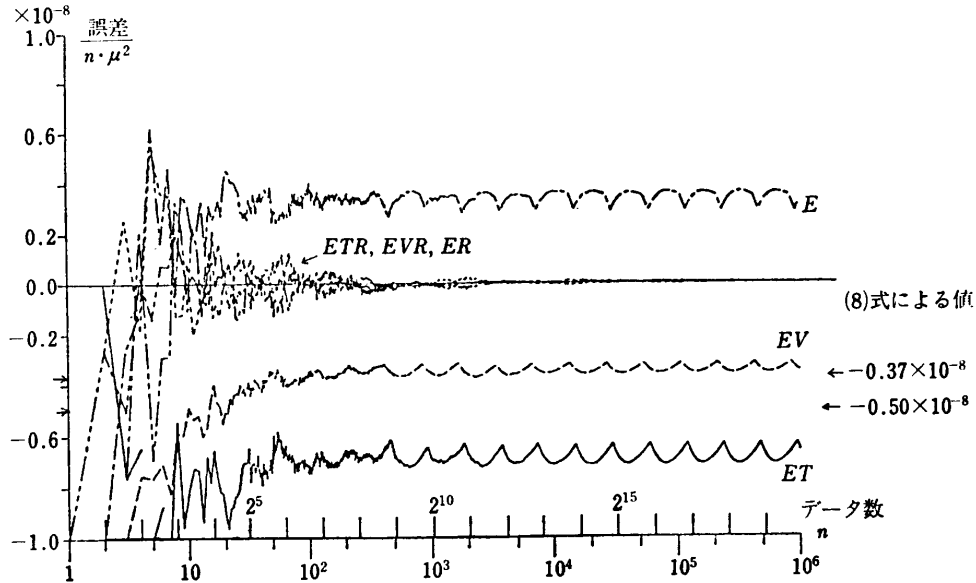


図3 簡便法の誤差 (ACOS-600 上で2進27桁, 切り捨てと0捨1入による計算, データは正規乱数 $N(1000, 10)$ より生成)

Fig. 3 Errors of $\frac{1}{n} \sum x_i^2 - (\sum x_i/n)^2$, $\frac{1}{n} \sum x_i^2$ and $(\sum x_i/n)^2$ calculated in floating-point arithmetic (the base is 2, the mantissa is 27 bits) with chopping and rounding on data generated from normal distribution $N(1000, 10)$.

EVR は第1項の誤差 (切り捨て, 丸め), ET, ETR は第2項の誤差 (切り捨て, 丸め) を示す. (データ (3)での結果については文献7)を参照されたい.)

図2に誤差 E, EV, ET, ER, EVR, ETR をそれぞれ $n\mu^2$ で割ったものを示した (計算は M-180 による). 図3は ACOS-600 の2進モードでの結果である. 丸めを行ったときの第2項の誤差を $\sqrt{n}\mu^2$ で割ったものを図4, 5に示す (図4: M-180, 7捨8入; 図5: ACOS-600, 0捨1入).

シミュレーションの結果, 次のことが観察された.

(a) 切り捨て計算のときの誤差 EV, ET の振舞いは式(8), (7)と非常によく一致する.

(b) 丸めを行ったときの誤差 EVR, ETR の振舞いは式(12), (13)と非常によく一致する.

(c) $\delta(=\sigma/\mu) < 1$ のときは誤差のオーダーも一致するが, $\delta > 1$ のときは評価式よりも約1桁大きい.

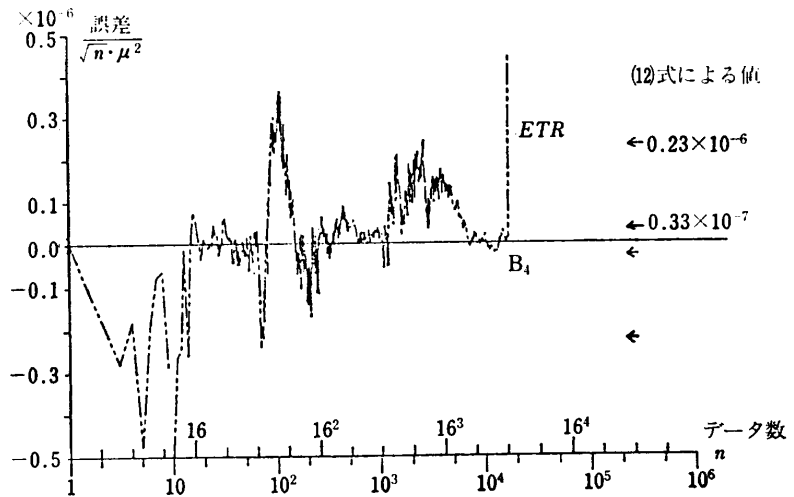


図4 簡便法の第2項の誤差 (M-180 上で16進6桁, 7捨8入による計算, データは正規乱数 $N(1000, 10)$ より生成)

Fig. 4 Error of $(\sum x_i/n)^2$ calculated in floating-point arithmetic (the base is 16, the mantissa is 24 bits) with rounding on data generated from normal distribution $N(1000, 10)$.

(d) 式(8)と(7)および(12)と(13)の関係も確認された (ET は EV の2倍となっている).

(e) 誤差を $n\mu^2$ (または $n(\mu^2 + \sigma^2)$) で割ったものは, データ数がある個数までは (例えば図2の A_1 と B_2) ランダムな変動を示し, それ以後は同一の変

動パターンを示す(例えば図2の $A_1 \sim A_4, B_2 \sim B_4$ の間で, A_{i+1}, B_{i+1} は A_i, B_i の16倍の位置となっている), さらにある個数以後は変化のパターンも変わり, 誤差も大きくなる(例えば図2の A_4, B_4 以後で, A_5, B_5 も A_4, B_4 の16倍より大きい位置となっている). またそれらの位置は δ が大きいほど右の方となっている.

(c)の理由は, δ が大きいときは, 同じ n に対して(3')式の左辺の確率が小さくなること, あるいは, 同じ確率にするには, (3)の ε を大きくしなければならないことを考えるとわかる.

(e)の定型パターンの部分は, 式(3')の左辺の確率がある程度以上の領域である. それよりデータ数が多いところでは, x_i^2, x_i の変動成分が $f(\sum x_i^2), f(\sum x_i)$ に足しまれなくなり始めるので, 振動の山(谷)と山(谷)の間がそれ以前より長くなる(図2の A_5, B_5). また丸めを行っているとき, そこからは丸めの効果がなくなり切り上げまたは切り捨てが続く(図2の EVR, ETR の A_4, B_4 以後参照). パターンの変わる位置が δ が大きくなると右へずれることも(3')を考えるとわかる.

4. おわりに

以上簡便法による分散計算における累積誤差の振舞いを解析し, 理論式がよく合うことをシミュレーション実験によって確かめた.

本論文の解析では, 「データは同一分布からの独立標本である」ことを前提としたが, この前提が成り立たない場合については今後の課題である.

最後に2, 3の注意を述べたい. まずデータが同一分布からのデータとはみなし難いときは, 計算の前に何らかの方法によってデータを同一分布からの標本とみなせるもの同士に層別して試みるのが大事である. 分散の計算に際しては, 本解析で示したように, 誤差に平均 μ が2乗で効いているので, 仮平均を用いて μ を小さくすることは有効である. 簡便法は変動係数 δ が小さい場合に特によくない. δ が小さい場合には, 初めのデータが μ に近い値である確率が高いので, 最

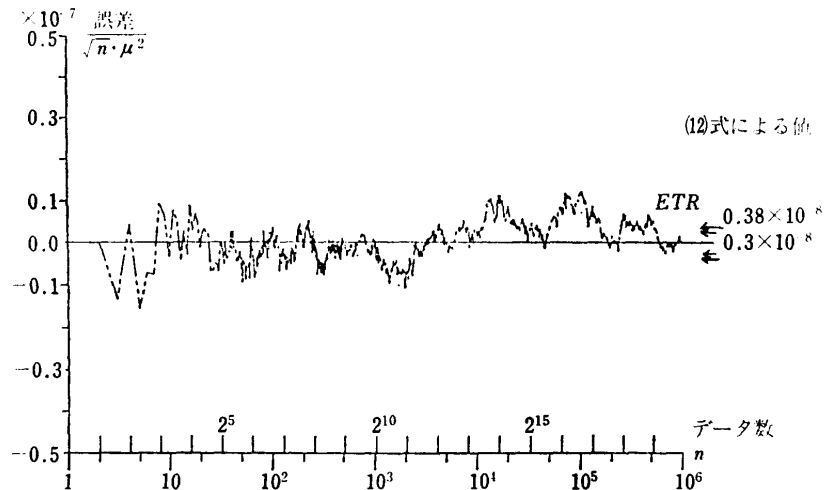


図5 簡便法の第2項の誤差 (ACOS-600 上で2進27桁, 0捨1入による計算, データは正規乱数 $N(1000, 10)$ より生成)

Fig. 5 Error of $(\sum x_i/n)^2$ calculated in floating-point arithmetic (the base is 2, the mantissa is 27 bits) with rounding on data generated from normal distribution $N(1000, 10)$.

初のデータを仮平均として用いるような仮平均法はよい方法であるといえる.

なお, 仮平均法で仮平均を引いた値に対して用いる計算式そのものは, 簡便法と同じ式なので, 誤差の変動パターンは簡便法と同じになることに注意されたい.

謝辞 本研究について多くの有益な御意見をくださった東京大学工学部伊理正夫教授に深謝いたします. また ACOS-600 の使用に際していろいろと御世話してくださった東京農工大学数理工学部の西村恕彦教授, 中森真理雄助教授, 荻原洋一技官の皆様にご感謝いたします. 論文の構成その他貴重な御意見をくださった審査員に感謝いたします. 文献2), 3) は審査員の御指摘による.

最後に御討論くださった千葉大学工学部戸田英雄教授, 井上隆勝助手, 実験を手伝ってくださった千葉大学理学部研究生江利川敏文君に感謝いたします.

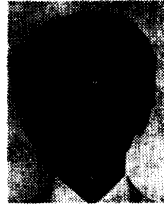
参考文献

- 1) Chan, T.F. and Lewis, J.G.: Computing Standard Deviations—Accuracy, *Commun. ACM*, Vol. 22, pp. 526-531 (1979).
- 2) Chan, T.F., Golub, G.H. and LeVeque, R.J.: Algorithms for Computing the Sample Variance: Analysis and Recommendations, *The American Statistician*, Vol. 37, pp. 242-247 (1983).
- 3) Hanson, R.J.: Stably Updating Mean and Standard Deviation of Data, *Commun. ACM*,

- Vol. 18, pp. 57-58 (1975).
- 4) Ling, R.F.: Comparison of Several Algorithms for Computing Means and Variances, *J. Amer. Statistical Assoc.*, Vol. 69, pp. 859-866 (1974).
 - 5) Wilkinson, J. H.: *Rounding Errors in Algebraic Processes*, Prentice-Hall Inc., 1963 (一松信ほか訳: 基本演算における丸め誤差解析, 培風館, 東京, 1974).
 - 6) Youngs, E. A. and Cramer, E. M.: Some Results Relevant to Choice of Sum and Sum-of-product Algorithms, *Technometrics*, Vol. 13, pp. 657-665 (1971).
 - 7) 星 守: 簡便法による分散計算の誤差, 情報処理学会数値解析研究会資料, 1-2 (1982).

(昭和 59 年 6 月 4 日受付)

(昭和 62 年 5 月 13 日採録)



星 守 (正会員)

1944 年生. 1970 年東京大学大学院修士課程修了(計数工学). 工業技術院電子技術総合研究所入所, 主任研究官を経て, 現在, 千葉大学工学部助教授. 工学博士. データの格納・探索・圧縮に関するデータ構造とアルゴリズム, 数値計算, 計算統計学, データ解析, 情報理論などに興味を持っている. ACM, 電子情報通信学会, 日本行動計量学会, 情報理論とその応用学会各会員.