

シヨートノート

テンソル積曲面の交線算出アルゴリズム†*

渡 辺 裕 文^{††} 中 野 貫 二^{††}
森 田 啓 義^{††} 阪 田 省 二 郎^{††}

フィリップスらの陰関数表現された曲面の交線を微分方程式の解として表す方法をテンソル積曲面に拡張して、テンソル積曲面パッチの組で与えられた2つの曲面モデルの交線を数値的に算出するアルゴリズムを提案する。この方法では、いったん交差パッチ対が求まれば初期点によらず交線上の1点が直ちに求められる。さらに交線から離れることなく交線上の相続く点を次々求めることができ、しかも複数のパッチ対にわたり連続的に交線を求めることができる。なお、この方法の簡単な適用例によってその有効性を確かめた。

1. ま え が き

コンピュータ図形処理において物体形状モデルを作成したり、形状モデルからNC工作機械の工具経路を計算する場合、交差している2曲面の交線を求める問題がしばしば生じる。交線の解法には、一方の曲面と他方の曲面上の曲線との交点を複数個求め、それらを滑らかにつなぎ合わせる方法¹⁾と、曲面を細分割法によって微小な平面の集合で近似し、曲面同士の交線を求める問題を平面同士の交線を求める問題に帰着させる方法²⁾の2つが代表的である。最近フィリップスら³⁾は、3次元空間座標 (x, y, z) を用いて $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ の形で陰関数表現された曲面同士の交線を求めるために、交線が解曲線となる常微分方程式を曲面の定義式 f, g から導出し、この方程式を数値的に解くことによって交線を算出する手法を与えた。この微分方程式系は漸近的に安定であるため、初期点の選び方によらず、解は交線に収束するという特徴を有している。

本稿では、このフィリップスの方法を曲面上の点の3次元空間座標 x, y, z が、2変数 u, v の関数によって与えられているテンソル積曲面パッチの場合に拡張する。特に、Beta 2-スプライン曲面⁴⁾パッチを扱う。さらにこの方法と併せて、2枚の物体表面形状モデル

がそれぞれテンソル積曲面パッチの組によって与えられているとき、どのパッチ対が交線を持つかを効率良く求めるアルゴリズムを新しく提案する。また、これらを組み合わせた手法を具体例に適用した結果を示す。

2. 交線の解法

2.1 交線と解とする常微分方程式の導出

3次元空間 V_3 において、パラメータ s, t および u, v によって、

$$P(s, t) = (P_1(s, t), P_2(s, t), P_3(s, t)), \quad 0 \leq s, t \leq 1, \quad (1)$$

$$Q(u, v) = (Q_1(u, v), Q_2(u, v), Q_3(u, v)), \quad 0 \leq u, v \leq 1, \quad (2)$$

で与えられた2枚の曲面パッチ $P(s, t), Q(u, v)$ が交線 I を持つとする。まず、

$$F(r) = P(s, t) - Q(u, v) = (F_1(r), F_2(r), F_3(r)) \quad (3)$$

として、 s, t, u, v を独立変数とする4次元空間 V_4 内の $F(r) = 0$ を満足する点 $r = (s, t, u, v)$ の軌跡 \tilde{I} を考える。 V_4 内の曲線 \tilde{I} はただ1つのパラメータ w によって、

$$r = r(w) = (s(w), t(w), u(w), v(w))$$

と表されるから、求めるべき3次元空間 V_3 内の曲線 I は、

$$P(s(w), t(w)) \quad (4)$$

または

$$Q(u(w), v(w)) \quad (5)$$

のいずれによっても与えられる。そこで V_4 内の曲線 \tilde{I} をその解 $r = r(w)$ の1つとして含む自動系の常微

† An Algorithm for Calculating Intersections of Two Tensor Product Surfaces by HIROFUMI WATANABE, KANJI NAKANO, HIROYOSHI MORITA and SHOJIRO SAKATA (Department of Production Systems Engineering, Toyohashi University of Technology).

†† 豊橋技術科学大学生産システム工学系

* 本稿は情報処理学会第33回(昭和61年後期)全国大会での発表内容をより詳しく記述したものである。

分方程式

$$d\mathbf{r}/dw = \mathbf{z}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

を以下のように構成しよう。

まず V_4 内の任意の点 \mathbf{r} をとる。 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$ の場合は、 $|\mathbf{x}|$ を4次元ベクトル \mathbf{x} の大きさとして、 $|\mathbf{F}(\mathbf{r})|$ が減少する方向に \mathbf{r} を動かすことを考える。すなわち、 \mathbf{r} を初期値とする(6)の解が \tilde{I} に近づくようにしたい。そのためには、例えば、(6)の解が

$$\begin{aligned} d[F_1^2]/dw &= -F_1^2, \\ d[F_2^2]/dw &= -F_2^2, \\ d[F_3^2]/dw &= -F_3^2 \end{aligned} \quad (7)$$

を満たせばよい。ここで、

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(\mathbf{r}(w)), \\ F_2 &= F_2(\mathbf{r}(w)), \\ F_3 &= F_3(\mathbf{r}(w)) \end{aligned}$$

である。 V_4 において超曲面 $S_1: F_1(\mathbf{r}) = \text{const.}$, $S_2: F_2(\mathbf{r}) = \text{const.}$, $S_3: F_3(\mathbf{r}) = \text{const.}$ の点 \mathbf{r} における単位法線ベクトルをそれぞれ \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} とする。すなわち、4次元空間で定義された関数 f の勾配を $\text{grad } f$ とし、これらは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \text{grad } F_1 / |\text{grad } F_1|, \\ \mathbf{m} &= \text{grad } F_2 / |\text{grad } F_2|, \\ \mathbf{n} &= \text{grad } F_3 / |\text{grad } F_3|. \end{aligned}$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ を4次元ベクトル \mathbf{x} と \mathbf{y} の内積として、(7)式を整理すると、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{l}, \mathbf{z}(\mathbf{r}) \rangle &= -F_1 / (2|\text{grad } F_1|), \\ \langle \mathbf{m}, \mathbf{z}(\mathbf{r}) \rangle &= -F_2 / (2|\text{grad } F_2|), \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{z}(\mathbf{r}) \rangle &= -F_3 / (2|\text{grad } F_3|) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここで、(V_4 内の) $\mathbf{z}(\mathbf{r})$ は(8)だけでは定まらないことに注意しよう。ところで、 \mathbf{r} が \tilde{I} 上に存在する場合、 \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} に直交する単位ベクトル \mathbf{a} の方向は、 \tilde{I} の接線方向と一致する。ゆえに、 \mathbf{r} が \tilde{I} 上にある場合は \mathbf{a} 方向に変化するよう $\mathbf{z}(\mathbf{r})$ を選び、 \tilde{I} 上にはない場合には $\mathbf{z}(\mathbf{r})$ を \mathbf{a} と直交する方向すなわち、3枚の超曲面 S_1, S_2, S_3 の法線 $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ で張られる部分空間内の方向に変化させることが望ましい。そのためには、 $d(\mathbf{r})$ を \mathbf{r} と \tilde{I} 間の4次元空間内における距離、例えば、

$$d(\mathbf{r}) = \sqrt{F_1^2(\mathbf{r}) + F_2^2(\mathbf{r}) + F_3^2(\mathbf{r})}$$

とし、 $G(d(\mathbf{r}))$ を

$$G(d(\mathbf{r})) = \begin{cases} 1, & d(\mathbf{r}) \leq \varepsilon \\ 0, & d(\mathbf{r}) > \varepsilon \end{cases}$$

として、

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{z}(\mathbf{r}) \rangle = G(d(\mathbf{r})) \quad (9)$$

を満足すればよい。ただし、 ε は微小な定数である。以上の、(8)と(9)を連立させれば、与えられた点 \mathbf{r} での $\mathbf{z}(\mathbf{r})$ を一意に求めることができる。ただし、 \mathbf{r} は3枚の超曲面のいずれの特異点でもないとする。常微分方程式(6)の初期値問題を考えるとき、 $\mathbf{z}(\mathbf{r})$ の関数形が与えられていなくても、以上述べたようにして $\mathbf{z}(\mathbf{r})$ の値を、求めることができれば、例えば、Euler法

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{z}(\mathbf{r}_i) \Delta w \quad (i=0, 1, \dots) \quad (10)$$

を用いて、逐次に点 \mathbf{r}_i を求めていくことができる。ここで、 Δw は数値計算のための微小な刻みである。この点列 \mathbf{r}_i は \tilde{I} に漸近し、一方、 \tilde{I} 上にくれば(または、十分接近すれば)、(少なくとも \tilde{I} の近傍を) \tilde{I} に沿って移動する。

なお、本稿では上記の方法を Beta 2-スプライン曲面パッチに適用する。Beta 2-スプライン曲面の各パッチは、制御点 $\mathbf{V}_{i,j}$ ($i, j=1, \dots, n$) を用いて、

$$S_{i,j}(u, v) = \sum_{k=-2}^1 \sum_{l=-2}^1 \mathbf{V}_{i+k, j+l} b_k(u) b_l(v) \quad (11)$$

$$3 \leq i, j \leq n-1, \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

で表される。ここで、

$$\begin{aligned} b_{-2}(u) &= 2\gamma(1-u)^3, \\ b_{-1}(u) &= \gamma(\beta + 8 + u^2(-3(\beta+4) + 2u(\beta+3))), \\ b_0(u) &= \gamma(2 + u(6 + u(3(\beta+2) - 2u(\beta+3))), \\ b_1(u) &= 2\gamma u^3, \\ \gamma &= 1/(\beta+12) \end{aligned}$$

である。これらは、Beta 2-スプライン曲面の基底関数と呼ばれる。Beta 2-スプライン曲面のみならず一般のテンソル積曲面に対しては、基底関数が多項式で与えられることから、 $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{a}$ の各成分を簡単な2変数の多項式で陽に与えることができる。

2.2 物体表面形状モデルの交線算出

複数の曲面パッチを貼り合わせて作成された2つの物体表面形状モデル間のすべての交線を求める場合、交差していないパッチ対に対する unnecessary 処理を避け、かつ1本の交線をパッチ対ごとに切れ切れにではなく、連続した曲線として算出できることが望まれる。この要求を満たすアルゴリズムを Beta 2-スプライン曲面に対して与える。ここで、アルゴリズムの入力として2物体の Beta 2-スプライン曲面パッチの制御点が既に与えられているものとし、アルゴリズムの実行時に2物体の交差するパッチ対を登録するテーブルを使用する。アルゴリズムの開始時には、このテーブルの内容は空とする。

[交線算出アルゴリズム]

- I) 2物体間のあらゆる曲面パッチ対の中から、1つの曲面パッチ対を任意に選び、2曲面が交差しているかどうかを判定する。具体的には、前節の方法で交線算出アルゴリズムを数ステップ実行する。このとき、(10)より定まる2組のパラメータ対 (s, t) と (u, v) が示す曲面パッチ上の2点間の距離が、あるしきい値 T 以内であればパッチ対は交差するとみなし、II)へ進む。もし2点間の距離がしきい値に達していなければ交差していないとみなし、次のパッチ対を選んで交差チェックを繰り返す。すべてのパッチ対に対してチェックが行われた時点でアルゴリズムは終了する。
- II) パッチ対が既にテーブルに登録されているかどうか調べる。もし登録されていなければIII)へ進む。そうでなければ、I)へ戻る。
- III) 交差している1つのパッチ対に対して交線を算出する。このとき微分方程式を数値的に解いてゆく過程で、初めて交線の上に乗った点の座標を交線ループの終点として記憶しておく。
- IV) 交線の算出が一方のパッチ A_1 の境界まで進んだ場合、 A_1 と対をなすパッチ B は A_1 と同じ曲面を構成する A_1 の隣接パッチ A_2 とも交差している。したがって、新しいパッチ対 (A_2, B) をテーブルに登録し、III)へ戻り交線算出を続行する。
- V) III), IV)の手続きを交線ループの終点に達するまで繰り返す。終点に達した時点で、I)に戻り、別の交線ループの探索を行う。

[アルゴリズム終了]

2.3 適用例

以上のアルゴリズムを Pascal によってプログラムし、2つの物体の交線を求めた結果を図1に示す。この場合、柱状の物体を構成する曲面パッチの数は4で、他方の底面が凹んだ物体は8である。計算機に PC-9801 を用いて交線をすべて算出するまで57秒を要した。このうち交線チェックに要した時間は7秒である。ここで、 ϵ は 10^{-4} 、 Δw は 10^{-3} 、 T は5で、初期点から交線上に到達するまで7ステップを要した。他のいくつかの計算例においても、任意の初期点から交線上へ到達するまでのステップ数は10以内である。

3. むすび

パラメトリック曲面の交線を求める1つの方法として、Quadtree 構造を使って交線の初期点を求め、そ

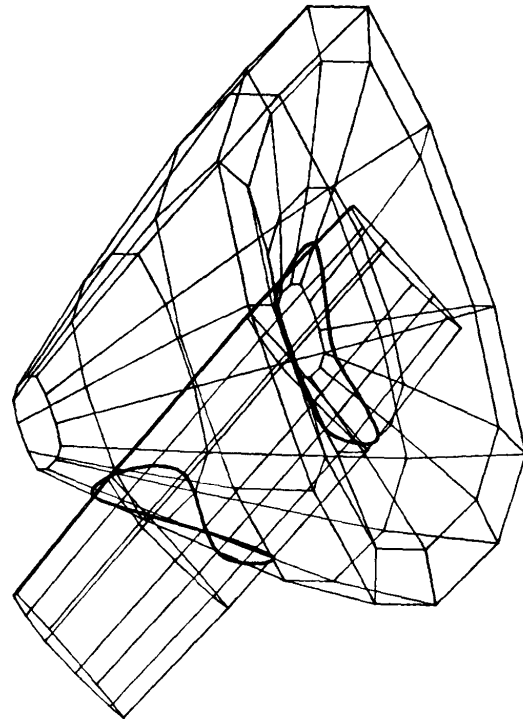


図1 Beta 2-スプライン曲面パッチで表された2つの物体の交線

Fig. 1 The intersection of two objects, each represented as a set of Beta 2-spline patches.

の後直接曲面データを用いて2曲面間のパラメータを同時に変化させて交線を探索する方法⁶⁾が最近報告されている。この方法では、交線上の次の点を求めるのに、交線から離れた点から再度交線上に戻る反復計算が必要である。ここで導入した方法では、最初の交差パッチ対が求められるまでパッチ対の交差チェックを繰り返さなければならないが、いったん交差パッチ対が求めれば、容易に交線上の1点が求められる。さらに、交線から離れることなく交線上の相続く点を次々と求め、しかも複数のパッチ対にわたり連続的に交線を求めることができる。適用例より、この方法の収束性の良さ、安定性が確かめられた。

今回は形状制御の容易な Beta 2-スプライン曲面を対象としたが、我々の方法は、テンソル積曲面であればどのような曲面に対しても適用することができる。

参考文献

- 1) Faux, I. D. and Pratt, M. J.: *Computational Geometry for Design and Manufacture*, p. 332, John Wiley & Sons, New York (1979).
- 2) Lasser, D.: *Intersection of Parametric Surfaces*

in the Bernstein-Bezier Representation, *Comput.-Aided Des.*, Vol. 18, No. 4, pp. 186-192 (1986).

- 3) Phillips, M. B. and Odell, G. M.: An Algorithm for Locating and Displaying the Intersection of Two Arbitrary Surfaces, *IEEE CG & A*, Vol. 4, No. 9, pp. 48-58 (1984).
- 4) Barsky, B. A. and DeRose, T. D.: The Beta 2-spline: A Special Case of the Beta-spline Curve and Surface Representation, *IEEE CG & A*, Vol. 5, No. 9, pp. 46-58 (1985).
- 5) 小堀研一, 長田義弘, 西岡郁夫: パラメトリック曲面の交線を求めるための一手法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 1, pp. 91-98 (1987).

(昭和 62 年 2 月 23 日受付)

(昭和 62 年 7 月 9 日採録)



渡辺 裕文 (学生会員)

昭和 39 年生。昭和 61 年豊橋技術科学大学工学部生産システム工学課程卒業。同年同大学院工学研究科入学。コンピュータグラフィックスの研究に従事。



中野 貴二

昭和 36 年生。昭和 59 年豊橋技術科学大学生産システム工学課程卒業。昭和 61 年同大学院修士課程(生産システム工学専攻)修了。同年三洋電機(株)入社。現在、情報技術センターにて MRI 画像の画質改善に関する研究に従事。



森田 啓義 (正会員)

1955 年生。1978 年大阪大学基礎工学部生物工学科卒業。1983 年同大学院博士課程(機械工学専攻)修了。同年豊橋技術科学大学生産システム工学系助手。工学博士。コンピュータ・グラフィックス, 画像認識, 画像データ圧縮の研究に従事。電子情報通信学会, IEEE 各会員。



阪田省二郎

昭和 16 年生。昭和 39 年東京大学工学部計数工学科卒業。昭和 44 年同大学院博士課程修了。同年 4 月相模工業大学工学部講師。昭和 46 年同助教授。昭和 56 年 4 月より豊橋技術科学大学工学部生産システム工学系助教授。工学博士。主として代数的符号論, システム理論, コンピュータビジョン, 生産計画の研究に従事。昭和 60 年日本学術振興会特定国派遣研究員(オーストリア, リンツ大学客員教授)。著書「応用数学 3—マトリックス」(培風館)(共著)。電子情報通信学会, 計測自動制御学会, 日本 OR 学会, ソフトウェア科学会, 米国 IEEE 等各会員。