K-020

２値論理関数の簡単化に関する教育方法の提案

Proposal on an educational method for minimizing two-valued functions

金光智幹 † 荒木智行 †
Tomoki KANAMITSU † Tomoyuki ARAKI †
† 広島工業大学 工学部 電子情報工学科

1 はじめに

本報告は情報系および電気系の学部学生が論理関数およびそれに対応した論理回路を学び [4]，回路規模を小さくする方法として，論理関数の簡単化を学ぶ際に有用な定理となる「Nelson の定理 [1]」について論じる．論理関数の簡単化は一般に以下の２つのステップを通して行われる．

(1) 変数と NOT,AND,OR で表現される論理関数の主項展開を求める．

(2) 主項の中から他の主項によって包含される主項を削除する．

尚，これらのステップは論理関数の最簡（加法）形式が以下の条件により定義されることを前提としている．

(1) 積項数が最小.

(2) 積項数が同じなら文字数最小.

本報告では，上の定義の (1) に相当する主項展開を求めることを学部生に教えやすい方法で論じる．

通常，主項を求めるためるの手法を初学者に直感的に理解できるようにするためのツールとしてカルノー図がある．カルノー図は，４変数までの論理関数に関しては２次元平面内に表示できて便利である．しかしながら５変数以上になると複数の２次元平面を思考の中で抽象的につなぎ合わせる必要がある．本報告で提案する手法は，図 1 のような半順序関係 [2] を２次元平面内で使う方法であり，カルノー図と同程度にビジュアルな学習を可能にするものである．利用する半順序関係のハッセ図は５変数以上でも２次元平面内に図示することができる．

さらに本報告では，半順序関係 ($\preceq$) のハッセ図を使って，Nelson の定理の仕組みを直感的に理解し，その応用として主項展開を得ることを最後に論じる．

2 諸準備

定義 1 （論理式）

(1) 定数 1,0, 変数 $x_i (i = 1, \cdots, n)$ は論理式である．

(2) f,g が論理式であれば $\sim f$，$f \cdot g$，$f \vee g$ は論理式である．

(3) 以上で定まるもののみが論理式である．

尚，以降，論理式と論理関数を誤りの恐れがない限り同一視する．変数 x_i は２値論理の場合には $x_i \in$ $V_2 = \{0, 1\}$ であり，*B-3* 値論理 *[2]* の場合は $x_i \in V_3 = \{0, 1/2, 1\}$ とする．また論理演算は $\sim x = 1-x$, $x_1 \cdot x_2 = min(x_1, x_2)$，$x_1 \vee x_2 = max(x_1, x_2)$ と定義されているものとする．以上の演算は変数が V_2 の値をとるとき２値論理関数となる．

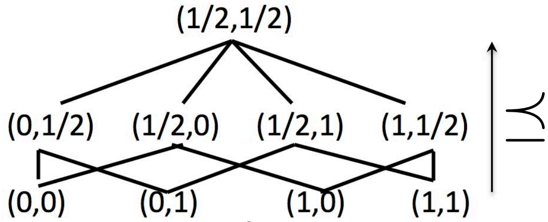

図 1: $V_3{}^2$ のハッセ図

定義 2 複数の文字（x_i *or* $\sim x_i$）の積 *(*$\cdot$*)* を積項といい和 *(*$\vee$*)* を和項という．論理関数が積項の和（$\vee$）で表現されているとき加法標準形といい，全ての積項がすべての変数を含むとき主加法標準形という．また和項の積 *(*$\vee$*)* で表現されているとき乗法標準形といい，全ての和項が全ての変数を含むとき主乗法標準形という．

定義 3 （半順序関係 $\preceq$ *[2]*）$V_3 = \{0, 1/2, 1\}$ の元に $0 \preceq 1/2$，$1 \preceq 1/2$，$i \preceq i (i \in V_3)$ のように半順序関係 $\preceq$ を定義する．また $V_3{}^n$ の元に対して $(x_1, \cdots, x_n) \preceq (y_1, \cdots y_n)$ が成立するとは $\forall i (x_i \preceq y_i)$ が成立することとする．

例 1 $n = 2$ のとき $V_3{}^2$ のハッセ図は図 *1* のようになる．

定理 1 ２値論理関数は，$B-3$ 値論理関数の特殊な場合である． （証明略）

定義 4 f を $B-3$ 値論理関数とする．f の積項 $\beta_i = x_1{}^{e^i{}_1} \cdot \cdots \cdot x_n{}^{e^i{}_n}$ と $(e^i{}_1, \cdots, e^i{}_n) \in V_3{}^n$ を以下のように対応させる．

$$x_k^{e_k^i} = \begin{cases} x_k & (e_k{}^i = 1 \text{ のとき }), \\ 1 & (e_k{}^i = 1/2 \text{ のとき }), \\ \sim x_k & (e_k{}^i = 0 \text{ のとき }). \end{cases} \tag{1}$$

例 2 $n = 3$ とする．$(1, 0, 1) \in V_2$ に対応する積項は $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ である．また $(0, 1/2, 0) \in V_3$ に対応する積項は $\sim x_1 \cdot \sim x_3$ である．

定義 5 f を $B-3$ 値論理関数とする．f の和項 $\beta_i = x_1{}^{e^i{}_1} \vee \cdots \vee x_n{}^{e^i{}_n}$ と $(e^i{}_1, \cdots, e^i{}_n) \in V_3{}^n$ を以下のように対応させる．

$$x_k^{e_k^i} = \begin{cases} \sim x_k & (e_k{}^i = 1 \text{ のとき }), \\ 0 & (e_k{}^i = 1/2 \text{ のとき }), \\ x_k & (e_k{}^i = 0 \text{ のとき }). \end{cases} \tag{2}$$

例 3 $n=3$とする．$(1,0,1)\in V_2$ に対応する和項は $\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3$ である．また $(0,1/2,0)\in V_3$ に対応する和項は $x_1 \vee x_3$ である．

半順序集合 $< V_3{}^n, \preceq >$ は図 1 のように $n>4$ の場合にも２次元平面に記述することが可能であることは明らかである．このとき以下の補題が成立する．

補題 1 α_1，α_2 を $V_2{}^n$ の元 v_1, v_2 に対応する積項とする．このとき $v_3 \in V_3{}^n - V_2{}^n$ が存在し，$v_1 \preceq v_3$ かつ $v_2 \preceq v_3$ であるとき，v_3 に対応する積項 α_3 に α_1，α_2 は包含される． （証明略）

補題 2 α_1，α_2 を $V_3{}^n$ の元 v_1, v_2 に対応する積項とする．このとき $v_3 \in V_3{}^n - V_2{}^n$ が存在し，$v_1 \preceq v_3$ かつ $v_2 \preceq v_3$ であるとき，v_3 に対応する積項 α_3 に α_1，α_2 は包含される． （証明略）

定理 2 $f=\alpha_1 \vee \alpha_2 \cdots \vee \alpha_m$ を加法形式で表現された 2 値論理関数とする．（ただし $\alpha_i (i=1,\cdots,m)$ は積項）このとき補題 *2* を繰り返し積項に施し，これ以上 V_3^n の上界の元に対応する積項なくなったとき f は主項展開である． （証明略）

定理 2 より主項を求める作業は，変数の数を n とすると $n>4$ でも 2 次元平面で作図しながら行えることがわかる．

3 主項展開と Nelson の定理

Nelson は記号論理学の言葉を用いて古典論理における論理関数の主項展開を導出する方法を導いた [1]．しかしながら Nelson の手法は初学者には理解が困難である．しかしながら 2 節において定義した半順序集合 $< V_3^n, \preceq >$ およびその元に対応する積項，和項を考察することにより Nelson の定理は容易に導ける．[1]

２変数の２値論理関数 f を考える．例えば図 1 において極小元である $(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ は V_2^2 の元であり，カルノー図に当てはめるとカルノー図の各セルに対応する．したがって $(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ の中で関数 f の値を 0 にするものを選び出して，定義 5 にしたがって対応する和項を求める．それらを $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$($\beta_i$ は和項) とすると $f=\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_m$ は f の主乗法標準形である．

補題 3 f を構成する和項 β_i を新たに加法標準形 $g=\beta_i$ とおく．加法標準形としてみた g は主項展開である．（証明略）

補題 4 加法標準形で表された 2 値論理関数 f，g がそれぞれ主項展開で表現されているものとする．そのとき $f \cdot g$ を加法形式に展開した式は主項展開である． （証明略）

定理 3 （*Nelson* の定理）$f=\beta_1 \cdots \beta_m$ を主乗法標準形で表現された 2 値論理関数とする．このとき f を加法標準形に展開した式は f の主項展開である．
（証明）補題 *3*，補題 *4* より明らか． （証明終）

[1] 文献 [3] において Nelson の定理はファジィ論理に拡張されているが 2 値論理に関しては論じられてはいない．

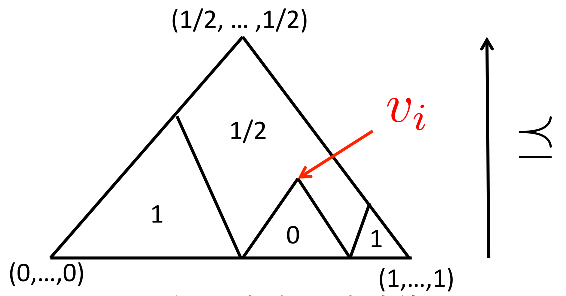

図 2: 和項に対応する極大値 v_i

定理 3 により主項展開を主乗法標準形から求めることが可能となることが理解できる．学習者は V_2^n の元に対応する和項を機械的に 2 次元平面のハッセ図から求めることにより主項展開を導く手段を持つことができる．さらに系 1 が成立する．

系 1 $f=\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_m$ が f の乗法標準形だとする．そして，ある β_i が最大項でなかったとする（即ち，β_i に現れない変数がある）．このとき f を加法形式に展開したものは f の主項展開である．
（証明）β_i に変数 x_j が現れなかったとする．このとき $\beta_i \vee x_j \cdot \sim x_j$ を乗法形式に展開した式は，二つ和項に変数 x_j を持つ．これを現れないすべての変数に対して行えば β_i は最大項の積で表現できる．したがって f は主乗法標準形で表現できるので系は成立する． （証明終）

定義 5 によって系 1 における和項 β_i と対応する V_3^n の元を v_i とする．このとき $\forall j(v_j \preceq v_i)$ なる元に対応する和項はすべて値として 0 となる．またこのとき β_i の値を 1 とする v_3^n の元の数が最大となる．1 となる元が最大になる積項の組み合わせを Nelson の定理で導くことが可能なことも V_3^n のハッセ図から直感的に学習できる．

4 むすび

本報告では，論理関数の扱いをカルノー図ではなく $< V_3^n, \preceq >$ 上で行うことにより視覚的に理解しやすい論理関数の操作について提案を行った．また同様に主項展開を $< V_3^n, \preceq >$ を考えることにより視覚的に主項が生成されるメカニズムが理解できる操作について Nelson の定理を用いる方法を提案した．そのとき Nelson の定理を証明するために V_3^n が役立つことを示した．このことから B-3 値論理が初学者にも理解しやすい多値論理とも言うこともできる．

参考文献

[1] Nelson R. J.，Simplest normal truth functions，J. of Symbolic Logic，Vol. 20，No. 2，pp. 105-108(1954).
[2] 向殿，B-三値論理関数について，電子通信学会論文誌，Vol.55-D，No.6，pp.355-362（1972）.
[3] 荒木，向殿，ファジー論理における Nelson の定理，電子情報通信学会誌，D-I，Vol.J81-D-I，No.9，pp.1048-1060（1998）.
[4] 半谷，見山，長谷川，コンピュータ概論，コロナ社（2011）.