デフォルト推論における準拡張世界とその性質†

村上研二†† 相原恒博†† 四反田秀樹†††

現在，知識情報処理システムで最もよく用いられている論理は述語論理に代表される単調論理である．しかしながら，知識情報処理システムに「常識による推論」や「不完全な知識からの推論」などの，より高度な能力を与えようとすると，この単調性の制約を受けない新しい論理すなわち非単調論理が必要となる．非単調論理の定式化の一つとして，Reiter が定式化したデフォルト推論がある．Reiter は，このデフォルト推論により推論される世界を“拡張世界”と定義し，この世界の持つ種々の性質を議論している．この拡張世界はデフォルト推論の性質を知る上で最も重要な概念であり，これを介してデフォルト論理と従来の一階述語論理との関係が議論される．しかしながら，この拡張世界は与えられた任意のデフォルト理論に対して常に存在するとは限らない．本論文では，Reiter の拡張世界に関する定義を極自然に一般化することにより，Reiter の拡張世界を含む新しい世界（準拡張世界と呼ぶ）を定義する．そして，この準拡張世界が任意のデフォルト理論に対して必ず存在することを示すとともに，準拡張世界と Reiter の拡張世界との関係を明らかにしその有用性を示す．拡張世界は与えられたデフォルト理論の性質を議論する上で極めて重要であり，この意味で存在性の保証された準拡張世界を考えることは重要である．

1. まえがき

現在，知識情報処理システムで最もよく用いられている論理は述語論理に代表される単調論理である．この単調論理には「既存の公理のもとで証明された定理は新しい公理の追加に無関係に常に真である」という定理の成立に関する単調性があり，この性質が定理証明などの手順を極めて容易なものにしている[1]．しかしながら，知識情報処理システムに「常識による推論」や「不完全な知識からの推論」などの，より高度な能力を与えようとすると，この単調論理は必ずしも有利な論理体系であるとは言えない[2)~5)]．すなわち，「存在する不十分な知識のみを用いて，それが含む内容以上の結論を導き出す[3]」というような機能を実現しようとすると，この単調性の制約を受けない新しい論理すなわち非単調論理[6)~12)]が必要となる．

非単調論理の定式化の一つとして，Reiter が定式化したデフォルト推論 (default reasoning)[9] がある．デフォルト推論は従来の一階述語論理にデフォルト式なる推論規則を導入し，不完全な知識のもとでの推論を可能にしたものである．Reiter は，デフォルト推論により推論される世界（wff の集合）を extension（以下，拡張世界と言う）と定義し，この世界の持つ種々の性質を議論している．この拡張世界はデフォルト推論の性質を知る上で最も重要な概念であり，これを介してデフォルト論理と従来の一階述語論理との関係が議論される[13]．しかしながら，この拡張世界は与えられた任意のデフォルト理論（[定義 2.2]）に対して常に存在するとは限らない．このため，与えられたデフォルト理論を準正規デフォルト理論[14] (seminormal default theory) あるいは正規デフォルト理論[15] (normal default theory) と呼ぶ特殊な形に変形し拡張世界を持たせようとする試みや，制限付の拡張世界[16]を定義しその存在性を保証しようとする試みなどがある．しかしながら，与えられたデフォルト理論を変形して拡張世界を求める前者の方法では，得られた拡張世界はもはや元のデフォルト理論の拡張世界ではなく，元のデフォルト理論の性質を議論するには十分ではない．また，制限付の拡張世界を定義する後者の方法では，その定義においてデフォルト式そのものの定義を変更しており，Reiter の定義した拡張世界との関連がつきにくいという難点がある．

そこで本論文では，Reiter の拡張世界に関する定義を極自然に一般化することにより，Reiter の拡張世界を含む新しい世界（準拡張世界と呼ぶ）を定義する．また，この準拡張世界が任意のデフォルト理論に対して必ず存在することを示すとともに，準拡張世界と Reiter の拡張世界との関係を明らかにしその有用性を示す．

拡張世界は与えられたデフォルト理論の性質を議論する上で極めて重要であり，この意味で存在性の保証

† Modified Extension and Its Properties in Default Reasoning by KENJI MURAKAMI, TSUNEHIRO AIBARA (Department of Electronics Engineering, Faculty of Engineering, Ehime University) and HIDEKI SHITANDA (Matsushita Electric Industrial Co., Ltd.).
†† 愛媛大学工学部電子工学科
††† 松下電器産業(株)

された準拡張世界を考えることは重要である．また，実用的な意味からも，例えばデフォルト規則を含む知識ベースを更新する際，新しく加えられたデフォルト規則の影響で知識集合（拡張世界）が存在しなくなるというような場合の対策の一方法（基礎概念）として，存在性の保証された準拡張世界は重要である．

2. デフォルト推論に関する諸定義[9)]

ここでは次章以降で必要となるデフォルト推論に関する主要な定義および定理について述べる．

通常の一階述語論理式（well formed formula, wff と略す）からなる一階述語の言語全体を L と表す．wff が自由変数を含まないとき wff は閉じているという．まずデフォルト式の定義を述べる．

[定義 2.1]（デフォルト式） デフォルト式 d は，$d=a:Mb/c$ で定義される．ただし，a,b,c は閉じた wff である．デフォルト式 d は「a が成り立ち，かつ b が無矛盾（b の否定が証明されない）ならば，c を推論する」ことを表す．a, b, c をそれぞれ，前提（prerequisite），弁明（justification），帰結（consequent）と呼ぶ．a,b,c が閉じた wff であるとき，d を閉じたデフォルト式という．

なお，Reiter は自由変数を持つ wff を含めてデフォルト式を定義しているが，自由変数を具体例(instance)で置き換えたときには閉じた場合と同様になるため本論文では閉じた場合に限定して議論する．

[定義 2.2]（デフォルト理論） デフォルト理論 A は，$A=(D,W)$ で定義される．ここで D はデフォルト式の集合，W は閉じた wff の集合である．特に，D に含まれる各デフォルト式が閉じている場合，A を閉じたデフォルト理論という．

[定義 2.3]（拡張世界） $A=(D,W)$ をデフォルト理論とする．$S\subseteq L$ なる wff の集合 S に対して，$\Gamma(S)$ を以下の3条件 D1—D3 を満たす wff の集合とする．

D1. $W\subseteq\Gamma(S)$

D2. $Th(\Gamma(S))=\Gamma(S)$，（ただし，$Th(A)$ は論理式の集合 A から導かれる定理の集合を表す．）

D3. $a:Mb/c\in D, a\in\Gamma(S), \neg b\notin S$ であれば $c\in\Gamma(S)$

$\Gamma(S)$ の中の最小の集合を $\Gamma_{\min}(S)$ とする．このとき，$\Gamma_{\min}(E)=E$ を満たす wff の集合 E をデフォルト理論 $A=(D,W)$ の拡張世界と定義する．（$\Gamma_{\min}$ を wff の集合 S に対する演算子と考えれば，拡張世界 E は $\Gamma_{\min}$ の不動点である．）

拡張世界は確定的知識の集合 W とデフォルト式により与えられる推論規則から推論される知識の集合と考えることができる．すなわち，拡張世界は次の定理により形式的に表現される．

[定理 2.1] E を $E\subseteq L$ なる閉じた wff の集合，$A=(D,W)$ を閉じたデフォルト理論とする．

$$E_0=W$$

とし，$0\leqq i$ なる i に対して，

$$E_{i+1}=Th(E_i)\cup\{c\mid a:Mb/c\in D,\ a\in E_i,\ \neg b\notin E\}$$

とする．このとき，E が A の拡張世界であるための必要十分条件は

$$E=\cup_{i=0}^{\infty}E_i$$

が成立することである．

（証明） 文献 9) を参照． ■

拡張世界とデフォルト理論について，さらに以下の定義を行う．

[定義 2.4]（生成デフォルト式の集合） $A=(D,W)$ を閉じたデフォルト理論，E を A の拡張世界とする．A に対して E の生成デフォルト式の集合 $GD(E,A)$ を

$$GD(E,A)=\{a:Mb/c\in D\mid a\in E,\neg b\notin E\}$$

と定義する．

[定義 2.5]（デフォルト式の帰結の集合） D をデフォルト式の集合とする．このとき，CONSEQUENTS(D) を

$$\text{CONSEQUENTS}(D)=\{c\mid a:Mb/c\in D\}$$

と定義する．すなわち，CONSEQUENTS(D) は D に含まれるデフォルト式の帰結の集合である．

この GD および CONSEQUENTS を用いて，[定義 2.3] で定義される拡張世界は次のように表される．

[定理 2.2] E を閉じたデフォルト理論 $A=(D,W)$ の拡張世界とすれば，

$$E=Th(W\cup\text{CONSEQUENTS}(GD(E,A))).$$

（証明） 文献 9) を参照． ■

次に，正規デフォルト理論と呼ばれる，デフォルト理論の中の特別の形式の理論を考える．

[定義 2.6]（正規デフォルト式） デフォルト式のうち $a:Mb/b$ の形のデフォルト式を正規デフォルト式と定義する．

[定義 2.7]（正規デフォルト理論） $A=(D,W)$ が閉じたデフォルト理論であり，D に含まれるデフォルト式がすべて正規デフォルト式であるとき，A を閉じた正規デフォルト理論と呼ぶ．

以下に，閉じた正規デフォルト理論に対する重要な性質を述べる．

[定理 2.3] 閉じた正規デフォルト理論 $A=(D, W)$ は少なくとも1つの拡張世界を持つ．

(証明) 文献 9) を参照. ■

[定理 2.4] D と D' を $D' \subseteq D$ なる関係を持つ閉じた正規デフォルト式の集合とし，E' を $A'=(D', W)$ なる閉じた正規デフォルト理論に対する拡張世界の1つとする．すると閉じた正規デフォルト理論 $A=(D, W)$ は次のような拡張世界 E を持つ．

1) $E' \subseteq E$

2) $GD(E', A') \subseteq GD(E, A)$

(証明) 文献 9) を参照. ■

この定理は，「デフォルト式が増加した場合，得られる知識が少なくとも減少することはない」ということを示しており，この性質をデフォルト式に対する準単調性 (semimonotonicity) とよぶ．この性質はデフォルト理論における定理証明 (proof theory) において使用される．

以上述べた，閉じた正規デフォルト理論における「拡張世界の存在性の保証 ([定理 2.3])」と「デフォルト式に対する準単調性 ([定理 2.4])」は極めて重要な性質であるが，閉じた正規デフォルト理論以外の一般のデフォルト理論においては，残念ながらこれらの性質は存在しない[9]．

3. 準拡張世界

ここでは，Reiter の拡張世界に関する定義を極自然に一般化することにより，Reiter の拡張世界を含む新しい世界 (準拡張世界と呼ぶ) を定義する．また，この準拡張世界が任意のデフォルト理論に対して必ず存在すること (準拡張世界の存在性の保証) を示す．

[定義 3.1] (準拡張世界) $A=(D, W)$ をデフォルト理論とする．[定義 2.3] で定義される wff の集合 $\Gamma_{\min}(S)$ に対して，$\Gamma_{\min}(S) \subseteq S$ なる関係を満たす wff の集合 S を考え，そのような S の集合を $\varDelta$ と表す．

$$\varDelta=\{S \mid \Gamma_{\min}(S) \subseteq S\}$$

このとき，$\Gamma_{\min}(S)$ がデフォルト理論 $A=(D, W)$ の準拡張世界であるとは，S が $\varDelta$ の中の極小の集合である場合をいう．ただし，S が $\varDelta$ の中の極小の集合であるとは，$\varDelta$ の中に S に含まれる集合が存在しないことである．

[定義 2.3] ではデフォルト理論 $A=(D, W)$ の拡張世界を $\Gamma_{\min}$ の不動点 (すなわち $\Gamma_{\min}(S)$ と S とが一致する) としていたのに対し，[定義 3.1] では S と $\Gamma_{\min}(S)$ とを異なる世界 ($\Gamma_{\min}(S) \subseteq S$) と考えており，これが新しい準拡張世界を定義する上での基本的な考えとなっている．すなわち，[定義 3.1] において S は準拡張世界を求めるための仮想的な世界であり，その仮想的な世界 S の下で，デフォルト理論 $A=(D, W)$ により導かれる wff の集合を準拡張世界 $\Gamma_{\min}(S)$ と定義している．この場合，2つの世界 S と $\Gamma_{\min}(S)$ とは必ずしも一致する必要はなく (S は $\Gamma_{\min}$ の不動点である必要はなく)，単に S が $\Gamma_{\min}(S) \subseteq S$ を満たす集合 $\varDelta$ の中で極小の集合であることを要請しているだけである．この制限の緩さが準拡張世界の存在性の保証に大きく寄与している．

すなわち，Reiter の拡張世界とここで提案する準拡張世界を比較すると次のようになる．Reiter の拡張世界は「確定的知識 W と，ある知識集合 S を与えることにより決定される (弁明の否定が S に含まれない) デフォルト式から推論される知識集合」として与えられ，この推論により得られた知識集合が S に一致することを要請している．これに対し，提案の準拡張世界は，同じく「確定的知識 W と，ある知識集合 S を与えることにより決定される (弁明の否定が S に含まれない) デフォルト式から推論される知識集合」として与えられるが，この推論により得られた知識集合が S に一致することを要請していない．したがって，両者の直観的な違いは，知識集合を求める際，推論に使用されるデフォルト式の集合をどの程度自由に選択できるかという点にあり，前者に比べ後者の方がはるかに自由な選択が許されることになる．

ここでは一般のデフォルト理論に対して，その準拡張世界が常に存在することを証明する．まず，この証明のために必要となるいくつかの補題を与える．

[補題 3.1] $A=(D, W)$ をデフォルト理論とする．$S \subseteq L$ なる wff の集合 S に対して，$\Gamma_1(S)$ および $\Gamma_2(S)$ が [定義 2.3] の $\Gamma(S)$ の条件 D1—D3 を満たすならば，$\Gamma_1(S) \cap \Gamma_2(S)$ も $\Gamma(S)$ の条件を満たす．

(証明) 1) D1 を満たすこと．

$W \subseteq \Gamma_1(S)$ かつ $W \subseteq \Gamma_2(S)$ のとき，$W \subseteq \Gamma_1(S) \cap \Gamma_2(S)$ が成立することは明らか．

2) D2 を満たすこと．

$Th(\Gamma_1(S))=\Gamma_1(S)$ かつ $Th(\Gamma_2(S))=\Gamma_2(S)$ のとき，$Th(\Gamma_1(S) \cap \Gamma_2(S))=\Gamma_1(S) \cap \Gamma_2(S)$ が成立することを示す．

Th に関する単調性より，

$Th(\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S))\subseteq Th(\Gamma_1(S))$

$Th(\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S))\subseteq Th(\Gamma_2(S))$.

したがって，

$Th(\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S))\subseteq Th(\Gamma_1(S))\cap Th(\Gamma_2(S))$.

今，$Th(\Gamma_1(S))=\Gamma_1(S)$，$Th(\Gamma_2(S))=\Gamma_2(S)$ であるから，

$Th(\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S))\subseteq\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S)$.

一方，Th の性質より，

$\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S)\subseteq Th(\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S))$.

ゆえに，

$Th(\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S))=\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S)$.

3) D3 を満たすこと．

$a:Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_1(S)$, $\neg b\notin S$ のとき $c\in\Gamma_1(S)$ および

$a:Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_2(S)$, $\neg b\notin S$ のとき $c\in\Gamma_2(S)$

が成り立っている．このとき，
$a:Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S)$, $\neg b\notin S$ であれば $c\in\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S)$ が成立することを示す．

$a:Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S)$, $\neg b\notin S$ ならば $a:Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_1(S)$, $b\notin S$ であるから，$c\in\Gamma_1(S)$.

同様に，

$a:Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S)$, $\neg b\notin S$ ならば $a:Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_2(S)$, $b\notin S$ であるから，$c\in\Gamma_2(S)$.

ゆえに，

$a:Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S)$, $\neg b\notin S$ ならば，$c\in\Gamma_1(S)\cap\Gamma_2(S)$. ■

[補題 3.2] $A=(D,W)$ をデフォルト理論とする．$S\subseteq L$ なる任意の wff の集合 S に対して，[定義 2.3] の $\Gamma_{\min}(S)$ は存在する．

（証明） $S\subseteq L$ なる wff の集合 S に対して，[定義 2.3] の条件 D1—D3 を満たす $\Gamma(S)$ の集合を Ω と表す．すると [補題 3.1] より，

$$\Gamma_{\min}(S)=\bigcap_{\Gamma(S)\in\Omega}\Gamma(S)$$

なる $\Gamma_{\min}(S)$ は [定義 2.3] の条件 D1—D3 を満たす最小の集合である．

ところで，wff の言語全体 L はどのような S $(\subseteq L)$ に対しても [定義 2.3] の $\Gamma(S)$ の条件 D1—D3 を満たすので，上記の $\Gamma(S)$ の集合 Ω は空ではない．したがって，任意の wff の集合 S $(\subseteq L)$ に対して [定義 2.3] の $\Gamma_{\min}(S)$ は存在する． ■

[補題 3.3] $A=(D,W)$ をデフォルト理論とする．$S_1, S_2\subseteq L$ なる任意の wff の集合 S_1 および S_2 に対して，$S_1\subseteq S_2$ であれば $\Gamma_{\min}(S_2)\subseteq\Gamma_{\min}(S_1)$ が成立する．

（証明） $\Gamma_{\min}(S_1)$ の定義より，

1) $W\subseteq\Gamma_{\min}(S_1)$

2) $Th(\Gamma_{\min}(S_1))=\Gamma_{\min}(S_1)$.

また，

3) $a:Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_{\min}(S_1)$, $\neg b\notin S_2$ のとき $S_1\subseteq S_2$ であるから，$a:Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_{\min}(S_1)$, $\neg b\notin S_1$ でもある．このとき $\Gamma_{\min}(S_1)$ の定義より，$c\in\Gamma_{\min}(S_1)$ が成立している．

したがって，$\Gamma_{\min}(S_1)$ は [定義 2.3] の $\Gamma(S_2)$ の条件を満たす．

一方，$\Gamma_{\min}(S_2)$ は $\Gamma(S_2)$ の集合の中で最小の集合であるから $\Gamma_{\min}(S_2)\subseteq\Gamma_{\min}(S_1)$ が成立する． ■

この補題は $\Gamma_{\min}(S)$ が S に対して単調減少であることを示すものである．

以上の補題を用いて，準拡張世界の存在性に関する次の定理を証明する．

[定理 3.1] 任意のデフォルト理論 $A=(D,W)$ に対して，その準拡張世界は存在する．

（証明） $S=\phi$ のとき，$\Gamma_{\min}$ の定義より，$W\subseteq\Gamma_{\min}(\phi)$ であるから，$\phi\subseteq\Gamma_{\min}(\phi)$ ($\because$ $\phi\subseteq W$) である．また，$S=L$ (L は wff の言語全体) のとき，$\Gamma_{\min}(L)=Th(W)$ であるから，$\Gamma_{\min}(L)\subseteq L$ ($\because$ $Th(W)\subseteq L$) である．すなわち，$S=\phi$ のとき $S\subseteq\Gamma_{\min}(S)$ であり，$S=L$ のとき $\Gamma_{\min}(S)\subseteq S$ である．ところで，[補題 3.2] および [補題 3.3] より，任意の S に対して $\Gamma_{\min}(S)$ は存在し，S に対して単調減少であるから，上記の ϕ と L との間に $\Gamma_{\min}(S)\subseteq S$ を満たす極小の集合 S は必ず存在し，その S に対する $\Gamma_{\min}(S)$ が存在する．したがって，任意のデフォルト理論 $A=(D,W)$ に対して，その準拡張世界は存在する． ■

以上の証明により，任意のデフォルト理論に対して準拡張世界が存在することが示された．以下，いくつかの例題に対してその準拡張世界を求め，従来の拡張世界との比較を行う．なお，ここで用いる P,Q,R 等の文字はすべて命題を表すものとする．

[例題 3.1] 次のデフォルト理論 $A=(D,W)$ を考える．

$D=\{:MP/Q, Q:MR/\neg P, :M\neg P/\neg P\}$

$W=\phi$

このデフォルト理論に対する準拡張世界は，$Th(\{\neg P\})$ および $Th(\{Q\})$ の2個存在する．このうち，$Th(\{\neg P\})$ に対する極小集合 S は $Th(\{\neg P\})$ であり，$\Gamma_{\min}(S)=S$ が成立しているので，準拡張世界 $Th(\{\neg P\})$ は拡張世界でもある．これに対して，$Th(\{Q\})$ に対する極小集合 S は $Th(\{P,Q,\neg R\})$ であり，$Th(\{Q\})$ は

準拡張世界ではあるが拡張世界ではない．

[例題 3.2] 次のデフォルト理論 $A=(D, W)$ を考える．

$D=\{: MP/\neg Q\}$

$W=\{Q\}$

このデフォルト理論に対する準拡張世界は $Th(\{Q\})$ の1個であり，これに対する極小集合 S は $Th(\{\neg P, Q\})$ である．なお，この場合の拡張世界は存在しない．

[例題 3.3] 次のデフォルト理論 $A=(D, W)$ を考える．

$D=\{: MP/Q, Q: MR/\neg P\}$

$W=\phi$

このデフォルト理論に対する準拡張世界は，$Th(\{Q\})$ および ϕ の2個存在する．このうち，$Th(\{Q\})$ に対する極小集合 S は $Th(\{Q, \neg R\})$ であり，ϕ に対する極小集合 S は $Th(\{\neg P\})$ である．なお，この場合の拡張世界は存在しない．

[例題 3.4] 次のデフォルト理論 $A=(D, W)$ を考える．

$D=\{: MP/\neg Q, : MR/Q\}$

$W=\phi$

このデフォルト理論に対する準拡張世界は，$Th(\{Q\})$ および $Th(\{\neg Q\})$の2個存在する．このうち，$Th(\{Q\})$ に対する極小集合 S は $Th(\{\neg P, Q\})$ であり，$Th(\{\neg Q\})$ に対する極小集合 S は $Th(\{\neg R, \neg Q\})$ である．なお，この場合の拡張世界は存在しない．

[例題 3.5] 次のデフォルト理論 $A=(D, W)$ を考える．

$D=\{: MP/Q, : MP/\neg Q\}$

$W=\phi$

このデフォルト理論に対する準拡張世界は ϕ の1個であり，これに対する極小集合 S は $Th(\{\neg P\})$ である．なお，この場合の拡張世界は存在しない．

[例題 3.6] 次のデフォルト理論 $A=(D, W)$ を考える．

$D=\{P: MQ/\neg P\}$

$W=\{P\}$

このデフォルト理論に対する準拡張世界は $Th(\{P\})$ の1個であり，これに対する極小集合 S は $Th(\{P, \neg Q\})$ である．なお，この場合の拡張世界は存在しない．

[例題 3.7] 次のデフォルト理論 $A=(D, W)$ を考える．

$D=\{: MP/\neg P\}$

$W=\{Q\}$

このデフォルト理論に対する準拡張世界は $Th(\{Q\})$ の1個であり，これに対する極小集合 S は $Th(\{\neg P, Q\})$ である．なお，この場合の拡張世界は存在しない．

[例題 3.8] 次のデフォルト理論 $A=(D, W)$ を考える．

$D=\{: MP/\neg Q, : M\neg P/\neg Q\}$

$W=\{Q\}$

このデフォルト理論に対する準拡張世界は $Th(\{Q\})$ の1個であり，これに対する極小集合 S は wff の言語全体 L である．なお，この場合の拡張世界は存在しない．

4. 準拡張世界の性質

ここでは，前章で定義した準拡張世界の持つ性質について述べる．

拡張世界の [定理 2.1] と同様に，準拡張世界は次の定理により形式的に表現される．

[定理 4.1] S を $S \subseteq L$ なる閉じた wff の集合，$A=(D, W)$ を閉じたデフォルト理論とする．

$E_0=W$

とし，$0 \leqq i$ なる i に対して，

$$E_{i+1}=Th(E_i) \cup \{c \mid a: Mb/c \in D, a \in E_i, \neg b \notin S\}$$

とすると，$\cup_{i=0}^{\infty} E_i$ が A の準拡張世界であるための必要十分条件は

$\cup_{i=0}^{\infty} E_i \subseteq S$

かつ，S より小さい集合でこの関係を満たすものが存在しないことである．

(証明) [定理 2.1] と準拡張世界の定義より明らか． ■

拡張世界の [定義 2.4] と同様に，準拡張世界における生成デフォルト式の集合を次のように定義する．

[定義 4.1] (準拡張世界の生成デフォルト式の集合) $A=(D, W)$ を閉じたデフォルト理論，$\Gamma_{\min}(S)$ を A の準拡張世界とする．A に対して準拡張世界 $\Gamma_{\min}(S)$ の生成デフォルト式の集合 $GD'(\Gamma_{\min}(S), A)$ を

$$GD'(\Gamma_{\min}(S), A) = \{a: Mb/c \in D \mid a \in \Gamma_{\min}(S), \neg b \notin S\}$$

と定義する．

この GD′ および [定義 2.5] の CONSEQUENTS を用いて準拡張世界は次のように表される．

[定理 4.2] $\Gamma_{\min}(S)$ を閉じたデフォルト理論 $A=(D, W)$ の準拡張世界とすれば，

$$\Gamma_{\min}(S) = Th(W \cup \mathrm{CONSEQUENTS}(GD'(\Gamma_{\min}(S), A))).$$

(証明) [定理 2.2]，[定義 4.1] および準拡張世界の定義より明らか. ■

次に，準拡張世界を与える wff の極小集合の性質について述べる.

[定理 4.3] 準拡張世界に対する極小集合 S は，複数個存在する場合がある.

(証明) 以下に示すデフォルト理論 $A=(D, W)$ はそのような例である.

$$D=\{: M(P\wedge Q)/\neg R,\ : MS/R\}$$
$$W=\phi$$

このデフォルト理論に対する準拡張世界は $Th(\{R\})$ および $Th(\{\neg R\})$ の2個存在する. このうち，$Th(\{R\})$ に対する極小集合 S は $Th(\{\neg Q, R\})$ および $Th(\{\neg P, R\})$ であり，複数個存在する. ■

次に，準拡張世界の包含関係に関する性質を述べる. ある与えられたデフォルト理論に対して，準拡張世界が複数個存在する場合がある. これは拡張世界の場合も同様であるが，これらの準拡張世界の間には拡張世界の場合と異なり次のような性質がある.

[定理 4.4] 与えられたデフォルト理論に対して，包含関係のある準拡張世界が存在する場合がある.

(証明) 以下に示すデフォルト理論 $A=(D, W)$ はそのような例である.

$$D=\{: M(P\wedge Q)/\neg R,\ : MS/R,\ : MQ/T\}$$
$$W=\phi$$

このデフォルト理論に対する準拡張世界は $Th(\{R\})$, $Th(\{R, T\})$ および $Th(\{\neg R, T\})$ の3個存在する. このうち，$Th(\{R\})$ に対する極小集合 S は $Th(\{\neg Q, R\})$ であり，$Th(\{R, T\})$ に対する極小集合 S は $Th(\{\neg P, R, T\})$ であり，$Th(\{\neg R, T\})$ に対する極小集合 S は $Th(\{\neg R, \neg S, T\})$ である. このとき，準拡張世界 $Th(\{R\})$ および $Th(\{R, T\})$ の間には，$Th(\{R\})\subset Th(\{R, T\})$ なる包含関係が存在する. ■

なお，Reiter の拡張世界では包含関係にある拡張世界は存在しない (文献9)，[定理 2.4] 参照). したがって，この定理は Reiter の拡張世界と準拡張世界との違いを示すものである.

次に準拡張世界と従来の拡張世界との関係について考察する. 両者の関係は以下の定理で与えられる.

[定理 4.5] デフォルト理論 $A=(D, W)$ が E を拡張世界として持てば，それは準拡張世界でもある.

(証明) $A=(D, W)$ の拡張世界 E は，[定義 2.3] より $\Gamma_{\min}(E)=E$ を満たしている. 今，$\Gamma_{\min}(S)\subseteq S$ を満たし，$S\subset E$ なる wff の集合 S が存在すると仮定する. すると，$\Gamma_{\min}$ の単調減少の性質 ([補題 3.3]) より，$\Gamma_{\min}(E)\subseteq\Gamma_{\min}(S)$ であるから，

$$E=\Gamma_{\min}(E)\subseteq\Gamma_{\min}(S)\subseteq S\subset E.$$

これは矛盾である. したがって，$\Gamma_{\min}(S)\subseteq S$ を満たし $S\subset E$ なる wff の集合 S は存在しない. すなわち，E が準拡張世界である. ■

この定理は本論文で提案した準拡張世界の定義が従来の拡張世界を含む，より一般化したものであることを示している.

[定理 4.6] デフォルト理論 $A=(D, W)$ において，$\Gamma_{\min}(S)$ が準拡張世界であり，かつ拡張世界でないならば，$D'\subset D$ なる関係を満たすデフォルト理論 $A'=(D', W)$ で $\Gamma_{\min}(S)$ を拡張世界として持つものが存在する.

(証明) $\Gamma_{\min}(S)$ はデフォルト理論 $A=(D, W)$ の準拡張世界であり拡張世界ではないから，$\Gamma_{\min}(S)\subset S$ が成立している. ただし，S は $\Gamma_{\min}(S)\subset S$ を満たす極小の集合である. 今，D' を次のように定義する.

$$D'=D-\{a: Mb/c\in D \mid \neg b\in S-\Gamma_{\min}(S)\}$$

以下に，$\Gamma_{\min}(S)$ がデフォルト理論 $A'=(D', W)$ の拡張世界であることを示す.

$\Gamma_{\min}(S)$ を E とおく. $\Gamma_{\min}(S)$ はデフォルト理論 $A=(D, W)$ の準拡張世界であるから，[定義 2.3] の条件 D1—D3 を満たす. すなわち，

D1. $W\subseteq\Gamma_{\min}(S)$

D2. $Th(\Gamma_{\min}(S))=\Gamma_{\min}(S)$

D3. $a: Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_{\min}(S)$, $\neg b\notin S$ であれば $c\in\Gamma_{\min}(S)$.

今，D3 における $a: Mb/c\in D$, $a\in\Gamma_{\min}(S)$, $\neg b\notin S$ なる条件の代わりに，$a: Mb/c\in D'$, $a\in\Gamma_{\min}(S)$, $\neg b\notin E$ なる条件を考えれば，両条件は同一であるから，次の関係が成立している.

D3′. $a: Mb/c\in D'$, $a\in\Gamma_{\min}(S)$, $\neg b\notin E$ であれば $c\in\Gamma_{\min}(S)$.

以上の D1, D2 および D3′ より，上記の $\Gamma_{\min}(S)$ は $\Gamma_{\min}(E)$ であり，$\Gamma_{\min}(E)=E$ が成立している. すなわち，$\Gamma_{\min}(S)$ はデフォルト理論 $A'=(D', W)$ の拡張世界である. ■

[定理 4.6] の結果と S が $\Gamma_{\min}(S)\subset S$ を満たす極小の集合であることから，準拡張世界の性質について次のことがわかる．与えられたデフォルト理論 $A=(D, W)$ が拡張世界を持たないとする．このとき，デフォルト式の集合 D から“なるべく小さな集合”を取り除いてできる新しいデフォルト理論 $A'=(D', W)$ が拡張世界 E を持てば，この E がデフォルト理論 $A=(D, W)$ の準拡張世界である．元のデフォルト式の集合 D から取り除かれた“なるべく小さな集合”は，デフォルト理論 $A=(D, W)$ において拡張世界が存在しない原因となったデフォルト式の集合であり，[定理 4.6] の証明にもあるように $D-D'=\{a : Mb/c\in D \mid \neg b\in S-\Gamma_{\min}(S)\}$ で与えられる．そして，この“なるべく小さな集合”の取り方の個数がデフォルト理論 A に対する準拡張世界の個数を与える．このように [定理 4.6] は準拡張世界と拡張世界との関係を表す極めて重要な定理となっており，この準拡張世界を手がかりにデフォルト理論 A' の性質，さらにはデフォルト理論 A の性質も知ることが可能となる．

なお，準拡張世界を求めることなく，与えられたデフォルト理論から直接，拡張世界が存在しない原因となったデフォルト式の集合 $(D-D')$ を特定することは一般には困難であり，このことからも準拡張世界は重要な意味を持つ．

次の例は上記の関係を説明するものである．

[例題 4.1] 次のデフォルト理論 $A=(D, W)$ を考える．

$$D=\{: MP/\neg Q, : M\neg P/Q\}$$
$$W=\phi$$

このデフォルト理論に対する準拡張世界は，$Th(\{Q\})$ および $Th(\{\neg Q\})$ の2個存在する．このうち，$Th(\{Q\})$ に対する極小集合 S は $Th(\{\neg P, Q\})$ であり，$Th(\{\neg Q\})$ に対する極小集合 S は $Th(\{P, \neg Q\})$ である．

なお，この場合の拡張世界は存在しない．

準拡張世界 $Th(\{Q\})$ に関して，$Th(\{Q\})$ を拡張世界として持つデフォルト理論 A' は

$$D'=\{: M\neg P/Q\}$$
$$W=\phi.$$

また，準拡張世界 $Th(\{\neg Q\})$ に関して，$Th(\{\neg Q\})$ を拡張世界として持つデフォルト理論 A' は

$$D'=\{: MP/\neg Q\}$$
$$W=\phi.$$

いずれの場合も $D'\subset D$ が成立している．

なお，[定理 4.6] の性質をデフォルト理論における単調性という立場から見れば，かつて拡張世界であったものがデフォルト式の追加によって拡張世界でなくなり，準拡張世界の形で残っていると考えられる．ただし，[定理 4.6] は準拡張世界において，デフォルト式に対する準単調性の性質（[定理 2.4]）が存在することを主張するものではない．すなわち，デフォルト理論 $A=(D, W)$ における準拡張世界が，$D'\subseteq D$ なる関係のすべてのデフォルト理論 $A'=(D', W)$ の（準）拡張世界と一致する（あるいは包含する）ことを主張するものではないことに注意を要する．この準拡張世界におけるデフォルト式に対する準単調性に関しては次の定理が成立する．

[定理 4.7] 準拡張世界において，デフォルト式に対する準単調性の性質は存在しない．

（証明） 次のデフォルト理論は，デフォルト式に対する準単調性の性質の存在に対する反例である．

次の2つのデフォルト理論 $A_1=(D_1, W)$, $A_2=(D_2, W)$ を考える．

$$D_1=\{: MP/\neg Q, : MR/S\}$$
$$D_2=\{: MP/\neg Q, : MR/S, : MR/\neg R\}$$
$$W=\{Q\}$$

デフォルト理論 A_1 に対する準拡張世界は $Th(\{Q, S\})$ の1個であり，これに対する極小集合 S は $Th(\{\neg P, Q, S\})$ である．一方，デフォルト理論 A_2 に対する準拡張世界も $Th(\{Q\})$ の1個であり，これに対する極小集合 S は $Th(\{\neg P, Q, \neg R\})$ である．すなわち，この場合 $D_1\subseteq D_2$ であるにもかかわらず，その準拡張世界については $Th(\{Q, S\})\supset Th(\{Q\})$ であり，デフォルト式に対する準単調性は成立していない． ■

なお，Łukaszewicz の定義した拡張世界ではデフォルト式に対する準単調性の性質がある（文献 16)，[定理 5.3] 参照)．したがって，この定理は Łukaszewicz の拡張世界と本論文で提案した準拡張世界との違いを示すものである．

5. む す び

Reiter はデフォルト推論において拡張世界を定義し，これをデフォルト推論により得られる知識の集合として位置付けた．そして，この拡張世界を介してデフォルト論理の持つ種々の性質を議論した．しかしながら，この拡張世界は与えられたデフォルト理論に対して存在しないこともある．本論文では，Reiter の拡張世界に関する定義を極自然に一般化することによ

り，Reiter の拡張世界を含む新しい準拡張世界を提案し，その性質について議論した．その結果，この準拡張世界は任意のデフォルト理論に対してその存在性が保証されること等，種々の興味ある性質を有することが明らかとなった．この準拡張世界は準拡張世界を与える極小の知識の集合の下で決定される．したがって，この極小の知識の集合を，あるエージェントを取り巻く世界（環境）と見れば，得られる準拡張世界はこの環境の下でエージェントが持ち得る（デフォルト推論可能な）知識の集合とも見ることができ，Reiter の拡張世界とは異なった見地からデフォルト推論を見直すことができる．

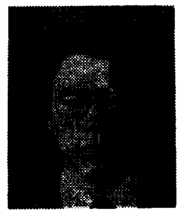
ところで，今回提案した準拡張世界においてはデフォルト式に対する準単調性の性質は存在しない（[定理 4.7]）．したがって，このことに関しては Reiter の拡張世界の場合と同様の問題点，すなわちこの準拡張世界の下での定理証明（proof theory）は容易ではない，という問題点が存在する．この点に関する検討は今後の課題である．

謝辞 本研究の一部は文部省科学研究費補助金，特定研究「多元知識情報」によるものである．

参考文献

1) 長尾，渕：論理と意味，岩波書店，東京 (1983).
2) 中島秀之：論理に基づく知識の表現，情報処理，Vol. 26, No. 12, pp. 1512-1519 (1985).
3) 大須賀節雄：知識の獲得と学習，ibid., pp. 1520-1528 (1985).
4) 松本裕治：知識表現一論理的アプローチに焦点を当てて一，情報処理，Vol. 27, No. 8, pp. 915-923 (1986).
5) 相田 仁：デフォルトを用いた推論と非単調論理，人工知能学会誌，Vol. 2, No. 1, pp. 6-13 (1987).
6) Doyle, J.: A Truth Maintenance System, *Artif. Intell.*, Vol. 12, No. 3, pp. 231-272 (1979).
7) de Kleer, J.: An Assumption-based TMS, *Artif. Intell.*, Vol. 28, No. 2, pp. 127-162 (1986).
8) McCarthy, J.: Circumscription—A Form of Non-Monotonic Reasoning, *Artif. Intell.*, Vol. 13, No. 1/2, pp. 27-39 (1980).
9) Reiter, R.: A Logic for Default Reasoning, ibid., pp. 81-132.
10) McDermott, D. and Doyle, J.: Non-Monotonic Logic I, ibid., pp. 41-72.
11) McDermott, D.: Nonmonotonic Logic II: Nonmonotonic Modal Theories, *J. ACM*, Vol. 29, No. 1, pp. 33-57 (1982).
12) Moore, R.C.: Semantical Considerations on Nonmonotonic Logic, *Artif. Intell.*, Vol. 25, No. 1, pp. 75-94 (1985).
13) 相原，村上，馬場口，四反田：モデル理論に基づくデフォルト論理の基礎的考察，情報処理学会論文誌，Vol. 28, No. 2, pp. 109-116 (1987).
14) Reiter, R. and Criscuolo, G.: On Interacting Defaults, *Proc. 7th IJCAI*, pp. 270-276 (1981).
15) Łukaszewicz, W.: Two Results on Default Logic, *Proc. 9th IJCAI*, pp. 459-461 (1985).
16) Łukaszewicz, W.: Considerations on Default Logic, *Proc. AAAI, Non-monotonic Reasoning Workshop*, pp. 165-193 (1984).

（昭和 62 年 4 月 15 日受付）
（昭和 62 年 10 月 14 日採録）



村上 研二（正会員）

昭和 23 年生．昭和 46 年愛媛大学工学部電気工学科卒業．昭和 48 年同大学院修士課程修了．同年同大学工学部電子工学科助手．現在，同助教授．工学博士．しきい値論理，非単調論理，連想形記憶，画像処理などの研究に従事．電子情報通信学会，人工知能学会，IEEE などの会員．

相原 恒博（正会員）

昭和 5 年生．昭和 30 年愛媛大学工学部電気工学科卒業．昭和 37 年同大助手，現在同大学工学部電子工学科教授．工学博士．主としてしきい値論理の研究に従事してきたが，近年はパターン認識，画像処理，非単調論理などの研究に従事．電子情報通信学会，人工知能学会，IEEE などの会員．

四反田秀樹（正会員）

昭和 33 年生．昭和 56 年愛媛大学工学部電子工学科卒業．昭和 58 年同大学院修士課程修了．同年松下電器産業(株)入社．同社システム研究所に在籍．昭和 62 年 1 月より工業技術院電子技術総合研究所に留学．現在に至る．この間，非単調推論の理論研究，「つくば博用似顔絵ロボット」システム開発，LAN をベースとした分散処理技術開発と幅広い研究開発に従事．