

対数収束級数の漸近展開と加速法†

長 田 直 樹**

対数収束する級数の収束は大抵の場合遅いので、何らかの加速を必要とすることが多い。部分 and S_n に対し漸近展開 $S_n - S \sim n^{\gamma+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{n^j}$ ($n \rightarrow \infty$) (1) が成立し、ベキ指数 $\gamma+1$ と係数 c_j が既知のときには、(1) を利用して収束の加速を行うことができる。本論文では、ある種の条件を満たす関数 $f(x)$ により第 i 項が $f(i)$ と表される級数に対し、(1)の型の漸近展開の成立を示し、併せて(1)のベキ指数 $\gamma+1$ と係数 c_j を、 $f(x)$ の $1/x$ に関する漸近展開のベキ指数と係数を用いて表す公式を与える。関数 $f(x)$ が公式の諸条件 (Levin と Sidi の意味での $A^{(\gamma)}$ 族に属すなど) を満たしており、しかも $1/x$ に関する漸近展開のベキ指数と係数が既知のときには、この公式に基づき対数収束級数の収束を加速することができる。本加速法が適用できる級数に対しては、これまでに知られているどの加速法よりも効率のよいことが数値実験により確かめられた。

1. はじめに

級数 $S = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ が対数収束するとは、 n 項までの

部分 and $S_n = \sum_{i=1}^n f(i)$ に対し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = 1$$

が満たされるときいう¹⁾。漸近展開

$$S_n - S \sim n^{\gamma+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{n^j} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1)$$

が成立し、 $\gamma < -1$ のとき級数は対数収束する。このときベキ指数 (以下では指数と略す) $\gamma+1$ と係数 c_j ($j=0, 1, \dots$) が分かれば、誤差項による補正を用いた収束の加速²⁾⁻⁴⁾や、各種の加速法の誤差解析に利用できる。

(1)の型の漸近展開は、 $\int_n^{\infty} f(x) dx$ と $f^{(2j-1)}(n)$ ($j=1, 2, \dots$) が $1/n$ の漸近ベキ級数として表されるときには、Euler-Maclaurin の公式から導かれることはよく知られている^{5), 6)}。

本論文では、 $f(x)$ が漸近展開

$$f(x) \sim x^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{x^j} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (2)$$

を満たし、しかも $f(x)$ の高階導関数が(2)の右辺を形式的に項別微分した形に漸近展開できるときに、(1)の係数 c_j ($j=0, 1, \dots$) を(2)の係数 a_j ($j=0, 1, \dots$) を用いて表す公式 (定理) と例を与える。

つづいて、この定理に基づいた対数収束級数に対する加速法について述べる。Smith と Ford による8種の級数⁷⁾を用いた数値実験によれば、本加速法はこれまでに知られているどの加速法よりも精度がよいことがいえる。とりわけ、例1 (SF-12) の対数収束級数は、従来の加速法では高精度の結果は達成できなかった^{8), 9)}が、本加速法ではうまくいく。

上記のテスト問題をはじめ多くの対数収束級数は、定理の条件を満たしてはいるが、部分 and の漸近展開の指数と係数は余り知られていない。 $f(x)$ の漸近展開の指数と係数を自動的に求める方法が確立されれば、部分 and の漸近展開が定理より求められ、それにより対数収束級数が効率よく加速できるようになる。

数値計算は NEC のパーソナル・コンピュータ PC-9801 VM による。精度は 10 進相当 16 桁強、使用言語は N88-BASIC (86) である。なお、例1 と付録では muMATH による数式処理も行った。

2. 対数収束級数の漸近展開

定義 (Levin & Sidi¹⁰⁾) 区間 (a, ∞) で C^{∞} 級の関数 $f(x)$ が、つぎの2条件 (i) (ii) を満足するとき $f(x)$ は族 $A^{(\gamma)}$ に属すという：

$$(i) \quad f(x) \sim x^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{x^j} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (2)$$

(ii) 高階微分 $f^{(r)}(x)$ ($r=1, 2, \dots$) は、(2)を形式的に項別微分した形に漸近展開される。

対数収束級数に対しても交代級数に類似¹¹⁾の結果が成立する。

定理 族 $A^{(\gamma)}$ に属す関数 $f(x)$ の漸近展開を

$$f(x) \sim x^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{x^j} \quad (x \rightarrow \infty)$$

† Asymptotic Expansions and Acceleration Methods for Logarithmically Convergent Series by NAOKI OSADA (General Education, Nagasaki Institute of Applied Science).

** 長崎総合科学大学一般教育

とする. 級数 $S = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ と積分 $\int_n^{\infty} f(x)dx$ が収束し, $a_0 \neq 0$ かつ $\gamma < -1$ ならば, 部分 and S_n についての漸近展開

$$S_n - S \sim n^{\gamma+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{n^j} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3)$$

が成立する. ただし

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0(1+\gamma), \quad c_1 = a_1/\gamma + a_0/2 \\ c_j &= \frac{a_j}{\gamma+1-j} + \frac{1}{2} a_{j-1} \\ &+ \sum_{k=1}^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (\gamma-j+2k) \cdots (\gamma-j+2) a_{j-2k} \quad (4) \end{aligned}$$

となる. ここで $\lfloor j/2 \rfloor$ は j が偶数のときは $j/2$, j が奇数のときは $(j-1)/2$ を表す. また, B_{2j} は Bernoulli 数である.

証明 Euler-Maclaurin の公式

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^m f(i) - \int_n^m f(x)dx &= \frac{1}{2} [f(n) + f(m)] \\ &+ \sum_{j=1}^l \frac{B_{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(m) - f^{(2j-1)}(n)] + R \end{aligned}$$

において, $m \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{\infty} f(i) - \int_n^{\infty} f(x)dx \\ \sim \frac{1}{2} f(n) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n) \quad (5) \end{aligned}$$

を得る. $f(x)$ は連続だから,

$$\int_n^{\infty} f(x)dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-a_k}{\gamma+1-k} n^{\gamma+1-k} \quad (6)$$

が成立し, $f(x)$ が $A^{(\gamma)}$ に属することより

$$f^{(2j-1)}(n) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\gamma-k) \cdots (\gamma-2j+2) n^{\gamma-2j+1-k} \quad (7)$$

も成立する. (6)(7)を(5)に代入すると $n^{\gamma+1-j}$ の係数が(4)の c_j に一致する. 証明終.

(2)の a_j ($j=0, 1, \dots$) に対し, ベキ級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$$

が $|t| < R$ ($R > 0$) で収束するものとする. このとき(2)は

$$t^{\gamma} f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \quad |t| < R$$

と書ける. 右辺は $|t| < R$ で一様かつ絶対収束するので, 両辺を t で微分して整理すると

$$f'\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} (\gamma-j) a_j t^{-\gamma+j+1} \quad |t| < R$$

が得られる. $t=1/x$ と置くと

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (\gamma-j) a_j x^{\gamma-j-1} \quad |x| > 1/R$$

となる. 同様にして $|x| > 1/R$ において(6)(7)の \sim は $=$ に置き換えることができる. しかし, (3)と(5)の右辺は一般には発散級数である.

3. 漸近展開の例

部分 and の漸近展開の指数と係数の例を示そう.

例 1 (S. Gustafson¹²⁾)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (n + e^{1/n})^{-\sqrt{x}}$$

の漸近展開を求める. $f(x) = (x + e^{1/x})^{-\sqrt{x}}$ とおく. e^x と $(1+x)^{-\sqrt{x}}$ の Maclaurin 展開を用いると, $n \rightarrow \infty$ のときの漸近展開

$$\begin{aligned} f(n) &\sim \left(n + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! n^j} \right)^{-\sqrt{x}} \\ &\sim n^{-\sqrt{x}} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)! n^j} \right)^{-\sqrt{x}} \\ &\sim n^{-\sqrt{x}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \quad (8) \end{aligned}$$

を得る. ただし(8)の係数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{10}$ は表 1

に与える. 部分 and を $S_n = \sum_{i=1}^n f(i)$ と置けば, 定理より

$$S_n - S \sim n^{1-\sqrt{x}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{n^j} \quad (n \rightarrow \infty)$$

なる漸近展開が導かれる. ここで

$$S = 1.71379673554030 \dots$$

表 1 $f(x) = (x + e^{1/x})^{-\sqrt{x}}$ の展開係数
Table 1 Coefficients of Poincaré-type asymptotic expansion of $f(x) = (x + e^{1/x})^{-\sqrt{x}}$.

i	a _i
0	1
1	$-\sqrt{x}$
2	$1 - (1/2)\sqrt{x}$
3	$1 - (1/6)\sqrt{x}$
4	$1/12 - (5/12)\sqrt{x}$
5	$-(23/120)\sqrt{x}$
6	$11/45 + (7/60)\sqrt{x}$
7	$1/72 - (1/240)\sqrt{x}$
8	$-19/160 - (221/2520)\sqrt{x}$
9	$53/1260 - (1513/51840)\sqrt{x}$
10	$24821/453600 + (14069/362880)\sqrt{x}$

表 2 例 1 の漸近展開の係数
Table 2 Coefficients of asymptotic expansion of the n -th partial sums of example 1.

i	c_i
0	$-1-\sqrt{2}$
1	$3/2$
2	$2-(25/12)\sqrt{2}$
3	$-1/2+(1/2)\sqrt{2}$
4	$227/840+(71/630)\sqrt{2}$
5	$-41/168-(37/168)\sqrt{2}$
6	$67/4968+(173/6210)\sqrt{2}$
7	$3367/12240+(5111/24480)\sqrt{2}$
8	$-\frac{2924867}{14212800} - \frac{106187}{676800}\sqrt{2}$
9	$-\frac{3440789}{11249280} - \frac{303983}{1406160}\sqrt{2}$
10	$\frac{367653619}{788356800} + \frac{2954762263}{9460281600}\sqrt{2}$

であり、係数 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{10}$ は表 2 に示す。

4. 加速法への適用

$f(x)$ の漸近展開 (2) の指数 γ と係数 a_0, a_1, a_2, \dots が求められると定理に基づき、 $S_n \rightarrow S$ の加速を行うこ

とができる。

S_n の漸近展開を

$$S_n - S \sim n^{\gamma+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{n^j} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (9)$$

とし、 S_n から (9) の右辺の $n^{\gamma+1-m}$ までの項を減じたものを $V_n^{(m)}$ とする：

$$V_n^{(m)} = S_n - n^{\gamma+1} \sum_{j=0}^m \frac{c_j}{n^j} \quad (10)$$

このとき $V_n^{(m)}$ の誤差の位数は、(9) より $O(n^{-m+\gamma})$ である。係数 c_j の絶対値があまり大きくないときには、(10) は、高精度の結果を与えることが期待される。例 1 の場合 γ は $-\sqrt{2}$ で $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{10}$ の絶対値は 0.05 と 2.5 の間にあるので、10 項までの部分和に $m=10$ として加速を施すと誤差はおよそ $10^{-10-\sqrt{2}}$

表 3 対数収束級数に対するテスト問題
Table 3 Logarithmically convergent test series.

SF	$f(n)$	SF	$f(n)$
6	$\frac{1}{n^2}$	10	$\frac{1}{n} + \log \frac{n-1}{n}$
7	$\frac{1+n^2+n^4}{n^2(1+n^2)}$	11	$\log \frac{n+1}{n} \log \frac{n+2}{n+1}$
8	$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$	12	$(n+e^{1/n})^{-\sqrt{x}}$
9	$\sin \frac{1}{n} \log \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$	13	$\left(\frac{-1/2}{n-1} \right) \frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}$

表 4 表 3 の関数の漸近展開の指数と係数
Table 4 Exponents and coefficients of Poincaré-type asymptotic expansions of $f(x)$ of Table 3.

	SF-6	SF-7	SF-8	SF-9	SF-10	SF-11	SF-12	SF-13
γ	-2	-2	-2	-2	-2	-2	$-\sqrt{2}$	$-3/2$
a_0	1	1	2	$-1/2$	$-1/2$	1	1	$1/4\sqrt{\pi}$
a_1	0	0	-7	$-1/12$	$-1/3$	-2	$-\sqrt{2}$	$9/32\sqrt{\pi}$
a_2	0	1	17	$11/180$	$-1/4$	$41/12$	$1-\sqrt{2}/2$	$133/512\sqrt{\pi}$
a_3	0	0	-37	$1/140$	$-1/5$	$-17/3$	$1-\sqrt{2}/6$	$903/4096\sqrt{\pi}$
a_4	0	0	77	$-601/226800$	$-1/6$	$1697/180$	表 1 を見よ See Table 1.	$23331/131072\sqrt{\pi}$
a_5	0	0	-157	$-4621/14968800$	$-1/7$	$-159/10$	表 1 を見よ See Table 1.	$146223/1048576\sqrt{\pi}$
a_6	0	-1	317	$1195/54486432$	$-1/8$	$45791/1680$	表 1 を見よ See Table 1.	$1805441/16777216\sqrt{\pi}$
a_7	0	0	-637	$-38677/5108103000$	$-1/9$	$-29909/630$	表 1 を見よ See Table 1.	$11075031/134217728\sqrt{\pi}$
a_8	0	0	1277	$-130276849/250092722880000$	$-1/10$	$1056949/12600$	表 1 を見よ See Table 1.	$539023331/8589934592\sqrt{\pi}$
a_9	0	0	-2557	$-8732240401/4751761734720000$	$-1/11$	$-189097/1260$	表 1 を見よ See Table 1.	$3235109955/68719476736\sqrt{\pi}$
a_{10}	0	1	5117	$-84762648701/121961884524480000$	$-1/12$	$45134057/166320$	表 1 を見よ See Table 1.	$38888776395/1099511627776\sqrt{\pi}$

表 5 $V_n^{(10)}$ の問題別有効桁数
Table 5 Numbers of significant digits of Smith & Ford test problems by $V_n^{(10)}$.

n	SF-6	SF-7	SF-8	SF-9	SF-10	SF-11	SF-12	SF-13
2	4.81	3.82	0.20	5.07	5.56	1.46	5.04	5.81
3	6.97	5.92	2.24	7.39	7.55	3.50	5.98	7.71
4	8.53	7.43	3.69	9.22	8.99	4.95	7.20	9.10
5	9.75	8.60	4.82	11.32	10.12	6.09	8.22	10.18
6	10.76	9.56	5.75	11.59	11.06	7.02	9.10	11.08
7	11.62	10.37	6.51	12.11	11.85	7.81	9.86	11.84
8	12.37	11.07	7.22	12.67	12.54	8.49	10.55	12.50
9	13.02	11.69	7.83	13.20	13.15	9.10	11.19	13.08
10	13.61	12.25	8.37	13.69	13.70	9.64	11.80	13.60

($\approx 3.9 \times 10^{-12}$) と考えられる。実際の誤差は 1.58×10^{-12} であり、理論どおりの結果といえる。

$V_n^{(m)}$ の有効性を調べるため、表 3 に示した Smith と Ford による 8 問を取り上げる⁷⁾。表 3 の 8 問は順に SF-6 から SF-13 と略すこととし、 $f(x)$ の漸近展開の指数と係数は表 4 に与える。このうち SF-12 は上で取り上げた例 1 である。また、SF-13 の漸近展開

の導出は付録で行う。 $m=10$, $n=2 \sim 10$ としたときの問題ごとの有効桁数を表 5 に、 $m=2, 4, 6, 8, 10$; $n=2 \sim 12$ としたときの 8 問の平均有効桁数を図 1 に示す。Smith と Ford が調べた対数収束級数の加速法のなかでは Levin-u 変換が平均値では最も優れていたもので、参考までに Levin-u 変換の有効桁数も図 1 に示す。なお、Wynn の ρ -算法は SF-6~SF-11 では Levin-u 変換よりも精度がよいが、SF-12 と SF-13 では無効である⁷⁾ ので、取り

上げていない。つぎに $f(x)$ の漸近展開の一般項が容易に計算できる SF-6, SF-7, SF-8, SF-10 の 4 問については、 $m=12, 16, 20, 24$; $n=2 \sim 8$ としたときの有効桁数を図 2 に示す。 $f(x)$ の漸近展開の指数と係数が計算できるとき、たとえば Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ の計算、には本方法は極めて優れた加速法となる。

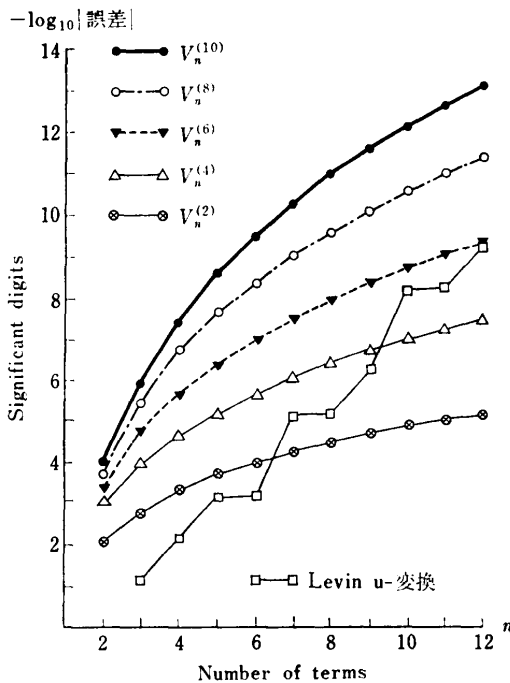


図 1 m 項までの漸近展開による加速の有効桁数の平均値
Fig. 1 Performance of the acceleration method defined in (10), averaged over Smith & Ford test problems. (Levin u-transformation for comparison.)

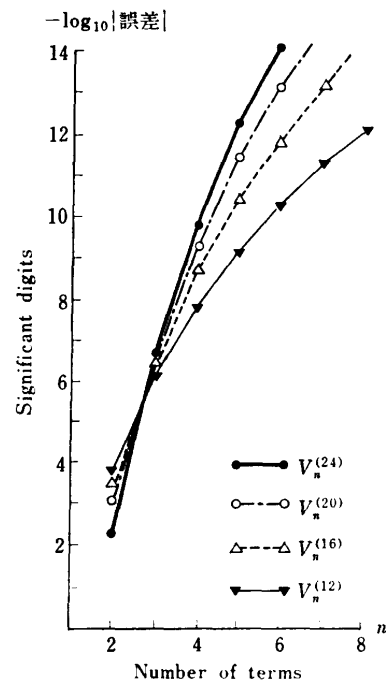


図 2 m 項までの漸近展開による加速の有効桁数 (SF-6, SF-7, SF-8, SF-10 の平均値)
Fig. 2 Performance of the acceleration method defined in (10), averaged over SF-6, SF-7, SF-8 and SF-10.

表5において, SF-8の精度が少し劣るのは, (9)の係数が,

$$-2, 4.5, -9.5, 19.5, -39.5, 79.5, -159.5, \dots$$

と振動しながら増大するからである. 同様のことはSF-11についてもいえる.

なお, n を固定したとき, 最適な m を見いだす問題は, SF-6の場合をBenderとOrszagが10進26桁で計算している³⁾. それによれば, $n=6$ のとき, 最適な m は36でそのときの誤差は -1.08×10^{-16} であり, $n=8$ のときは $m=48$, 誤差は -3.27×10^{-21} である. [文献3] p. 380の項数は, 本論文の記号では $m/2+n+2$ である.] 図2によれば, SF-7, SF-8, SF-10においても $n=8$ のときの最適な m は24以上と考えられる.

5. おわりに

本論文では, 対数収束級数 S の第 n 項 $f(n)$ の $1/n$ に関する漸近展開を用いて, 部分和の漸近展開の指数と係数を表す公式を与えた. $f(n)$ の漸近展開が求められるような級数については, この公式を用いると S の値が高精度で求められる.

今後の課題としては, $f(n)$ の漸近展開の指数と係数を自動的に求める方法を確立することである. 関数 $f(x)$ の $1/x$ に関する漸近展開の指数と係数が自動的に計算できるようになれば, 4章で述べた加速法は対数収束級数に対する有力な加速法となる. さらに交代級数の加速にも適用できる¹¹⁾.

謝辞 貴重なご助言をいただいた査読者, および数値解析シンポジウム(1987/6, 軽井沢)においてご討論いただいた方々に感謝いたします.

参考文献

- 1) Wimp, J.: *Sequence Transformations and Their Applications*, Academic Press, New York (1981).
- 2) Bickley, W.G. and Miller, J.C.P.: The Numerical Summation of Slowly Convergent Series of Positive Terms, *Philos. Mag.*, Vol. 22, pp. 754-767 (1936).
- 3) Bender, C.M. and Orszag, S.T.: *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York (1978).
- 4) 一松 信: 教室に電卓を! III, 海鳴社, 東京 (1986).
- 5) Bromwich, T.J.Pa.: *An Introduction to the Theory of Infinite Series* (2nd ed. revised),

Macmillan and Co. Limited, London (1949).

- 6) Knopp, K.: *Theory and Application of Infinite Series* (2nd English ed.), Blackie and Son, London and Glasgow (1951).
- 7) Smith, D.A. and Ford, W.F.: Acceleration of Linear and Logarithmic Convergence, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 16, No. 2, pp. 223-240 (1979).
- 8) Barber, M.N. and Hamer, C.J.: Extrapolation of Sequences Using a Generalized Epsilon-algorithm, *J. Austral. Math. Soc.*, Vol. 23, pp. 229-240 (1982).
- 9) 二宮市三: Levinの加速法, 第29回情報処理学会全国大会論文集, pp. 1501-1502 (1984).
- 10) Levin, D. and Sidi, A.: Two New Classes of Nonlinear Transformations for Accelerating the Convergence of Infinite Integrals and Series, *Appl. Math. Comp.*, Vol. 9, pp. 175-215 (1981).
- 11) 長田直樹: 交代級数の漸近展開と加速法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 5, pp. 431-436 (1987).
- 12) Gustafson, S.: A Method of Computing Limit Values, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 10, No. 2, pp. 1080-1090 (1973).
- 13) Olver, F.W.J.: *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York (1974).
- 14) Todd, J.: The Lemniscate Constants, *Comm. ACM*, Vol. 18, No. 1, pp. 14-19 (1975).

付録 SF-13の $f(x)$ の漸近展開の導出

$$(-1)^{n-1} \binom{-1/2}{n-1} = \frac{\Gamma(n-1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n)}$$

の漸近展開は, 2つのガンマ関数の比の漸近展開の公式により求めることができる.

いま, 定数 q_s, G_s ($s=0, 1, 2, \dots$) を

$$e^{1/2}(1-e^{-t})^{-1/2} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s q_s t^{s-1/2} \quad (|t| < 2\pi) \quad (A 1)$$

$$G_s = (-1/2)(-1/2-1)(-1/2-s+1)q_s \quad (A 2)$$

により定義すると

$$(-1)^{n-1} \binom{-1/2}{n-1} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{G_s}{n^s} \quad (A 3)$$

なる漸近展開が成立する. [Olver 13] pp. 118-119]

また

$$\frac{1}{4n-3} = \frac{1}{4n} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4n}\right)^j \quad \left(n > \frac{3}{4}\right) \quad (A 4)$$

もいえるので, (A 3) (A 4) より

$$\frac{(-1/2)(-1)^{n-1}}{(n-1)4n-3}$$

$$\sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}} n^{-3/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j}$$

が導かれる。表 A に q_s , 表 B に G_s を示す。 $a_s/4\sqrt{\pi}$ は表 4 に与えてある。なお, SF-13 の和は

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{4\sqrt{2\pi}}$$

に一致する¹⁴⁾。

(昭和 62 年 8 月 3 日受付)

(昭和 63 年 1 月 19 日採録)

表 A (A1) の q_s
Table A q_s in (A1).

s	q_s
0	1
1	-3/4
2	25/96
3	-7/128
4	79/10240
5	-33/40960
6	923/12386304
7	-113/16515072
8	51901/118908518400
9	-19/22649241600
10	17/44291850240

表 B (A2) の G_s
Table B G_s in (A2).

s	G_s
0	1
1	3/8
2	25/128
3	105/1024
4	1659/32768
5	6237/262144
6	50765/4194304
7	242385/33554432
8	7421843/2147483648
9	969969/17179869184
10	67456935/274877906944



長田 直樹 (正会員)

1948 年生. 1971 年大阪大学理学部数学科卒業. 1974 年大阪大学大学院理学研究科修士課程修了. 同年長崎総合科学大学工学部管理工学科助手. 現在, 長崎総合科学大学工学部一般教育助教授. 数値積分や加速法に興味を持つ. 著書「数値微分積分法」(現代数学社). 日本数学会会員.