

三面図からの物体自動合成のための線形擬似ブール代数解法†

佐々木 康仁^{††} 伊藤 潔^{†††} 鈴木 誠道^{††††}

三面図が表す三次元物体を求める手段として、単純に各面図の頂点や線分について各面図間で対応をとり、三次元空間上の頂点と稜線から成るワイヤフレームモデルを作成し、次に、それらの稜線で囲まれた領域を面として認識したサーフィスマデルを作成する方法が考えられる。この方法をとると、偽の物体要素を含むサーフィスマデルを作成してしまう場合がある。この偽の物体要素を含むサーフィスマデルから所望の物体を見出すためのこれまでの多くの方法では、試行錯誤的な探索プロセスのアルゴリズムを提案している。我々は探索アルゴリズムの提案ではなく、連立した線形の擬似ブール代数等式・不等式を用いた定式化による解法（線形擬似ブール代数解法）を提案する。ここでは、物体要素群が多面体を構成するための条件および三面図に合致するための条件を線形項による擬似ブール連立式で定式化し、この連立式を満たす解を基に、多面体を構成し、かつ三面図に合致する物体要素群を求める。この手法を理論的かつアルゴリズム的に確立し、種々の例題に適用し、この手法の有効性と適用範囲を明らかにした。

1. はじめに

人間が三面図を理解しようとする際には、三面図情報に、物体に関する知識や物体を認識する際のヒューリスティックな知識を加味しながら、所望の物体を得る。三面図から物体を自動合成するシステムの構成の際には、このような人間の物体認識の過程に代わる複雑で高度な試行錯誤を組み込まねばならず、その実現は、必ずしも容易ではない。

三面図からの物体自動合成のシステムを作り上げる手法として、まず三面図の3つの面図（平面図、正面図、側面図）間の端点や線分の対応により、三次元空間上の頂点と稜線から成るワイヤフレームモデル（候補頂点・候補稜線群）を作成し、次に、それらの稜線で囲まれた領域を面として認識したサーフィスマデル（候補頂点・候補稜線・候補面群）を作成し、最後に、このサーフィスマデルの各面のいずれの側に実体が存在するかを明らかにして三次元形状を表すソリッドモデルを合成する方法が考えられる。この流れに従い、所望の物体を構成する真の物体要素（頂点、稜線、面）群を含む物体要素集合を求めるのは比較的容易である。しかし、このような直線的な過程で求めた候補物体要素群には、図1に示すとおり、一般に偽の物体要素が含まれる。この偽の物体要素の除去は、必ずしも

容易ではない。

この分野の研究で主なものに出沢らの研究¹⁾があり、物体要素の真偽決定の規則を頂点と稜線のつながりによってのみ記述し、ワイヤフレームモデルの段階で、この規則を適用し、探索的に偽物体要素の除去の大部分を行った。また、Markowskyらは三面図から合成されたワイヤフレームモデルやサーフィスマデルに適合する四角柱や三角柱等のプリミティブソリッドすべてを数え上げ、これらのプリミティブソリッドの組合せのうち、多面体を構成する規則を満足するものを探索的に求めた^{2),3)}。

我々は、サーフィスマデルの合成後に、多面体構成のための真偽決定規則を頂点、稜線そして面のつながりに対して適用する探索アルゴリズムを提案した⁴⁾。

以上の方法は、真と偽の入り混じった物体要素群に対して試行錯誤の探索プロセスのアルゴリズムを提案し、探索により真の物体要素群を発見する、あるいは偽の物体要素群を除去する方法であった。

我々の処理の流れを図2に示す。本稿は探索プロセスのアルゴリズムの提案に主眼を置いていない。多面体構成のための真偽決定規則を簡潔化した後、この規則を擬似ブール代数式で定式化し、これらの式を候補物体要素群に適用して立式した連立式を既存のブール代数解法に与える、という探索的手法によらない方法を考察する。ただし、効率的な合成処理を行うために、現段階では、真偽決定規則を線形の擬似ブール式で表される範囲とした。この線形の擬似ブール式で表される規則では、物体の幾何学的情報ではなく主として位相的情報を対象としている。このため、擬似ブール代数による解法の前後に、幾何学的情報を扱ういく

† Linear Pseudo Boolean Algebraic Solution for Solid Generation from Orthographic Views by YASUHIRO SASAKI, KIYOSHI ITOH and SHIGEMICHI SUZUKI (Faculty of Science and Technology, Sophia University).

†† 上智大学大学院理工学研究科機械工学専攻修士課程

††† 上智大学理工学部一般科学研究室情報科学部門

†††† 上智大学理工学部機械工学科

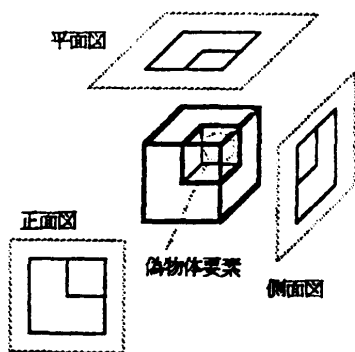


図 1 偽物体要素を含む物体合成
Fig. 1 Generating surface model with ghosts from orthographic views.

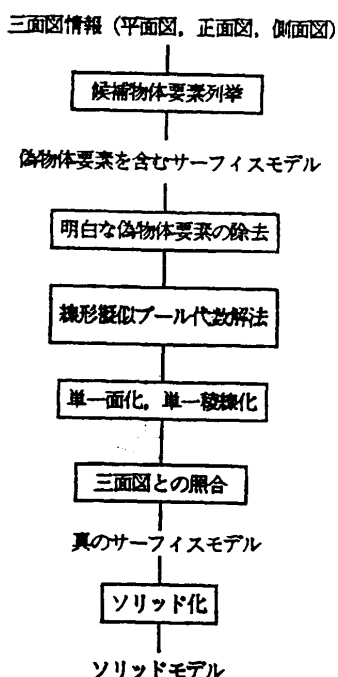


図 2 三面図からの物体自動合成処理の流れ
Fig. 2 General flow of solid generation from orthographic views.

つかの簡単な探索プロセスを置いている。このシステム構成による問題点について5章の考察で検討する。

本稿で扱う三面図および物体は、次の条件を満たすものとし、真のサーフィスモデルを求める段階までについて次章から順次述べる。

- (A) 三面図の正・平・側面図は互いに矛盾しない。
- (B) 対象となる物体は、すべて直線の稜線と平面によって構成されている結合物体である。また、図面に対する補助的な記号はない。

(C) 物体要素は互いに接していることはない。

2. 候補物体要素の列举

まず、候補頂点群・候補稜線群・候補面群を得る方法を述べる。この方法は、本稿の主題ではないので簡単に述べる。

正面図のすべての頂点 P と線分 L に対し、それぞれ面図視線に平行で P を通る直線、面図視線に平行で L を通る部分平面を作成する。平面図、側面図についても同様な直線と部分平面を作成する。

図3に示すとおり、これらの直線や部分平面の交わりにより三次元空間上に得られた頂点群、線分群を、それぞれ、候補頂点集合 V 、候補稜線集合 E とする。 V は所望の物体の任意の頂点を含み、 E は所望の物体の任意の稜線を含む。

次に、同一平面上の候補稜線の閉路の内側に区切られた平面領域を候補面とする。ただし、このような平面領域 L_i, L_j, L_k が同一平面上にあり、さらに「 L_i は L_j に含まれ、 L_j より小さい他の平面領域 L_k に L_i が含まれない」という関係があるときは、 L_j 内かつ L_i の外側の平面領域も候補面とする(図4参照)。候補面の集合を F とする。 F は所望の物体の任意の面を含む。

以上の V, E, F は三次元空間上の幾何学的情報(頂点の座標値、稜線や面の方程式など)をもつ。

3. 物体要素の真偽の決定

2章の候補物体要素の列举により得られた候補物体要素集合 V, E, F 中には、所望の物体の物体要素が含まれているが、所望の物体にはない物体要素も含まれている場合がある(図5の三面図に対し図6)。物体要素のうち所望の物体を構成するものを“真”と呼び、そうでないものを“偽”と呼ぶ。

3.1 明白な偽物体要素の除去

明らかに偽である物体要素は、以下の3つの規則に従い容易に検出できる。

- (i) 2本以下の候補稜線群により構成される候補頂点は偽である。
- (ii) 偽の候補頂点を構成する候補稜線群は偽である。
- (iii) 偽の候補稜線を構成する候補面群は偽である。ただし、偽の頂点(あるいは稜線)を colinear な2稜線(あるいは coplanar な2面)が構成している場合は、それらの稜線(あるいは面)は単一稜線(あ

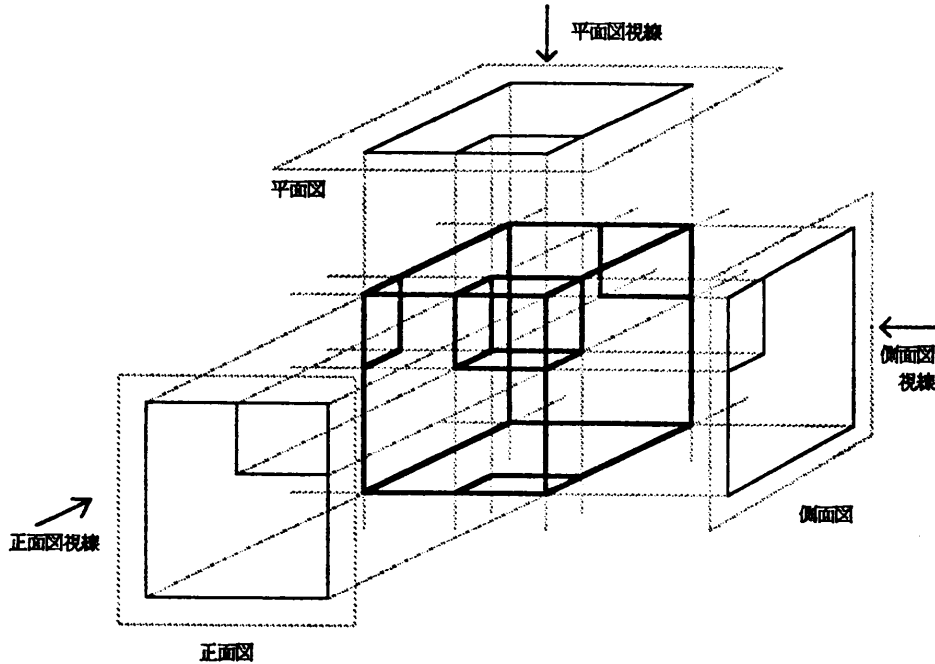


図 3 候補物体要素の作成

Fig. 3 Construction of candidate elements from orthographic views.

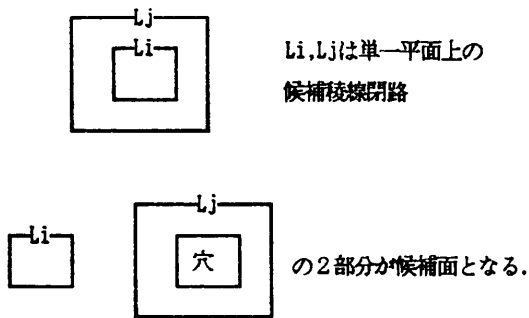


図 4 候補稜線閉路に包含関係があるときの候補面
Fig. 4 Candidate faces in case of inclusive relationships between coplanar areas.

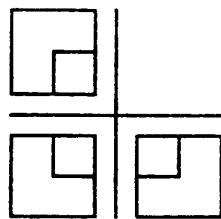


図 5 三面図

Fig. 5 Orthographic views.

るいは面) であるとも考えられるので, 単一化して, それらを候補稜線集合 E (あるいは候補面集合 F) に加える.

これらの規則を再帰的に適用し, 偽と決まった物体

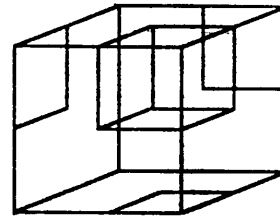


図 6 候補物体要素列挙直後の候補物体要素群
Fig. 6 Surface model with ghosts.

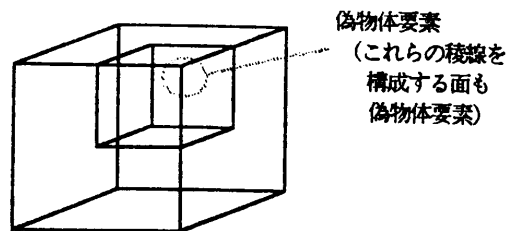


図 7 明白な偽物体要素除去後の候補物体要素群
Fig. 7 Surface model without obvious ghosts.

要素は候補物体要素集合 V, E, F から除去する. 図 6 の候補物体要素群に対して以上を適用した結果を図 7 に示す.

3.2 線形擬似ブール代数解法

3.2.1 真偽決定規則の定式化と線形擬似ブール代数解法

図 7 に示すとおり, 一般に, 明白な偽物体要素の除

去後にもまだ偽物体要素は残る。このような偽物体要素を含むサーフィスマodelから、物体要素の真偽を明らかにし、真のサーフィスマodelを得るために、次に示す多面体構成のための真偽決定規則を導入する。

(a) ある候補頂点が真ならば、その頂点を構成する候補稜線群のうち、3つ以上が真である。ある候補頂点が偽ならば、その頂点を構成する候補稜線はすべて偽である。

(b) ある候補頂点が真ならば、その頂点を構成する候補面群のうち、3つ以上が真である。ある候補頂点が偽ならば、その頂点を構成する候補面群はすべて偽である。

(c) ある候補稜線が真ならば、その稜線を構成する候補頂点群も真である。ある候補稜線が偽ならば、その稜線を構成する候補頂点群の真偽は判定できない。

(d) ある候補稜線が真ならば、その稜線を構成する候補面群のうち、2つが真である。ある候補稜線が偽ならば、その稜線を構成する候補面群はすべて偽である。

(e) ある候補面が真ならば、その面を構成する候補頂点群はすべて真である。ある候補面が偽ならば、その面を構成する候補頂点群の真偽は判定できない。

(f) ある候補面が真ならば、その面を構成する候補稜線群はすべて真である。ある候補面が偽ならば、その面を構成する候補稜線群の真偽は判定できない。

上記の規則中の「構成する」という用語の意味を図8に示す。

規則(a)-(f)を適用して得られた真の物体要素群は多面体を構成するが、三面図に合致しない場合がある。そのため、次の三面図との合致のための真偽決定規則を導入する。

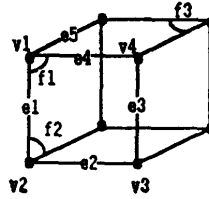
(g) 三面図上のある1線分に投影される候補稜線群のうち、1つ以上が真である。

さらに、多面体の稜線は交点なく交差することはない、また面は交線なく交差することはないことを考慮した真偽決定規則を導入する。

(h) 交点なくある1箇所て交差する候補稜線群のうち、たかだか1つが真である。

(i) 交線なくある1箇所て交差する候補面群のうち、たかだか1つが真である。

以上の9規則を擬似ブール代数を用いて定式化する。まず、候補物体要素 v, e, f ($v \in V$,



稜線e1, e4, e5は頂点v1を構成する
面f1, f2, f3は頂点v1を構成する
頂点v1, v4は稜線e4を構成する
面f1, f3は稜線e4を構成する
頂点v1, v2, v3, v4は面f1を構成する
稜線e1, e2, e3, e4は面f1を構成する

図8 “構成する”の意味
Fig. 8 Mean of term “compose”.

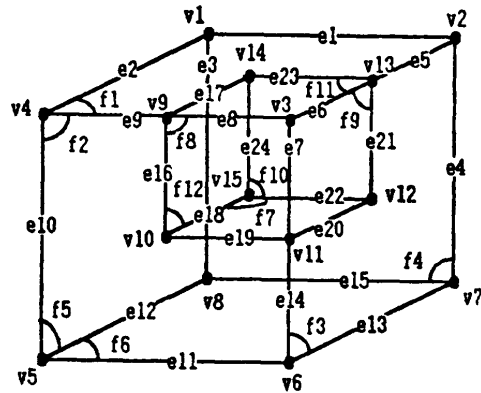


図9 候補物体要素群に対する0-1変数の割り当て
Fig. 9 Assignment of Boolean variables to candidate vertices, edges and faces.

- By (a), $3v1 \leq e1 + e2 + e3 \leq 3v1$,
.....
 $3v15 \leq e18 + e22 + e24 \leq 3v15$.
- By (b), $3v1 \leq f1 + f4 + f5 \leq 3v1$,
.....
 $3v15 \leq f7 + f10 + f12 \leq 3v15$.
- By (c), $2e1 \leq v1 + v2$,
.....
 $2e24 \leq v14 + v15$.
- By (d), $2e1 = f1 + f4$,
.....
 $2e24 = f10 + f12$.
- By (e), $6f1 \leq v1 + v2 + v4 + v9 + v13 + v14$,
.....
 $4f12 \leq v9 + v10 + v14 + v15$.
- By (f), $6f1 \leq e9 + e10 + e11 + e14 + e16 + e19$,
.....
 $4f12 \leq e16 + e17 + e18 + e24$
- By (g) for top view, $e2 + e12 \geq 1$,
.....
 $e9 + e11 \geq 1$.
- By (g) for front view,
- By (g) for side view,
- By (h), nothing.
- By (i), nothing.

図10 図9に対する真偽決定規則の連立擬似ブール等式不等式による表現

Fig. 10 Boolean equation representation of topological rules for Fig. 9.

$e \in E, f \in F$) を表す変数として, それぞれ, v, e, f をそのまま使い, それぞれを二値変数とする. 変数値 1 は, 対応する物体要素が真, 変数値 0 は, 対応する物体要素が偽であることを表す. 図 7 に対して変数を割り当てたものを図 9 に示す.

以上に挙げた 9 規則は, これらの変数を用いて次のように定式化できる.

すべての $v \in V$ に対して

$$3v \leq \sum_{e \in E_v} e \leq \alpha_v \cdot v, \quad \alpha_v = |E_v| \geq 3. \quad (a)$$

$$3v \leq \sum_{f \in F_v} f \leq \beta_v \cdot v, \quad \beta_v = |F_v| \geq 3. \quad (b)$$

すべての $e \in E$ に対して

$$2e \leq \sum_{v \in V_e} v, \quad |V_e| = 2. \quad (c)$$

$$2e = \sum_{f \in F_e} f, \quad |F_e| \geq 2. \quad (d)$$

すべての $f \in F$ に対して

$$\gamma_f \cdot f \leq \sum_{v \in V_f} v, \quad \gamma_f = |V_f| \geq 3. \quad (e)$$

$$\delta_f \cdot f \leq \sum_{e \in E_f} e, \quad \delta_f = |E_f| \geq 3. \quad (f)$$

以上の中で V_e 等は e を構成する候補頂点群に対応する変数の集合とする.

すべての $s \in S$ に対して

$$\sum_{e \in E_s} e \geq 1. \quad (g)$$

ここで S は三面図上の線分の集合とし, E_s は $s (\in S)$ に投影される候補稜線群に対応する変数の集合とする.

すべての $E_x \in E_{cross}$ に対して

$$\sum_{e \in E_x} e \leq 1. \quad (h)$$

すべての $F_x \in F_{cross}$ に対して

$$\sum_{f \in F_x} f \leq 1. \quad (i)$$

ここで E_x は交点なく 1 箇所て交差する候補稜線群に対応する変数の集合, E_{cross} は E_x の集合, F_x は交線なく 1 箇所て交差する候補面群に対応する変数の集合, F_{cross} は F_x の集合とする.

線形擬似ブール代数解法では, 明白な偽物体要素除去後の候補物体要素群に対して, 式(a)-(i)に従い立式された式を連立し解を得る. この解として得られた変数値をもとに, 物体要素の真偽を決定する. 図 9 に対して立式

した例を図 10 に示す. 連立線形擬似ブール等式不等式を効率的に解くには, Hammer の解法⁶⁾が活用できる.

3.2.2 多面体構成規則式の冗長性

上記の多面体構成規則式の冗長性に関する定理を述べる. 証明は付録に付す.

定理 3.1 式(a), (d)が共に成り立つことは, 式(a)-(f)が共に成り立つための十分条件である.

3.2.3 三面図合致式の適用と効果

図 5 の三面図に対する候補物体要素群は図 9 である. この例を多面体構成式(a), (d)のみの連立により解くと, 解は図 11 の 3 つの解, すなわち図 12 の 3 つの物体となり, 候補物体要素群から生成される多面体がすべて列挙される. ここで, 空の多面体も含まれている. 式(a), (d)に加え, 三面図合致式(g)を連立して同じ例を解けば, 解は図 11 の(1-3)のみになり, 三面図に合致した多面体を得ることができる.

3.2.4 交差禁止式の適用と効果

図 13 の三面図に対し得られる候補物体要素群は

解(1-1)

$$v1=0, v2=0, v3=0, v4=0, v5=0, v6=0, v7=0, v8=0, v9=0, v10=0, v11=0, v12=0, v13=0, v14=0, v15=0$$

$$e1=0, e2=0, e3=0, e4=0, e5=0, e6=0, e7=0, e8=0, e9=0, e10=0, e11=0, e12=0, e13=0, e14=0, e15=0, e16=0, e17=0, e18=0, e19=0, e20=0, e21=0, e22=0, e23=0, e24=0$$

$$f1=0, f2=0, f3=0, f4=0, f5=0, f6=0, f7=0, f8=0, f9=0, f10=0, f11=0, f12=0$$

(注: すべて 0 である)

解(1-2)

$$v1=0, v2=0, v3=1, v4=0, v5=0, v6=0, v7=0, v8=0, v9=1, v10=1, v11=1, v12=1, v13=1, v14=1, v15=1$$

$$e1=0, e2=0, e3=0, e4=0, e5=0, e6=1, e7=1, e8=1, e9=0, e10=0, e11=0, e12=0, e13=0, e14=0, e15=0, e16=1, e17=1, e18=1, e19=1, e20=1, e21=1, e22=1, e23=1, e24=1$$

$$f1=0, f2=0, f3=0, f4=0, f5=0, f6=0, f7=1, f8=1, f9=1, f10=1, f11=1, f12=1$$

解(1-3)

$$v1=1, v2=1, v3=0, v4=1, v5=1, v6=1, v7=1, v8=1, v9=1, v10=1, v11=1, v12=1, v13=1, v14=1, v15=1$$

$$e1=1, e2=1, e3=1, e4=1, e5=1, e6=0, e7=0, e8=0, e9=1, e10=1, e11=1, e12=1, e13=1, e14=1, e15=1, e16=1, e17=1, e18=1, e19=1, e20=1, e21=1, e22=1, e23=1, e24=1$$

$$f1=1, f2=1, f3=1, f4=1, f5=1, f6=1, f7=1, f8=0, f9=0, f10=1, f11=0, f12=1$$

図 11 図 9 に対して, 多面体構成式(式(a)~(f))のみを連立して得られる解

Fig. 11 Solutions for system of Equations (a)-(f) for Fig. 9.

(1-1)

(1-2)

(1-3)

(空)

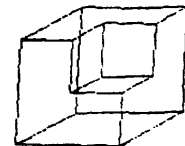


図 12 多面体構成式(式(a)~(f))のみを連立して得られる解
Fig. 12 Solutions for system of Equations (a)-(f) for Fig. 9.

図 14 である。この例を多面体構成式(a), (d), 三面図合致式(g)の連立により解くと、解は図 15 の 13 個になるが、(2-1), (2-2), (2-3), (2-4) の解は多面体を構成しない。これらの解は交差しているが、その交線は存在しないという2面(図 14 の f_9 と f_{11} , f_3 と f_5)を真としている。式(a), (d), (g)に加え、交差禁止式(h), (i)を連立して同じ例を解けば、解は図 15 の (2-5)-(2-13)となり、多面体を構成しない解は排除される。

4. 単一面化, 単一稜線化, 三面図との照合

図 15 の解 (2-5)-(2-13) には、問題点が残されている。すなわち、coplanar な2面により構成される稜線が存在することである。例えば

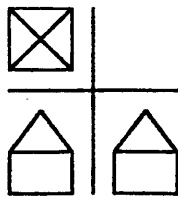


図 13 三面図
Fig. 13 Orthographic views.

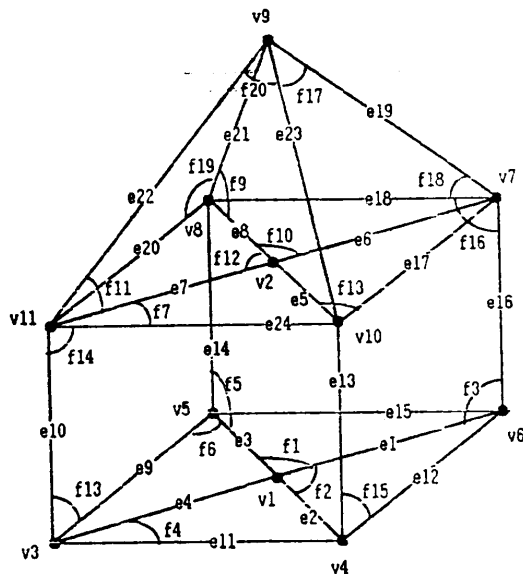


図 14 候補物体要素群
Fig. 14 Candidate elements generated from orthographic views.

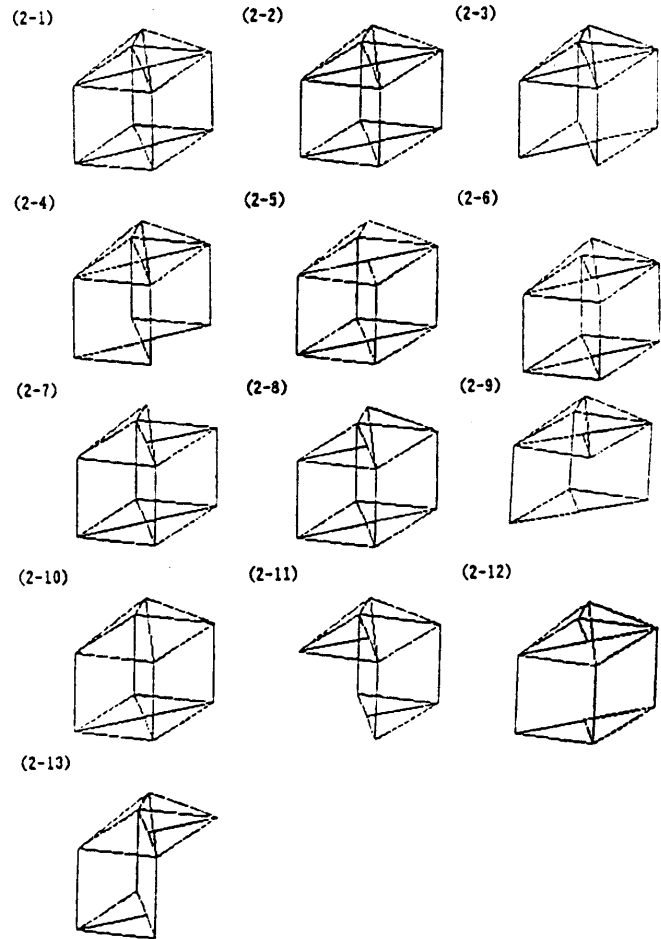


図 15 多面体構成式および三面図合致式(式(a)~(g))のみを連立して得られる解
Fig. 15 Solutions for system of Equations (a)-(g) for Fig. 14.

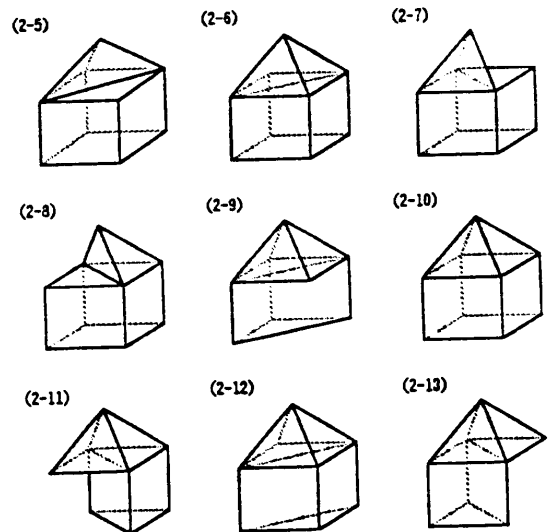


図 16 単一稜線化, 単一面化を施した後の物体
Fig. 16 Objects generated by unifying coplanar faces of surface models (2-5)-(2-13) in Fig. 15.

図 15 の解 (2-5) においては図 14 の f_7, f_{13} に構成される e_8 が存在することである。

このため、後処理として単一稜線化、単一面化をさらに施す。解 (2-5)-(2-13) に対し、単一稜線化、単一面化を施した結果を図 16 に示す。

この中で解 (2-5)-(2-8) は三面図に合致しない。これらには図 13 の元の三面図における平面図中の交差線分が正しく存在しない。このため、さらに、図 16 の物体の稜線と三面図中の線分との対応情報 (この情報は 2 章で述べた候補物体要素の列挙の段階で作成済み) を自動的に調べて、(2-9)-(2-13) の物体のみが所望の物体として得られる。

5. 考 察

5.1 処理時間

本稿で述べた手法は C 言語で IBM 5560 上でインプリメントした。

定理 3.1 により、連立式 (a)-(i) から式 (b), (c), (e), (f) を除いて解いても、その解は同等となることが示されている。しかし、その処理時間に関しては違いがある。表 1 は、図 9 の例を、(a), (d), (g), (h), (i) に対して、式 (b), (c), (e), (f) を種類の組合せで付加して解き、その処理時間を調べた結果である。他の例においても処理時間の長短は、ほぼ同傾向にあった。

この処理時間の違いの傾向として次の 3 点が挙げられる。

- (1) (a), (d) のみは速くなく、(a)-(f) のすべてを用いた方が速い。
- (2) (c), (e) が共にないと遅い。
- (3) (c), (e) のいずれかを用いると速い。
- (4) (b), (f) については速い場合も遅い場合もある。

以上の処理時間の変化は、今回採用した擬似ブール代数による連立式の解法のアルゴリズム⁵⁾ に依存する可能性もあると考える。この点についての今後の考察が必要である。

5.2 手法の検討事項

本稿の擬似ブール代数解法では、物体要素の真偽の決定の際に線形の擬似ブール代数の等式と不等式で表されるものを採用したが、これらは、

- (1) 物体要素間の位相的情報を表す式 (3.2.1 節の式 (a)-(f)),
- (2) 三面図中の線分と物体の稜線との対応を表す式 (式 (g)),
- (3) 共有部分をもたない稜線あるいは面の交差を禁止する式 (式 (h), (i))

に大別され、(3) を除いて位相的情報を表す式が主である。

線形擬似ブール代数解法の前後に、明白な偽物体要素の除去、単一稜線化、単一面化、三面図との照合な

表 1 式の組合せと処理時間の関係

Table 1 Relationship between runtime and combination of Equations (a)-(i).

連 立	式 数	Runtime (sec)
abcdefghi	159	11
abcdeghi	147	9
abcdfghi	147	11
abdefghi	135	10
acdefghi	127	13
abcdghi	135	10
abdeghi	123	9
abdfghi	123	26
acdeghi	115	8
acdfghi	115	12
adefghi	103	11
abdghi	111	27
acdghi	103	7
adeghi	91	6
adfgi	91	17
adghi	79	17

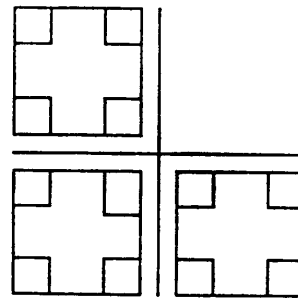


図 17 三面図

Fig. 17 Orthographic views which our method can't be applied to.

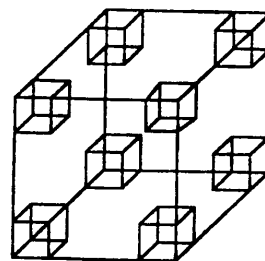


図 18 図 17 から生成される候補物体要素群

Fig. 18 Candidate elements generated from Fig. 17.

どの、いくつかの簡単な探索プロセスを置いた。これらの探索プロセスなしに、すなわち単一稜線化や単一面化などを定式化し代数解法で解くことを可能とするためには、colinear 性や coplanar 性などの幾何学的情報を加味した規則を導入することが必要である。

また、本稿の線形項のみの擬似ブール代数解法で対応できない例として図 17 の三面図がある。この三面図に対して得られる候補物体要素群は図 18 であり、図 18 の候補物体要素群に対して得られるべき解は、図 19 の(A), (B)に示す 2 つである。しかし、本稿の線形擬似ブール代数解法では(B)の解は得られない。

これは、(B)の頂点 v_1 が 2 本の稜線 e_1, e_2 により構成されているが、3 本の稜線を必要とする多面体構成規則 (a) によりこのような解は生成されないためである。この例は、候補頂点・候補稜線が、所望の物体を構成する要素ではなく、所望の物体の稜線または面の継ぎ目となる (その継ぎ目の両側の 2 つの稜線あるいは 2 つの面が、colinear 性や coplanar 性をもつ) 例である。

このような例に対しても代数解法を適用可能とするためには、多面体の真偽決定規則(a), (d)を拡張して、colinear 性や coplanar 性などの幾何学的情報を加味した規則を導入することが必要である。

たとえば、coplanar 性を加味して規則(d)の拡張を試みる。

(d') ある候補稜線が真ならば、その稜線を構成する候補面群のうち、coplanar でない 2 つの面が真である。ある候補稜線が偽ならば、その稜線を構成する候補面群はすべて偽であるか、coplanar な 2 面が真である。

この規則をたとえば次のように非線形項をもつ擬似ブール代数式を用いて定式化する。

すべての $e \in E$ に対して

$$2e + \sum_{\substack{f_i, f_j \text{ は coplanar} \\ f_i, f_j \in F_e}} 2\bar{e} \cdot f_i \cdot f_j$$

$$= \sum_{f \in F_e} f. \tag{d'-1}$$

$$\sum_{\substack{f_i, f_j \text{ は coplanar} \\ f_i, f_j \in F_e}} \bar{e} \cdot f_i \cdot f_j \leq 1. \tag{d'-2}$$

$$e + \sum_{f_i, f_j \text{ は coplanar}} f_i + f_j \leq 2. \tag{d'-3}$$

図 20 にこの規則(d')を例示する。

同様な考察を稜線などに対しても進めれば、代数解法の適用範囲が広がり、また後処理としてのいくつかの探索プロセスをほとんど導入せず、代数式のみで定式化で三面図からの物体自動合成が可能となると考

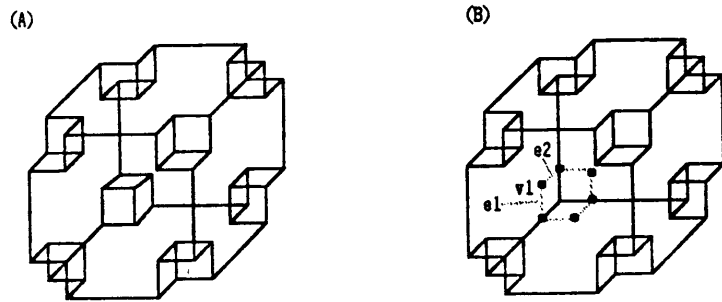
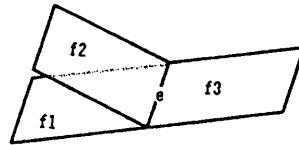


図 19 図 18 から得られるべき解
Fig. 19 Two solutions which should be obtained from Fig. 18.

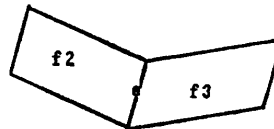


(d'-1)より, $2e + 2\bar{e} \cdot f_1 \cdot f_3 = f_1 + f_2 + f_3$
 (d'-2)より, $\bar{e} \cdot f_1 \cdot f_3 \leq 1$
 (d'-3)より, $e + f_1 + f_3 \leq 2$

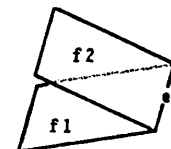
e=1の時 $2 = f_1 + f_2 + f_3$
 $f_1 + f_3 \leq 1$
 解は $f_1=0, f_2=f_3=1$ (解1)
 または $f_1=f_2=1, f_3=0$ (解2)

e=0の時 $2 \cdot f_1 \cdot f_3 = f_1 + f_2 + f_3$
 $f_1 \cdot f_3 \leq 1$
 $f_1 + f_3 \leq 2$
 解は $f_1=f_2=f_3=0$ (解3)
 または $f_1=f_3=1, f_2=0$ (解4)

<解1>



<解2>



<解3>

空

<解4>

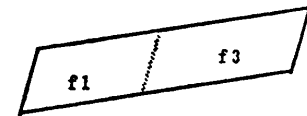


図 20 非線形項を導入した例

Fig. 20 Example introducing non-linear expressions.

える。

さらに、前処理の探索プロセスである明白な偽物体要素の除去についても同様な考察により擬似ブール代数による定式化が可能であると考ええる。

非線形項をもつ擬似ブール代数の等式と不等式の連立式の解法も Hammer により提案されている⁵⁾。しかし、非線形項を導入した場合の処理時間は、線形項のみの擬似ブール代数解法の場合に比べて膨大となるのが一般的である。非線形項の導入の際にはこの処理時間の短縮の問題についての検討も必要となると考える。

6. む す び

偽を含む候補物体要素群から三面図に合致した多面体を合成するために、探索アルゴリズムの提案ではなく、多面体構成の真偽決定規則を簡潔に記述し、これを線形擬似ブール代数により定式化して、真の物体要素を求める方法を提案し、その適用について考察した。

現段階で採用した規則は主として位相的情報を表すものであるため、colinear 性や coplanar 性をもつ物体に適用した場合、5.2 節で検討したとおり問題点が残された。このため、幾何学的情報を加味した非線形項を導入する今後の解決法についての考察も加えた。

参 考 文 献

- 1) 出沢正徳：三面図から物体形成のためのシステム，日本機械学会論文集，Vol. 38, No. 310, pp. 1267-1276 (June 1972)。
- 2) Markowsky, M. A. et al.: Fleshing Out Wire Frame, *IBM J. Res. Develop.*, Vol. 24, No. 5, pp. 582-592 (Sep. 1980)。
- 3) Markowsky, M. A. et al.: Fleshing Out Projections, *IBM J. Res. Develop.*, Vol. 25, No. 6, pp. 934-954 (Nov. 1981)。
- 4) Itoh, K., Ishikawa, M., Fujiu, T. and Suzuki, S.: A Method for Solid Construction from Engineering Draft in Orthographic View, *Proc. of JSST Conference on Recent Advances in Simulation of Complex Systems*, pp. 204-211 (July 1986)。
- 5) Hammer, P. L. et al.: *Boolean Methods in Operations Research*, Springer-Verlag, New York (1968)。

付録 定理 3.1 の証明

定理 1 式(f)は式(d)の必要条件である。

【証明】いま、 f_0 を e_j ($j=1, 2, \dots, n$) が構成しているとする、式(f)は、

$$n \cdot f_0 \leq \sum_{j=1}^n e_j \quad (1)$$

である。ところが、このとき式(d)が成り立っているならば、 $j=1, 2, \dots, n$ に対して、

$$2e_j = \sum_{f \in Fe_j} f \quad (2)$$

である。(2)より、

$$2e_j = f_0 + \sum_{f_i \in Fe_j} f_i, \quad (i \neq 0)$$

$$2e_j - f_0 = \sum_{f_i \in Fe_j} f_i \geq 0, \quad (i \neq 0)$$

(\because すべての i に対して $f_i \geq 0$)

$$2e_j \geq f_0.$$

ここで、 e_j, f_0 の変域 $\{0, 1\}$ を考えれば、

$$e_j \geq f_0. \quad (3)$$

このようにしてできた n 本の不等式(3)の辺々加えると、(1)と一致する。

すべての $f_0 \in F$ について、同様なので、式(f)は式(d)の必要条件である。

定理 2 式(c)は式(a)の必要条件である。

【証明】いま、 e_0 を v_j ($j=1, 2, \dots, n$) が構成しているとする、式(c)は

$$2e_0 \leq \sum_{j=1}^n v_j \quad (4)$$

である。ところが、このとき式(a)が成り立っているならば、 $j=1, 2, \dots, n$ に対して

$$3v_j \leq \sum_{e_i \in Ev_j} e_i \leq |Ev_j|v_j, \quad |Ev_j| \geq 3 \quad (5)$$

である。(5)より、

$$\sum_{e_i \in Ev_j} e_i \leq |Ev_j|v_j,$$

$$e_0 + \sum_{e_i \in Ev_j} e_i \leq |Ev_j|v_j, \quad (i \neq 0)$$

$$|Ev_j|v_j - e_0 \geq \sum_{e_i \in Ev_j} e_i \geq 0, \quad (i \neq 0)$$

(\because すべての i に対して $e_i \geq 0$)

$$|Ev_j|v_j \geq e_0.$$

ここで、 v_j, e_0 の変域 $\{0, 1\}$ と $|Ev_j| \geq 3$ を考えれば、

$$v_j \geq e_0. \quad (6)$$

このようにしてできた n 本の不等式(6)の辺々加えると、

$$n \cdot e_0 \leq \sum_{j=1}^n v_j.$$

稜線に関しては常に、 $n=2$ であることを考えれば、これは(4)と一致する。すべての $e_0 \in E$ について同様のことがいえるので、式(c)は、式(a)の必要条件である。

定理 3 式(e)は、式(a)かつ式(d)であるための必要条件である。

証明に要する性質 1

「 v が f を構成するならば、それらを共通して構成する e が存在する。」

〔証明〕 いま、 f_0 を v_j ($j=1, 2, \dots, n$) が構成しているとする、式(e)は

$$n \cdot f_0 \leq \sum_{j=1}^n v_j$$

である。さて、 f_0 と v_j を共通して構成する e を e_{0j} としよう。このとき、式(a)、式(d)が成り立っているなら、 $j=1, 2, \dots, n$ に対して、(3)より、 $e_{0j} \geq f_0$ 、(6)より、 $v_j \geq e_{0j}$ 。

$$\therefore v_j \geq f_0. \quad (7)$$

後は定理 1 と同様。

定理 4 式(b)は、式(a)かつ式(d)であるための必要条件である。

証明に要する性質 2

「ある 1 点 v を構成する 3 本以上の e の、共通の構成要素となる f は存在しない。」

証明に要する性質 3

「ある 1 点 v を構成する e を構成する f は、その v を構成する。」

〔証明〕 いま、 v_0 を f_j ($j=1, 2, \dots, n$)、 e_k ($k=1, 2, \dots, m$) が構成しているとする、式(b)は、

$$3v_0 \leq \sum_{j=1}^n f_j \leq n \cdot v_0$$

である。 v_0 は f_j を構成しているのだから(7)より、 $v_0 \geq f_j$ であるから、

$$\sum_{j=1}^n f_j \leq n \cdot v_0$$

は、これまでと同様にして証明できる。あとは、式(a)、(d)が成り立つとき、

$$3v_0 \leq \sum_{j=1}^n f_j \quad (8)$$

であることを示せばよい。

式(a)より、

$$\begin{aligned} 3v_0 &\leq e_1 + e_2 + \dots + e_m, \\ 6v_0 &\leq 2e_1 + 2e_2 + \dots + 2e_m, \end{aligned} \quad (9)$$

式(d)より、(9)は、

$$6v_0 \leq \sum_{f_j \in F_{e_1}} f_j + \sum_{f_j \in F_{e_2}} f_j + \dots + \sum_{f_j \in F_{e_m}} f_j \quad (10)$$

となる。 e_1, e_2, \dots, e_m での f_j の重複度を s_j とすると、(10)より、

$$6v_0 \leq \sum_{j=1}^n s_j \cdot f_j \leq \sum_{j=1}^n 2f_j.$$

(\because 性質 2 よりすべての j において $s_j \leq 2$)

\therefore 両辺 2 で割って(8)と一致する。

すべての $v_0 \in V$ について、同様のことがいえるの

で、式(b)は式(a)かつ式(d)であるための必要条件である。

定理 1 - 定理 4 より、「式(a)、(d)がともに成り立つことは、式(a)-(f)がともに成り立つための十分条件である。」

(昭和 62 年 4 月 21 日受付)

(昭和 62 年 11 月 11 日採録)

佐々木 康仁

昭和 39 年生。昭和 61 年上智大学理工学部機械工学科卒業。現在、同大学院理工学研究科機械工学専攻修士課程在学。図面理解を主とするコンピュータビジョンの研究に従事。



CAD 手法全般と AI に興味をもつ。

伊藤 潔 (正会員)



昭和 26 年生。昭和 49 年京都大学工学部情報工学科卒業。昭和 51 年同大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了。昭和 54 年同博士課程修了。京都大学工学博士。昭和 54 年より上智大学理工学部勤務。助手、講師を経て、昭和 60 年より助教授。現在、同理工学部一般科学研究室情報科学部門所属。主として、ソフトウェア工学、シミュレーション手法、図面理解を主とするコンピュータビジョンの研究に従事。計算機援用の様々なシステム・手法に興味をもつ。電子情報通信学会、IEEE 等会員。ISO/TC 184/SC 2 WG 3 (産業用ロボットの安全性) 委員。著訳書:「ソフトウェア開発のためのプロトタイピングツール」(共著)、「並行処理と Unix」(共訳)。

鈴木 誠道 (正会員)



昭和 8 年生。昭和 31 年東京工業大学理学部物理学科卒業。同年 4 月から日本国有鉄道鉄道技術研究所勤務。ノース・カロライナ大学、スタンフォード大学各大学院留学。昭和 51 年より上智大学理工学部機械工学科勤務。現在同教授。東京大学工学博士。昭和 62 年南フロリダ大学客員教授。主として、数値計算法、輸送システム計画、ネットワーク理論、生産ラインの解析等の研究に従事。OR 手法全般とコンピュータの関連に興味をもつ。日本オペレーションズ・リサーチ学会、機械学会、ACM 各会員。著書:「OR 入門 1—線形モデル」(共訳)、「数理計画の応用 (実際編)」(共編著)。