

主閉包集合の上限値設定による不完全指定順序回路の 複数最小解の生成法[†]

後 藤 公 雄^{††}

不完全指定順序回路の内部状態の最小化について筆者が先に提案した手法⁶⁾は Rao & Biswas の手法⁵⁾に比し計算機向きの手法として有効である。ただ、最小化の過程で代表的両立性クラスの数が増大したりすると、主閉包集合を求めるための計算量が膨大になり、計算が不可能になることがあった。さらにこの方法は少なくとも1個の最小閉被覆解を求めるには有効であったが複数解を求めるときには必ずしも有効ではなかった。Rao & Biswas⁵⁾はこれらの問題にたいし若干の着想を述べてはいるが明確ではない。本論文は理論的にこれらの問題を解析し、さらにアルゴリズムを構築してプログラムを作成し、本論文の手法の有効性を実証している。本論文では場合によって膨大な計算となる主閉包集合の計算量を減少させるため、始めに最小閉被覆を構成する代表的両立性クラスの数の上限值 uub を決定し、この値以下の個数の代表的両立性クラスよりなる主閉包集合を導出するような代表的両立性クラスを予測し、そうでないものは最初から抹消するようにしている。このような予測には主閉包集合行列の最大非冗長列線集合の概念を導入し、計算を簡便にするよう配慮した。また閉被覆を満たさない主閉包集合の合併や最小閉被覆の構成要素である代表的両立性クラスを一次両立性クラスで置換するようにする配慮も行って複数解が得られることを容易にしている。

1. ま え が き

不完全指定順序回路の内部状態の最小化については、これまで多くの研究が行われてきた^{1)~4)}。この最小化の基となったのは、いくつかの内部状態相互間に存在する両立性クラス⁵⁾の概念である。この概念を用いて簡単化した結果求まる新たな内部状態にたいしては、その数がかつとも少ないこと、始めに与えられた内部状態のすべてを保持していること（すなわち被覆性を満足していること）、さらにこの解の要素である両立性クラスは自分およびその解の中の他の要素をインプライすること（すなわち閉包性を満たすこと）が要求された。これらの要件を満足する最小解を明確に求めることは困難であったが、Rao & Biswas⁵⁾はその中の少なくとも一つの解を明確に求める手法を導いた。さらに筆者は Rao & Biswas の手法の種々の煩雑さを改善する手法を先に提案した^{6)~9)}。筆者の提案した手法では、3つの除去定理⁹⁾を用いて最後に残った代表的両立性クラス（後述する）の中から最小閉被覆解を求める。この際これらの両立性クラス中の任意の1個と、それがインプライする長さ2の両立性クラスの各々をカバーする代表的両立性クラスの集合各々との直積を求め、この直積を構成する要素の中でそのリテラル数、すなわち代表的両立性クラスの個数がか

つとも少なく、しかも被覆性と閉包性を満足するものを所望の最小閉被覆解とする。ただ、最初に与えた不完全指定順序回路の如何によっては、このようにして求めた代表的両立性クラスの数や、それらにたいする直積の要素の数が著しく増大し、演算時間が極端に長くなったり、膨大なメモリ容量を消費したりして、最小解を求めるのが困難になることがある。

本論文では、このような直積の数を減らすため、最小化後の新内部状態数の上限を最初に決定し、この限界を越えるような個数の要素を含む直積は最初から対象外とし、演算の手間を大幅に削減している。本論文ではこれを具体化するため、主閉包集合行列、最大非冗長列線集合、ペトリック関数の使用などの新たな概念を導入している。

なお、詳細を述べる前に準備としてつぎの定義と定理を列挙する。これらは文献9)より明らかである。

【定義1】 両立性クラス⁵⁾ C_i の閉包集合 E_i は、 C_i がインプライする両立性クラスから、さらにインプライしつづけて得られるすべての両立性クラスよりなる集合である。ただし、 C_i または E_i の要素の部分集合となる両立性クラスは E_i の要素から除くものとする。

【定義2】 両立性クラス C_i を構成する内部状態が2個のみよりなるものを両立性対 CP_i ^{10),11)} と呼ぶ。

【定義3】 両立性対同士のインプリケーション関係を示すため、インプリケーション源となる両立性対から、インプライされる両立性対に向かって有向線で結んだチェーンをインプリケーション・チェーン（以後

[†] A Method of Generating Several Minimizing Solutions for Incompletely Specified Sequential Machine by Establishing Upper Bound of the Size of Prime Closed Set by KIMIO GOTO (Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Kanagawa Institute of Technology).

^{††} 神奈川工科大学工学部情報工学科

IMPC) と呼ぶ。

[定義 4] 両立性クラス C_i の閉包集合 E_i の要素の構成源となるすべての両立性対の集合を C_i の閉包対集合 EP_i と呼ぶ。ただし, C_i の部分集合となる両立性対, および EP_i の含む他の両立性対に等しい両立性対は EP_i の要素から除くものとする。

[定義 5] 最大両立性クラス $MC^{(1)-5)}$ (または単に MC) のすべての部分集合を 1 次両立性クラス PC (または単に PC)⁶⁾ と呼ぶ。

[定義 6] 除去定理 1, 2 および 3⁹⁾ を PC に適用しても除去できない PC を代表的両立性クラス (representative compatible), または単に RC と呼ぶ。

[定理 1] RC の集まりのみより成る最小閉被覆が存在する。

2. 最小閉被覆解の選出のための諸定義と諸定理

本章では, 不完全指定順序回路の内部状態の最小閉被覆解を多数の候補の中から選出するための諸定義と諸定理を述べる。これらは第 3 章で述べるアルゴリズムの基となるものである。

2.1 最小化の限界

最小化の限界に関する諸定理を述べる。

[定理 2] 最小閉被覆を満足する不完全指定順序回路の内部状態数 u_n は最初に与えられる順序回路のそれよりも大きくはなり得ない。

(証明) 自明。 (QED)

[定理 3] 最大両立性クラス MC のみの全体集合は閉被覆性を満たす。また, その真部分集合の中に MC の濃度が最小で閉被覆性を満たすものが存在し得る。

(証明) 自明。 (QED)

[説明 1] 表 1 の状態遷移表の示す不完全指定順序回路のすべての最大両立性クラス MC の集合 S_M は

$$\begin{aligned} &\{abcf(C_{66}=MC_1), \quad abch(C_{67}=MC_2), \\ &abef(C_{68}=MC_3), \quad abeh(C_{69}=MC_4), \\ &bcfi(C_{70}=MC_5), \quad befi(C_{74}=MC_6), \\ &defi(C_{80}=MC_7), \quad bcghi(C_{86}=MC_8), \\ &beghi(C_{87}=MC_9), \quad deghi(C_{88}=MC_{10})\} \quad (1) \end{aligned}$$

で示され, 被覆性を満足することは明らかである。これらの MC を基にして, それらの部分集合である PC とその閉包対集合 EP を示すと表 2 が得られる。この表で MC の部分だけは枠で囲んである。この表の枠内の部分で一例として MC_7 を採用し, その閉包

表 1 不完全指定順序回路の状態遷移表の難解な一例
Table 1 A more difficult example of state transition table of an incompletely specified sequential machine.

現在の内部状態	次の内部状態, 出力			
	入力 x_1x_2			
	00	01	11	10
a	$b, -$	$d, -$	—	$c, -$
b	$f, -$	$i, -$	—	—
c	—	—	$g, -$	$h, -$
d	$b, -$	$a, -$	$f, -$	$e, -$
e	—	—	—	$f, -$
f	$a, 0$	—	$b, -$	$- , 1$
g	$e, 1$	$b, -$	—	—
h	$e, -$	—	—	$a, 0$
i	$e, -$	$c, -$	—	—

対集合 EP の各要素 $ab, bf, af, be, ac, ch, ah, ae, cf, bg, bi$ および ci が他の MC によってカバーされる被覆関係を調べる。最大両立性クラス MC_i の添字 i の集合でこの被覆関係を示すと, ab は $\{1, 2, 3, 4\}$ に, bf は $\{1, 3, 5, 6\}$ に, af は $\{1, 3\}$ に, be は $\{3, 4, 6, 9\}$ に, ac は $\{1, 2\}$ に, ch は $\{2, 8\}$ に, ah は $\{2, 4\}$ に, ae は $\{3, 4\}$ に, cf は $\{1, 5\}$ に, bg は $\{8, 9\}$ に, bi は $\{5, 6, 8, 9\}$ に, また ci は $\{5, 8\}$ にカバーされる。このように MC_7 は MC の集合の中で閉じる。他の MC についても同様である。

つぎに, MC の集合 S_M の真部分集合の閉被覆性を満足し, かつ MC の濃度の最も小さなものを求める。それには, これらの各 MC についてその閉包対集合 EP の要素となる各両立性対 CP をカバーする MC の集合の直積を求め, その直積中で構成リテラル数の最小のものを探し, その閉被覆性を確認する。式 (1) の $MC_7 = defi$ を例にとり, その閉包対集合の各要素をカバーする MC の直積を, 前述した MC の被覆関係から MC_i の添字 i のみで表してみると,

$$\begin{aligned} &7 \times \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 3, 5, 6\} \times \{1, 3\} \times \{3, 4, 6, 9\} \\ &\quad \times \{1, 2\} \times \{2, 8\} \times \{2, 4\} \times \{3, 4\} \times \{1, 5\} \times \{8, 9\} \\ &\quad \times \{5, 6, 8, 9\} \times \{5, 8\} \quad (2) \end{aligned}$$

のようになる。この中で最小数のリテラル (MC_i の i で表す) よりなる直積の要素は

$$\{1, 4, 7, 8\} = \{abcf, abeh, defi, bcghi\} \quad (3)$$

となり, これは閉被覆性を満足する。

[定理 4] 1 次両立性クラス PC の中でその閉包対集合 EP が空集合となるものの部分集合の中に閉被覆が存在し, しかもその濃度が最小となるものがある。ただし, 始めの不完全指定順序回路の内部状態も

このような PC に含まれるものと見なす。

(証明) 自明.

(QED)

$$\{bc(C_6), be(C_7), cg(C_{13}), ci(C_{15}), ef(C_{21}),$$

$$eg(C_{22}), ei(C_{24}), gh(C_{26}), hi(C_{28})\} \quad (4)$$

【説明 2】 1次両立性クラス PC とその閉包対集合 EP の関係を表す表 2 で、EP が空集合となる PC の集合は、

となる。この集合は内部状態 a と d をカバーしないから、PC として

$$a = C_{89}, \quad (5a)$$

表 2 表 1 にたいする PC とその閉包対集合 EP
Table 2 Primary compatibles for Table 1 and those closure pair sets, EPs.

C_i の i	PC	閉 包 対 集 合 EP	除去定理
1	ab	bf, di, af, be, ac, ch, ah	D3
2	ac	ch, ah, be	D3
3	ae	cf, bg, ef, bi, ci	
4	af	ab, bf, di, be, ac, ch, ah	D3
5	ah	be, ac, ch	D3
6	bc	ϕ	
7	be	ϕ	
8	bf	af, ab, di, be, ac, ch, ah	D3
9	bg	ef, bi, ci	D3
10	bh	ef	
11	bi	ef, ci	D3
12	cf	bg, ef, bi, ci	
13	cg	ϕ	
14	ch	ah, be, ac	D3
15	ci	ϕ	
16	de	ef	D1
17	df	ab, bf, di, af, be, ac, ch, ah	D1
18	dg	be, ab, bf, di, af, ac, ch, ah	D1
19	dh	be, ae, cf, bg, ef, bi, ci	
20	di	be, ac, ch, ah	
21	ef	ϕ	
22	eg	ϕ	
23	eh	af, ab, bf, di, be, ac, ch, ah	D1
24	ei	ϕ	
25	fi	ae, cf, bg, ef, bi, ci	D1
26	gh	ϕ	
27	gi	bc	D3
28	hi	ϕ	
29	abc	bf, di, af, be, ch, ah	
30	abe	bf, di, af, ac, ch, ah, cf, bg, ef, bi, ci	D3
31	abf	di, be, ac, ch, ah	
32	abh	bf, di, af, be, ac, ch, ef	D3
33	acf	ch, ah, be, ab, bf, di, bg, ef, bi, ci	
34	ach	be	
35	aef	cf, bg, bi, ci, ab, bf, di, be, ac, ch, ah	D3
36	aeh	cf, bg, ef, bi, ci, be, ac, ch, af, ab, bf, di	D3
37	bcf	af, ab, di, be, ac, ch, ah, bg, ef, bi, ci	D3
38	bcg	ef, bi, ci	D3
39	bch	ef, ah, be, ac	D3
40	bci	ef	D3
41	bef	af, ab, di, ac, ch, ah	
42	beg	ef, bi, ci	
43	beh	ef, af, ab, bf, di, ac, ch, ah	D2
44	bei	ef, ci	

表 2 (続き)
Table 2 (continued)

MC_j の j	C_i の i	PC	閉 包 対 集 合 EP	除去定理
	45	<i>bfi</i>	<i>af, ab, di, be, ac, ch, ah, ef, ci, ae, cf, bg</i>	D3
	46	<i>bgh</i>	<i>ef, bi, ci</i>	
	47	<i>bgi</i>	<i>ef, ci, bc</i>	D3
	48	<i>bhi</i>	<i>ef, ci</i>	
	49	<i>cfi</i>	<i>bg, ef, bi, ae</i>	
	50	<i>cgh</i>	<i>ah, be, ac</i>	
	51	<i>cgi</i>	<i>bc</i>	
	52	<i>chi</i>	<i>ah, be, ac</i>	
	53	<i>def</i>	<i>ab, bf, di, af, be, ac, ch, ah</i>	D2
	54	<i>deg</i>	<i>ef, be, ab, bf, di, af, ac, ch, ah</i>	D2
	55	<i>deh</i>	<i>ef, be, ae, cf, bg, bi, ci, af, ab, bf, di, ac, ch, ah</i>	D2
	56	<i>dei</i>	<i>ef, be, ac, ch, ah</i>	D2
	57	<i>dfi</i>	<i>ab, bf, af, be, ac, ch, ah, ae, cf, bg, ef, bi, ci</i>	D2
	58	<i>dgh</i>	<i>be, ab, bf, di, af, ac, ch, ah, ae, cf, bg, ef, di, ci</i>	D2
	59	<i>dgi</i>	<i>be, ab, bf, af, ac, ch, ah, bc</i>	
	60	<i>dhi</i>	<i>be, ae, cf, bg, ef, bi, ci, ac, ch, ah</i>	D2
	61	<i>efi</i>	<i>ae, cf, bg, bi, ci</i>	D2
	62	<i>egh</i>	<i>af, ab, bf, di, be, ac, ch, ah</i>	D2
	63	<i>egi</i>	<i>bc</i>	
	64	<i>ehi</i>	<i>af, ab, bf, di, be, ac, ch, ah</i>	D2
	65	<i>ghi</i>	<i>bc</i>	
1	66	<i>abcf</i>	<i>di, be, ch, ah, bg, ef, bi, ci</i>	
2	67	<i>abch</i>	<i>bf, di, af, de, ef</i>	
3	68	<i>abef</i>	<i>di, ac, ch, ah, cf, bg, bi, ci</i>	
4	69	<i>abeh</i>	<i>bf, di, af, ac, ch, cf, bg, ef, bi, ci</i>	
5	70	<i>bcfi</i>	<i>af, ab, di, be, ac, ch, ah, ef, bg, ae</i>	
	71	<i>bcgh</i>	<i>ef, bi, ci, ah, be, ac</i>	D3
	72	<i>bcgi</i>	<i>ef</i>	
	73	<i>bchi</i>	<i>ef, ah, be, ac</i>	D3
6	74	<i>befi</i>	<i>af, ab, di, ac, ch, ah, ci, ae, cf, bg</i>	
	75	<i>begh</i>	<i>ef, bi, ci, af, ab, bf, di, ac, ch, ah</i>	D2
	76	<i>begi</i>	<i>ef, ci, bc</i>	
	77	<i>behi</i>	<i>ef, ci, af, ab, bf, di, ac, ch, ah</i>	D2
	78	<i>bghi</i>	<i>ef, ci, bc</i>	
	79	<i>cghi</i>	<i>ah, be, ac, bc</i>	
7	80	<i>defi</i>	<i>ab, bf, af, be, ac, ch, ah, ae, cf, bg, bi, ci</i>	
	81	<i>degh</i>	<i>ef, be, ab, bf, di, af, ac, ch, ah, ae, cf, bg, bi, ci</i>	D2
	82	<i>degi</i>	<i>ef, be, ab, bf, af, ac, ch, ah, bc</i>	D2
	83	<i>dehi</i>	<i>ef, be, ae, cf, bg, bi, ci, ac, ch, ah, af, ab, bf</i>	D2
	84	<i>dghi</i>	<i>be, ab, bf, af, ac, ch, ah, ae, cf, bg, ef, bi, ci, bc</i>	D2
	85	<i>eghi</i>	<i>af, ab, bf, di, be, ac, ch, ah, bc</i>	D2
8	86	<i>bcghi</i>	<i>ef, ah, be, ac</i>	
9	87	<i>beghi</i>	<i>ef, ci, af, ab, bf, di, ac, ch, ah, bc</i>	D2
10	88	<i>deghi</i>	<i>ef, be, ab, bf, af, ac, ch, ah, ae, cf, bg, bi, ci, bc</i>	D2

$$d=C_{90} \quad (5b)$$

を追加し、式(4)と(5)の PC よりなる閉被覆の中で濃度の最小になるものを求めると、

$$\{C_6, C_{15}, C_{21}, C_{26}, C_{89}, C_{90}\},$$

$$\{C_6, C_{21}, C_{24}, C_{26}, C_{89}, C_{90}\},$$

$$\{C_6, C_{21}, C_{26}, C_{28}, C_{89}, C_{90}\},$$

または

$$\{C_7, C_{13}, C_{21}, C_{28}, C_{89}, C_{90}\}. \quad (6)$$

[定理 5] 最初の不完全指定順序回路の内部状態数を n 、最大両立性クラス MC の個数を m 、また MC のみよりなる閉被覆の中で MC の濃度が最小のもの濃度を u 、さらに閉包対集合 EP が空集合となる 1 次両立性クラス PC のみよりなる閉被覆の中で濃度が最小のもの濃度を v とするとき、最初の順序回路にたいする最小閉被覆の濃度の上限値 u_{UB} は

$$u_{UB} = \min(n, m, u, v) \quad (7)$$

で与えられる。

(証明) 定理 2~4 より自明。 (QED)

[説明 3] 表 1 の状態遷移表で与えられる順序回路について考える。定理 2、式(1)、(3)および(6)より、それぞれ $n=9, m=10, u=4, v=6$ が得られ、

$$u_{UB} = \min(n, m, u, v) = \min(9, 10, 4, 6) = 4. \quad (8)$$

2.2 代表的両立性クラス RC の最小閉被覆

代表的両立性クラス RC の最小閉被覆に関連してつぎの定義と定理を述べる。

[定義 7] 代表的両立性クラス RC である C_i と、それがインプライする閉包対集合 EP_i の要素である各両立性対 CP_{ij} (ここで、 $j=1, 2, \dots, EP_i$ の要素の数 ne_j) ごとにそれをカバーする 1 個の RC を選択することによって得られる RC の集合を C_i にたいする主閉包集合 (prime closure set) PCS_i と呼ぶ。

[例 1] 表 1 に示す不完全指定順序回路の状態遷移表にたいする RC は、先に提案した手法⁹⁾によって、除去定理 1、2 および 3 (それぞれ D1, D2 および D3) を適用して、つぎの式(9)のようになる。

$$\{be(C_7), bh(C_{10}), cf(C_{12}), cg(C_{13}), ci(C_{15}),$$

$$dh(C_{19}), di(C_{20}), ef(C_{21}), eg(C_{22}), ei(C_{24}),$$

$$gh(C_{26}), hi(C_{28}), abc(C_{29}), abf(C_{31}), ach(C_{34}),$$

$$bef(C_{41}), beg(C_{42}), bei(C_{44}), bgh(C_{46}), bhi(C_{48}),$$

$$cfi(C_{49}), cgh(C_{50}), cqi(C_{51}), chi(C_{52}), dgi(C_{59}),$$

$$egi(C_{63}), ghi(C_{66}), abcf(C_{66}), abch(C_{67}),$$

$$abef(C_{68}), abeh(C_{69}), bcfi(C_{70}), bcqi(C_{72}),$$

$$befi(C_{74}), begi(C_{76}), bghi(C_{78}), cqhi(C_{79}),$$

$$defi(C_{80}), bcghi(C_{86})\} \quad (9)$$

これらの RC には C_i (ここで、 $7 \leq i \leq 86$) が記入してある。なお、これらの RC それぞれがインプライする閉包対集合 EP の各要素の一覧表を表 3 にまとめて示す。いま、 RC として C_{42} を採用し、その閉包対集合 EP_{42} の各要素の RC による被覆関係を表 3 で調べ、

表 3 表 1 の状態遷移表の RC とそのインプライする EP の各要素
Table 3 RCs and all elements included in EPs implied by those RCs .

C_i の i	RC	EP の各要素
7	be	ϕ
10	bh	ef
12	cf	bg, ef, bi, ci
13	cg	ϕ
15	ci	ϕ
19	dh	be, ae, cf, bg, ef, bi, ci
20	di	be, ac, ch, ah
21	ef	ϕ
22	eg	ϕ
24	ei	ϕ
26	gh	ϕ
28	hi	ϕ
29	abc	bf, di, af, be, ch, ah
31	abf	di, be, ac, ch, ah
34	ach	be
41	bef	af, ab, di, ac, ch, ah
42	beg	ef, bi, ci
44	bei	ef, ci
46	bgh	ef, bi, ci
48	bhi	ef, ci
49	cfi	bg, ef, bi, ae
50	cgh	ah, be, ac
51	cqi	bc
52	chi	ah, be, ac
59	dgi	be, ab, bf, af, ac, ch, ah, bc
63	egi	bc
65	ghi	bc
66	abcf	di, be, ch, ah, bg, ef, bi, ci
67	abch	bf, di, af, be, ef
68	abef	di, ac, ch, ah, cf, bg, bi, ci
69	abeh	bf, di, af, ac, ch, cf, bg, ef, bi, ci
70	bcfi	af, ab, di, be, ac, ch, ah, ef, bg, ae
72	bcqi	ef
74	befi	af, ab, di, ac, ch, ah, ci, ae, cf, bg
76	begi	ef, ci, bc
78	bghi	ef, ci, bc
79	cqhi	ah, be, ac, bc
80	defi	ab, bf, af, be, ac, ch, ah, ae, cf, bg, bi, c
86	bcghi	ef, ah, be, ac

$$C_{42} = beg \quad (10a)$$

$$EP_{42} = \{ef, bi, ci\} \quad (10b)$$

$$ef \leq C_{21}, C_{41}, C_{68}, C_{74}, C_{80} \quad (10c)$$

$$bi \leq C_{44}, C_{48}, C_{70}, C_{72}, C_{74}, C_{76}, C_{78}, C_{86} \quad (10d)$$

$$ci \leq C_{15}, C_{49}, C_{51}, C_{52}, C_{70}, C_{72}, C_{79}, C_{86} \quad (10e)$$

を得る. 式(10c)~(10e)より EP_{42} の各要素をカバーする RC を1個ずつ選んで主閉包集合を作ると, 長さ3のものが20個, 4のものが80個得られる. 前者の一例として $C_{42}C_{21}C_{70}$ を, 後者の一例として $C_{42}C_{21}C_{44}C_{15}$ を得る. 式(10c)~(10e)の右辺の RC の個数は, それぞれ5個, 8個および8個であるから, 主閉包集合の個数は320個 ($=5 \times 8 \times 8$) まで存在しうが, このように100個となるのは, 式(10c), (10d)および(10e)の右辺には相互に同じものを何個か含んでいるためである.

[定義8] ある代表的両立性クラス RC_i とその閉包対集合 EP_i の各要素で列線を, また RC_i と, EP_i の各要素をカバーするすべての RC_j とで行線を表し, EP_i のある要素をある RC がカバーするとき, それぞれに対応する列線と行線の交点上に○印を付した行列を RC_i にたいする主閉包集合行列 $T_{Pcs,i}$ と呼び, さらにこの○印に相当する RC_j を行列要素と呼ぶ.

[例2] 表3の $C_{66} = abcf$ と, その閉包対集合 EP_{66} の8個の要素 $di, be, ch, ah, bg, ef, bi$ および ci をそれぞれ列線 1, 2, ..., 9 とし, それらをカバーす

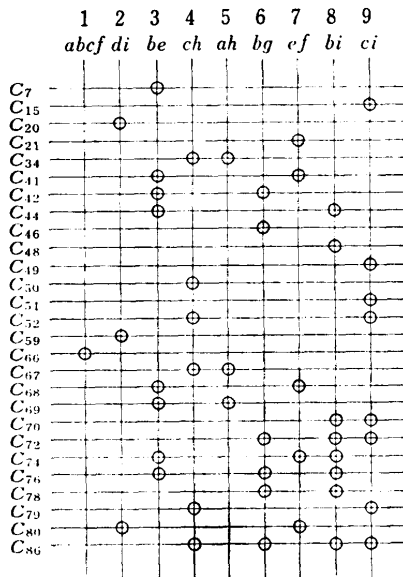


図1 表3より求めた C_{66} にたいする主閉包集合行列 $T_{Pcs,66}$
 Fig. 1 Prime closure set matrix $T_{Pcs,66}$ for C_{66} drawn up from Table 3.

るすべての RC を行線として, C_{66} にたいする主閉包集合行列 $T_{Pcs,66}$ を求めると図1のようになる.

[定義9] ある代表的両立性クラス RC_i にたいする主閉包集合行列 $T_{Pcs,i}$ の列線の中で, どの2本をとっても, それらの同じ少なくとも1個の行線上にともに行列要素を持てば, すなわちそれらの2本の列線がたがいに従属関係にあれば, このような関係を持つすべての列線を冗長列線 RCL と呼ぶ. これにたいしどの2本の列線も同じ行線上に行列要素を持たなければ, すなわちたがいに独立関係にあれば, このような関係にあるすべての列線を非冗長列線 $IRCL$ と呼ぶ.

[定義10] 非冗長列線 $IRCL$ の集合を非冗長列線集合 $IRCC$ (Irredundancy Column Line Class) と呼び, 他のどの非冗長列線集合によってもカバーされない非冗長列線集合を最大非冗長列線集合 $MIRCC$ (Maximal Irredundancy Column Line Class) と呼ぶ.

[例3] 図1の C_{66} にたいする主閉包集合行列 $T_{Pcs,66}$ で, 非冗長列線の対の集合は

$$\{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 34, 39, 47, 56, 57, 58, 59, 67, 79\} \quad (11)$$

となり, 残りのすべての列線対の集合は冗長列線の対の集合となる. 式(11)より最大非冗長列線集合 $MIRCC$ の集合を求めると,

$$\{1234, 1239, 1256, 1258, 1259, 1567, 1579, 147\} \quad (12)$$

が得られ, この集合の要素としてリテラルの個数, すなわち列線数のもっとも長い1234を採用すると, 非冗長列線 $IRCL$ の列線番号は1~4となり, したがって冗長列線 RCL の番号は5~9となる.

[定理6] 代表的両立性クラス RC_i にたいする主閉包集合行列 $T_{Pcs,i}$ 上の各冗長列線上の行列要素の少なくとも1個は非冗長列線上の行列要素と一致する.

(証明) もし, 任意の冗長列線上に存在する行列要素の全部が非冗長列線上の行列要素と一致しないものとする, この冗長列線はすべての非冗長列線と独立関係にあり, 定義9よりこの冗長列線は非冗長列線にならねばならないことより自明. (QED)

[説明4] たとえば, 図1の冗長列線5の行線 C_{34} 上の行列要素は非冗長列線4の上の行列要素に一致する.

[定理7] ある代表的両立性クラス RC_i にたいす

る複数個の主閉包集合の濃度は、この RC_i にたいする主閉包集合行列の非冗長列線の線数より小さくはない。

(証明) ある代表的両立性クラス RC として C_α を採用し、そのインプライする閉包対集合 EP_α の要素 $CP_{\alpha,j}$ を考え、これらの各 $CP_{\alpha,j}$ をカバーする RC の集合を $RC_{\alpha,j}$ とする。ここで、 $j=1, 2, \dots, n_{\alpha,p}$ (EP_α の要素の数) である。なお、 $CP_{\alpha,j}$ の中で、 $1 \leq j \leq l$ の範囲のものは、 C_α にたいする主閉包集合行列 $T_{PCS,\alpha}$ の非冗長列線 $IRCL$ それぞれに、また、 $l+1 \leq j \leq n_{\alpha,p}$ の範囲のものは冗長列線 RCL それぞれに対応し、集合 $RC_{\alpha,j}$ は

$$RC_{\alpha,j} = \bigcup_{k=2}^{m_j} RC_{\alpha,j}^{(k)}, \quad j=2 \sim l, \text{ または } l+1 \sim n_{\alpha,p} \quad (13)$$

で表される。ここで $RC_{\alpha,j}^{(k)}$ は j 列線上の行列要素を、また m_j はその個数を、また \cup は和集合を表す。

C_α にたいする主閉包集合は、 C_α とすべての $RC_{\alpha,j}$ との直積の要素として求められるから、 C_α を論理変数 c_α に、 $RC_{\alpha,j}$ を $rc_{\alpha,j}$ に、 $RC_{\alpha,j}^{(k)}$ を $rc_{\alpha,j}^{(k)}$ に対応させると、 C_α の主閉包集合を求めるという命題は、ベトリック関数 $p_{PCS,\alpha}$ を用いてつぎのように表せる。

$$p_{PCS,\alpha} = \left(c_\alpha \prod_{j=2}^l rc_{\alpha,j_1} \right) \cdot \left(\prod_{j_2=l+1}^{n_{\alpha,p}} rc_{\alpha,j_2} \right), \quad (14a)$$

$$rc_{\alpha,j} = \sum_{k=1}^{n_j} rc_{\alpha,j}^{(k)}, \quad \text{ただし } j=j_1, j_2. \quad (14b)$$

ここで、 \prod と \sum はそれぞれ論理積と論理和を表す。この式(14a)を積和形式に変換すると、その各積項は C_α によって導かれる各主閉包集合に相当する。

式(14)の和項 rc_{α,j_1} を構成する各リテラル $rc_{\alpha,j_1}^{(k)}$ (ここで、 $1 \leq k \leq n_{j_1}$) は、閉包対集合 EP_α の要素 CP_{α,j_1} に相当する非冗長列線 $IRCL$ 上の行列要素に対応しており、これらの行列要素は、定義9の非冗長列線間の相互独立の性質より、 $1 \leq k \leq n_{j_1}$, $2 \leq j_1 \leq l$ の範囲のすべての k と j_1 について異なっている。したがって、 $c_\alpha \prod_{j=2}^l rc_{\alpha,j_1}$ を積和形式に変換すると、すべての積項のリテラル数は l となる。つぎに式(14)の和項 rc_{α,j_2} を構成する各リテラル $rc_{\alpha,j_2}^{(k)}$ (ここで $1 \leq k \leq n_{j_2}$) は、閉包対集合 EP_α の要素 CP_{α,j_2} に相当する冗長列線 RCL 上の行列要素に対応しており、これらの行列要素は定理6によって各冗長列線ごとに

少なくとも1個は非冗長列線上の行列要素と一致する。したがって式(14a)を積和形式に変換すると、このような行列要素に対応するリテラルは $c_\alpha \prod_{j_1=2}^l rc_{\alpha,j_1}$ 内の同じリテラルに吸収される。この場合、一般には異なる x 個の冗長列線上の異なる行列要素 x 個が同一の非冗長列線上の x 個の行列要素と一致する場合があるから、これらの x 個の冗長列線に対応する和項それぞれの行列要素と $c_\alpha \prod_{j_1=2}^l rc_{\alpha,j_1}$ との積を求める場合、この非冗長列線に対応する同じ和項が x 回用いられる。この結果得られる積項は c_α の主閉包集合に相当し、そのリテラル数は $l+x-1$ となる。 x は1以上であるから積項のリテラル数は最小のものでも非冗長列線の線数 l よりも小さくはない。すなわち、主閉包集合の濃度は非冗長列線の線数より小さくはない。(QED)

【説明5】 図1の C_{66} にたいする主閉包集合行列で非冗長列線を例3で述べたように $1 \sim 4$ とすると、 $l=4$ である。図1を用いて主閉包集合を求める一つの手段としてベトリック関数 $p_{PCS,66}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} p_{PCS,66} &= 66(20+59+80) \\ &\quad \times (7+41+42+44+68+69+74+76) \\ &\quad \times (34+50+52+67+79+86) \\ &\quad \times (34+67+69) \\ &\quad \times (42+46+72+76+78+86) \\ &\quad \times (21+41+68+74+80) \\ &\quad \times (44+48+70+72+74+76+78+86) \\ &\quad \times (15+49+51+52+70+72+79+86) \\ &= 66 \cdot 80 \cdot 69 \cdot 86 + \dots + 66 \cdot 80 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 86 + \dots \quad (15) \end{aligned}$$

となる。ここで用いた数字は代表的両立性クラス RC を表す C_i の添字 i である。この式より主閉包集合の最小の長さのものの一つが $\{C_{66}, C_{80}, C_{69}, C_{36}\}$ で、その長さが非冗長列線数に等しいことがわかる。

【定理8】 ある代表的両立性クラス RC_α にたいする主閉包集合行列 $T_{PCS,\alpha}$ の非冗長列線上で、冗長列線上の行列要素の存在する行と同一行上に何も行列要素が存在しなければこの行を抹消することによって得られる行列から主閉包集合 PCS_α の最小のものが求まる。

(証明) RC の中から任意の C_α を選び、その主閉包集合行列 $T_{PCS,\alpha}$ の各非冗長列線 n 本と冗長列線 k 本の持つ行列要素の和積表現をそれぞれ $a_i \prod_{i=2}^n (a_i +$

$\sum x_{ij}$, $\prod_{i=2}^{k+1} (a_i + \sum y_{ij})$ として, C_α にたいする主閉包集合を求める命題をベトリック関数 $p_{PCS,\alpha}$ で表すと,

$$p_{PCS,\alpha} = a_1 \prod_{i=2}^n (a_i + \sum x_{ij}) \prod_{i=2}^{k+1} (a_i + \sum y_{ij}) \tag{16}$$

が得られる. ここで, a_1 は C_α にたいする行列要素に相当し, a_i は非冗長列線と冗長列線上で一致する行列要素に相当する. $\sum y_{ij}$ は a_i と $\sum x_{ij}$ とも同一の行列要素を全く共有しない独立な和項である. ここで

$$0 < k+1-n < n \tag{17}$$

である. さらに新たな関数として整数 i にたいしつぎの δ_n と $\text{sel}(a_i, l=2 \sim n)$,

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & i > n \\ 0, & i \leq n, \end{cases} \tag{18}$$

$$\text{sel}(a_i, l=2 \sim n) = (i \text{ の如何にかかわらず, その } l \text{ は } 2 \text{ から } n \text{ までのどれか一つを表す } a_i) \tag{19}$$

を導入し, これらを式(16)の右辺の最後の項に代入して,

$$p_{PCS,\alpha} = a_1 \prod_{i=2}^n (a_i + \sum x_{ij}) \cdot \prod_{i=2}^{k+1} \{(1-\delta_n)a_i + \delta_n \text{sel}(a_i, l=2 \sim n) + \sum y_{ij}\} \tag{20}$$

を得る. 式(20)に吸収率と上述した $\sum y_{ij}$ の独立性を利用すると,

$$p_{PCS,\alpha} = a_1 \prod_{i=2}^n (a_i + \sum x_{ij} \sum y_{ij}) \cdot \prod_{i=n+1}^{k+1} \{\text{sel}(a_i, l=2 \sim n) + \sum y_{ij}\} \tag{21}$$

が得られる. 式(17)の関係から, 式(21)の $\prod_{i=n+1}^{k+1}$ の項を積和形式に展開した場合, $\prod_{i=n+1}^{k+1} \text{sel}(a_i, l=2 \sim n)$ が最小リテラル数の項となり,

$$\begin{aligned} p_{PCS,\alpha} &= a_1 \prod_{i=2}^n a_i \prod_{i=n+1}^{k+1} \{\text{sel}(a_i, l=2 \sim n)\} \\ &\quad + (\text{第1項と同数以上のリテラルの積項の和}) \\ &= a_1 \prod_{i=2}^n a_i + (\text{同数以上のリテラルの積項の和}) \end{aligned} \tag{22}$$

のように書き直せる. つぎに, 冗長列線上の行列要素で非冗長列線上のそれと一致しないもの, すなわち $\sum y_{ij}$ を主閉包集合から除去したものをベトリック関数 $p'_{PCS,\alpha}$ で表し, 式(21)で $\sum y_{ij}=0$ とおいて,

$$p'_{PCS,\alpha} = a_1 \prod_{i=2}^n a_i \tag{23}$$

を得る. 式(23)は式(22)の第1項の最小リテラル数の積項と一致する. これより, 非冗長列線上の行列要素と一致しない冗長列線上の行列要素を除去しても最小寸法の主閉包集合 PCS_α が求まる. (QED)

【説明 6】 図1の C_{66} にたいする主閉包集合行列 $T_{PCS,66}$ 上で, 冗長列線上に行列要素があって非冗長列線上にそれがない行線は $C_{15}, C_{21}, C_{46}, C_{48}, C_{49}, C_{51}, C_{70}, C_{72}$, および C_{78} であるのでこれらを抹消し, 新たに主閉包集合行列を作る. この抹消の様様を図2に示す. この行列より, 新たな主閉包集合を作るために, 式(15)と同様にベトリック関数 $p'_{PCS,66}$ を求めると,

$$\begin{aligned} p'_{PCS,66} &= 66(20+59+8) \\ &\quad \times (7+41+42+44+68+69+74+76) \\ &\quad \times (34+50+52+67+79+86) \\ &\quad \times (34+67+69)(42+76+86) \\ &\quad \times (41+68+74+80)(44+74+76+86) \\ &\quad \times (52+79+86) \\ &= 66 \cdot 80 \cdot 69 \cdot 86 + \dots \end{aligned} \tag{24}$$

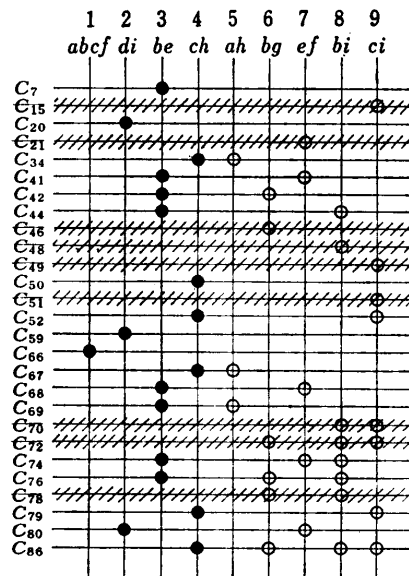


図2 図1の C_{66} にたいする主閉包集合行列 $T_{PCS,66}$ 上の行線の抹消
Fig. 2 Deletion of row lines from the prime closure set matrix $T_{PCS,66}$ for C_{66} of Fig. 1.

が得られ、式(15)で求めた最小寸法の PCS, 66 が求まる。

【定理 9】 与えられた回路にたいする代表的両立性クラス RC のみで構成される最小閉被覆 M の任意の要素 C_i が、1 次両立性クラス PC (C_j で表す) で置換できるためには、 $C_i \subset C_j$, または $C_i \supset C_j$ かつ $C_i - C_j \leq M - C_i$ であって、しかも $EP_i \leq EP_j$ かつ $EP_j - EP_i \leq M - C_i$ が成立することである。

(証明) 自明。

(QED)

【説明 7】 表 1 の状態遷移表で与えられる回路の最小閉被覆の解の一つは $\{abch, dgi, abf, bef\}$ で与えられる。前述した表 2 には 1 次両立性クラス PC から代表的両立性クラス RC を求めるにあたって用いた除去定理が併記してある。この最小閉被覆の要素である $C_i = dgi$ と、除去定理 2 (D2) によって PC の中から除かれた $C_j = degi$ を比較してみる。このとき $C_i \subset C_j$, また $EP_i \leq EP_j$ であり、 $EP_j - EP_i = ef$, $M - C_i = \{abch, abf, bef\}$ であるから、 $EP_j - EP_i \leq M - C_i$ が成立し、 dgi を $degi$ で置換しても最小閉被覆が満足される。同様に PC から除去した $dghi$, または $deggi$ を C_i としても $EP_j - EP_i \leq M - C_i$ を満足しない。つぎに、 dg , または gi を C_i としても、 $C_i - C_j \leq M - C_i$ が満足されない。したがって dgi の代りに PC の中から採用できるのは $degi$ のみである。さらに最小閉被覆の要素である abf は除去した PC の中の af で置換できる。

3. アルゴリズムと計算例

本章では前章で述べた定義と定理にしたがって不完全指定順序回路の最小閉被覆の複数解を求めるアルゴリズムを述べ、さらに実例を述べる。

3.1 最小閉被覆を求めるアルゴリズム

つぎの各ステップにしたがって最小閉被覆の複数解を求める。なお、このアルゴリズムのフローチャートを図 3 に示す。

【ステップ 1】 与えられた不完全指定順序回路の状態遷移表より、両立性対 CP , その MC , PC および EP を生成する (もちろん、この過程で $IMPC$ も生成される)。ついですべての PC の中で、その EP が空集合となる PC のみで閉被覆を作り、その最小の濃度 v を決める。さらに MC のみで閉被覆を作り、その最小の濃度 u を決定する。つづいて、最初の機械の内部状態数 n と、 MC の数 m も含めて、式(7)により最小閉被覆の濃度の上限 u_{UB} を定める。

【ステップ 2】 先に提案した手法⁹⁾ により PC にたいして 3 つの除去定理を適用してその中から RC を求め、各 RC にたいする EP の表 S_{RC} を作る。

【ステップ 3】 各 RC について、その EP の要素である両立性対 CP_α をすべて列挙し、これらの CP_α ごとにこれをカバーする RC , すなわち C_β を列挙した表を作成する。この表を両立性対包含表 T_{CP} と呼ぶ。

【ステップ 4】 両立性対包含表 T_{CP} の中で、 RC の生起回数を調べ、生起回数表 $T_{CP,CNT}$ 表を作成する。

【ステップ 5】 $T_{CP,CNT}$ 表でもっとも生起回数の多い RC を C_α とし、この C_α のインプライする閉包対集合 EP_α の要素 $CP_{\alpha,k}$ (ここで $1 \leq k \leq n_c$, ただし n_c は EP_α の要素の数) をカバーする RC の集合を、すべての k について T_{CP} から見つけて列挙し、 C_α も含めて主閉包集合行列 $T_{PCS,\alpha}$ を作成する。

【ステップ 6】 この行列から各列線を調べて $MIRCC$ を作り、その中でリテラル数のもっとも大きなものを $MIRCC_\alpha$ で表し、そのリテラル数を u_N とする。このとき $u_N > u_{UB}$ ならば、採用した RC (C_α) を表 T_{CP} および $T_{CP,CNT}$ から抹消してステップ 5 へもどる。 $u_N \leq u_{UB}$ ならつぎへ進む。

【ステップ 7】 $u_N = u_{UB}$ ならば、主閉包集合行列 $T_{PCS,\alpha}$ の非冗長列線と冗長列線上の行列要素を比較し、定理 8 により不要な行線は抹消する。ついでこの $T_{PCS,\alpha}$ の列線相互間で他の列線の行列要素をカバーする行列要素を持った列線があれば、この列線を抹消する。 $u_N < u_{UB}$ ならばこのような抹消作業は行わない。

【ステップ 8】 このようにして得られた $T_{PCS,\alpha}$ の各列線についてその上の行列要素の和項を作り、全列線間でこれらの和項の積をとり、和積形式のペトリック関数を作成する。この関数を積和形式に変換し、積項のリテラル数を u'_N とする。ここで $u'_N \leq u_{UB}$ の範囲のリテラル数を持ったすべての積項にたいしてはつぎのステップへ進む。 $u'_N > u_{UB}$ ならば、採用した RC (ここでは C_α) を表 T_{CP} および $T_{CP,CNT}$ から抹消してステップ 5 へもどる。

【ステップ 9】 得られたリテラル数 u'_N が $u'_N \leq u_{UB}$ となる積項を C_α の主閉包集合として採用し、まずその被覆性を調べ、被覆性を満足していなければ、つぎのステップ 10 に移る。被覆性を満足しておれば閉包性を調べ、閉包性を満足していなければつぎのス

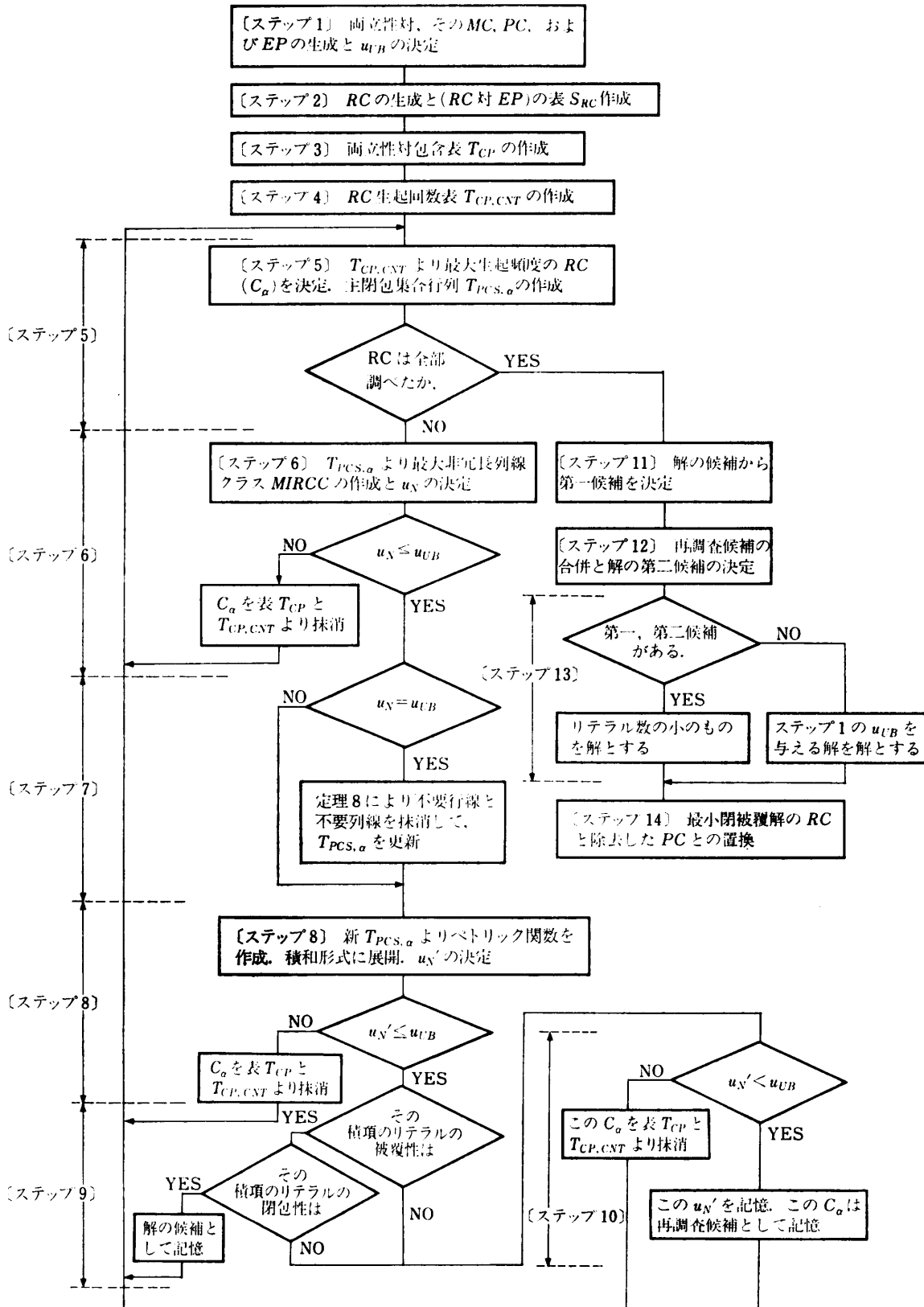


図3 フローチャート
Fig. 3 Flow chart.

ステップ10へ移る。閉包性を満足しておればこの主閉包集合を解の候補として記憶し、ステップ5へもどる。

[ステップ10] $u'_N = u_{UB}$ ならば、この $RC(C_\alpha)$ を表 T_{CP} および $T_{CP,CNT}$ から抹消し、また、 $u'_N < u_{UB}$ ならば、その u'_N と C_α を再調査候補として記憶し、ステップ5にもどる。

[ステップ11] すべての RC について $T_{PCS,\alpha}$ の調査が終わったならば、解の候補として記憶したすべての $RC(C_\alpha)$ の主閉包集合の中でリテラル数のもっとも少ないもの、すなわち u_N のもっとも小さいものを解の第一候補とする。

[ステップ12] これまでに再調査用の候補として記憶してある複数個の RC_α 相互間でその主閉包集合を合併した場合、そのリテラル数 u'_N が $u'_N \leq u_{UB}$ を満足するようなものを選んで合併し (u'_N が記憶してあるのでこれが可能である)、その被覆性と閉包性を調べる。これらが満足されるものを解の第二候補とする。

[ステップ13] 求まった解の第一候補と第二候補との中からリテラル数の最小のものを所望の最小被覆解とする。第一候補と第二候補の中に解がない場合は、式(7)で u_{UB} を導くもととなった n, m, u, v の中で最小の値を与えるもの(たとえば v を与える MC) の最小被覆を解とする。

[ステップ14] 求まった最小閉被覆を構成する各 RC を調べ、 RC を求めるにあたって除去された PC の中に、これらの RC に置き換わりうるものがないか否かを、定理9によって確かめる。

3.2 計算例

表1に示す状態遷移表をもった不完全指定順序回路について最小閉被覆を求める。ステップ1として定理5より、説明3と全く同様にして $u_{UB} = 4$ を得る。ステップ2として表 S_{RC} を求めると、これは表3のものである。ステップ3として両立性対包含表 T_{CP} を作ると、表4が得られる。ステップ4としてこの表4から RC の生起回数表 $T_{CP,CNT}$ を作ると表5が得られる。ステップ5として表5でもっとも生起回数の多い RC である C_{66} を採用して主閉包集合行列 $T_{PCS,66}$ を作成し、前述の図1が得られる。ステップ6として $T_{PCS,66}$ から $MIRCC$ を求めると、式(12)と同じものが得られる。この中で最大のリテラル数を持つ $MIRCC66$ に1234を採用すると、 $u_N = 4$ となり $u_N = u_{UB}$ であるからつぎのステップ7を行う。ス

表4 表1にたいする両立性包含表 T_{CP}
Table 4 Inclusive table of compatible pairs for Table 1.

両立性対 CP_α	C_β
<i>cf</i>	$C_{12}, C_{49}, C_{66}, C_{70}$
<i>bg</i>	$C_{42}, C_{46}, C_{72}, C_{76}, C_{78}, C_{86}$
<i>ef</i>	$C_{21}, C_{41}, C_{62}, C_{74}, C_{80}$
<i>bi</i>	$C_{44}, C_{48}, C_{76}, C_{72}, C_{74}, C_{76}, C_{78}, C_{86}$
<i>ci</i>	$C_{15}, C_{49}, C_{51}, C_{52}, C_{70}, C_{72}, C_{78}, C_{86}$
<i>be</i>	$C_7, C_{41}, C_{42}, C_{44}, C_{62}, C_{69}, C_{74}, C_{78}$
<i>ae</i>	C_9, C_{62}, C_{69}
<i>ac</i>	$C_{29}, C_{34}, C_{46}, C_{67}$
<i>ch</i>	$C_{24}, C_{59}, C_{52}, C_{66}, C_{70}, C_{86}$
<i>ah</i>	C_{24}, C_{67}, C_{69}
<i>bf</i>	$C_{21}, C_{41}, C_{62}, C_{64}, C_{70}, C_{74}$
<i>di</i>	C_{20}, C_{59}, C_{80}
<i>af</i>	C_{21}, C_{62}, C_{68}
<i>ab</i>	$C_{29}, C_{31}, C_{62}, C_{67}, C_{68}, C_{69}$
<i>bc</i>	$C_6, C_{29}, C_{46}, C_{67}, C_{70}, C_{72}, C_{86}$

表5 表4の RC の生起回数表 $T_{CP,CNT}$
Table 5 Table of occurrence times of RCs at Table 4, $T_{CP,CNT}$.

生起回数	RC
0	$C_{10}, C_{12}, C_{19}, C_{22}, C_{24}, C_{26}, C_{28}, C_{62}, C_{65}$
1	$C_8, C_6, C_7, C_{12}, C_{15}, C_{20}, C_{21}, C_{46}, C_{50}, C_{51}, C_{59}$
2	$C_{42}, C_{44}, C_{49}, C_{52}, C_{72}, C_{79}, C_{80}$
3	$C_{29}, C_{31}, C_{34}, C_{41}, C_{74}$
4	C_{69}, C_{72}, C_{74}
5	C_{67}, C_{70}, C_{86}
6	C_{66}, C_{68}

表6 表1の状態遷移表で定まる不完全指定順序回路の最小閉被覆解

Table 6 Minimal closed cover solutions of incompletely specified sequential machine defined by state transition table of Table 1.

番号	最小被覆解	備考
1	<i>abcf, abeh, defi, bcghi</i>	[ステップ13]までの解
2	<i>abch, abf, def, dgi</i>	
3	<i>abch, af, def, dgi</i>	[ステップ14]の定理9の適用による解の追加
4	<i>abch, abf, bef, degi</i>	
5	<i>abch, af, bef, degi</i>	

ステップ7として $T_{PCS,66}$ 上で非冗長列線と冗長列線を比較し、定理8によって不要な行線 $C_{15}, C_{21}, C_{46}, C_{48}, C_{49}, C_{51}, C_{70}, C_{72}$, および C_{78} を抹消し、その結果、列線4 (両立性対 ch に相当) は列線9 (両立性対 ci に相当) の行列要素をカバーするから、列線4

をも抹消する。ステップ8としてこのように修正された $T_{PCS,66}$ の全列線上の行列要素の和と、これらすべての積をとったベトリック関数 $p'_{PCS,66}$ を求め積和項に展開して式(24)に示すように $\{C_{66}, C_{80}, C_{69}, C_{86}\}$ を C_{66} の主閉包集合とし、 $u'_N=4=u_{UB}$ であるからつぎへ進む。ステップ9として、主閉包集合 $\{C_{66}, C_{80}, C_{69}, C_{86}\}$ の被覆性と閉包性を調べる。 $C_{66}=abcf$, $C_{69}=abeh$, $C_{80}=defi$, $C_{86}=bcghi$ であるから、被覆性

は満足される。また、表3よりこれらの RC のインプライする EP に含まれる CP はすべて同じ集合の中の他の RC に含まれるから閉包性も満たされる。したがって解の候補として記憶しステップ5へ移り、つづいて $T_{CP,CNT}$ 表で生起回数の多い C_{68} を選び、 $T_{PCS,68}$ を作成し、ステップ6を行うと、 $u_N=5 > u_{UB}$ となるので、 T_{CP} と $T_{CP,CNT}$ 表からこれを除去する。このような除去作業はステップ7~10でも行われ

表7 プログラム実行用の不完全指定順序回路の7つの状態遷移表

Table 7 Seven state transition tables to incompletely specified sequential circuits for this program running.

問 1							問 2								
<i>a</i>	<i>f</i> , 0	<i>a</i> , 0	<i>b</i> , 0	<i>d</i> , 0			<i>a</i>	<i>c</i> , 0	—, —	<i>b</i> , —					
<i>b</i>	—, —	<i>f</i> , 0	<i>b</i> , 0	<i>d</i> , 0			<i>b</i>	—, —	<i>d</i> , 0	<i>f</i> , —					
<i>c</i>	—, —	<i>a</i> , 0	<i>c</i> , 0	<i>d</i> , 0			<i>c</i>	<i>e</i> , 1	—, —	—, 0					
<i>d</i>	<i>e</i> , 1	—, —	<i>b</i> , 0	<i>d</i> , 0			<i>d</i>	—, —	<i>a</i> , 1	<i>a</i> , —					
<i>e</i>	<i>e</i> , 1	<i>e</i> , 0	<i>c</i> , 0	<i>d</i> , 0			<i>e</i>	<i>a</i> , —	—, —	<i>f</i> , —					
<i>f</i>	<i>a</i> , 0	<i>f</i> , 0	<i>c</i> , 0	<i>d</i> , 0			<i>f</i>	<i>d</i> , —	<i>e</i> , —	<i>f</i> , —					
問 3							問 4								
<i>a</i>	—, —	<i>g</i> , 0	<i>e</i> , 1	<i>d</i> , —			<i>a</i>	<i>a</i> , 0	—, —	<i>e</i> , —	<i>b</i> , 1				
<i>b</i>	<i>a</i> , —	<i>d</i> , —	—, —	—, 0			<i>b</i>	<i>e</i> , —	<i>c</i> , 1	<i>b</i> , —	—, —				
<i>c</i>	<i>c</i> , —	—, 0	—, —	<i>g</i> , 1			<i>c</i>	—, —	<i>b</i> , 0	—, 1	<i>d</i> , 0				
<i>d</i>	<i>e</i> , 0	—, —	<i>a</i> , —	—, —			<i>d</i>	<i>a</i> , 0	—, —	<i>f</i> , 1	<i>b</i> , —				
<i>e</i>	—, 1	<i>f</i> , —	—, 1	—, 1			<i>e</i>	<i>b</i> , 0	—, —	<i>b</i> , 0	—, —				
<i>f</i>	—, 1	<i>e</i> , —	<i>a</i> , 1	—, 1			<i>f</i>	—, —	<i>c</i> , 1	—, 0	<i>g</i> , 1				
<i>g</i>	<i>f</i> , —	—, 1	<i>b</i> , —	<i>h</i> , —			<i>g</i>	<i>d</i> , 1	<i>d</i> , —	—, —	—, 0				
<i>h</i>	<i>c</i> , —	—, —	<i>a</i> , 0	—, —											
問 5							問 6								
<i>a</i>	<i>a</i> , 0	—, —	<i>d</i> , 0	<i>e</i> , 1	<i>b</i> , 0	<i>a</i> , —	—, —	<i>a</i>	—, —	<i>c</i> , 1	<i>e</i> , 1	<i>b</i> , 1			
<i>b</i>	<i>b</i> , 0	<i>d</i> , 1	<i>a</i> , —	—, —	<i>a</i> , —	<i>a</i> , 1	—, —	<i>b</i>	<i>e</i> , 0	—, —	—, —	—, —			
<i>c</i>	<i>b</i> , 0	<i>d</i> , 1	<i>a</i> , 1	—, —	—, —	—, —	<i>g</i> , 0	<i>c</i>	<i>f</i> , 0	<i>f</i> , 1	—, —	—, —			
<i>d</i>	—, —	<i>e</i> , —	—, —	<i>b</i> , —	<i>b</i> , 0	—, —	<i>a</i> , —	<i>d</i>	—, —	—, —	<i>b</i> , 1	—, —			
<i>e</i>	<i>b</i> , —	<i>e</i> , —	<i>a</i> , —	—, —	<i>b</i> , —	<i>e</i> , —	<i>a</i> , 1	<i>e</i>	—, —	<i>f</i> , 0	<i>a</i> , 0	<i>d</i> , 1			
<i>f</i>	<i>b</i> , 0	<i>c</i> , —	—, 1	<i>h</i> , 1	<i>f</i> , 1	<i>g</i> , 0	—, —	<i>f</i>	<i>c</i> , 0	—, —	<i>b</i> , 0	<i>c</i> , 1			
<i>g</i>	—, —	<i>c</i> , 1	—, —	<i>e</i> , 1	—, —	<i>g</i> , 0	<i>f</i> , 0								
<i>h</i>	<i>a</i> , 1	<i>e</i> , 0	<i>d</i> , 1	<i>b</i> , 0	<i>b</i> , —	<i>e</i> , —	<i>a</i> , 1								
問 6							問 7								
<i>a</i>	—, —	<i>c</i> , 1	<i>e</i> , 1	<i>b</i> , 1			<i>a</i>	<i>b</i> , —	<i>d</i> , —	—, —	<i>c</i> , —				
<i>b</i>	<i>e</i> , 0	—, —	—, —	—, —			<i>b</i>	<i>f</i> , —	<i>i</i> , —	—, —	—, —				
<i>c</i>	<i>f</i> , 0	<i>f</i> , 1	—, —	—, —			<i>c</i>	—, —	—, —	<i>g</i> , —	<i>h</i> , —				
<i>d</i>	—, —	—, —	<i>b</i> , 1	—, —			<i>d</i>	<i>b</i> , —	<i>a</i> , —	<i>f</i> , —	<i>e</i> , —				
<i>e</i>	—, —	<i>f</i> , 0	<i>a</i> , 0	<i>d</i> , 1			<i>e</i>	—, —	—, —	—, —	<i>f</i> , —				
<i>f</i>	<i>c</i> , 0	—, —	<i>b</i> , 0	<i>c</i> , 1			<i>f</i>	<i>a</i> , 0	—, —	<i>b</i> , —	—, 1				
							<i>g</i>	<i>e</i> , 1	<i>b</i> , —	—, —	—, —				
							<i>h</i>	<i>e</i> , —	—, —	—, —	<i>a</i> , 0				
							<i>i</i>	<i>e</i> , —	<i>c</i> , —	—, —	—, —				

る。このほかに同じ条件となって除去される RC は C_{70}, C_{74}, C_{29} , および C_{19} である。 $u_N=4=u_{UB}$ となっても被覆性も閉包性も満たさないため抹消されるのは C_{49} , および C_3 であり, これはステップ 10 で行われている。また, ステップ 6~11 の間で $u_N=4=u_{UB}$ となり, 被覆性と閉包性の満足される主閉包集合を全部列挙すると表 6 の番号 1 と 2 に示すような 2 つの解が得られる。この例で用いている不完全指定順序回路の例では, 実際にはステップ 12 で述べているような再調査候補の合併による解の存在の確認が必要である。この例では計算量が膨大となるため手計算による解は省略した。この結果, ステップ 13 の手順も省略されている。他のより簡単な例ではこれらが比較的簡単に手計算できる。最後にステップ 14 として定理 9 を用いると, 説明 7 で述べたように表 6 の番号 3~5 に示す解が得られる。

4. プログラムによる実行結果

前章で述べたアルゴリズムにしたがって BASIC 言語と LISP 言語によるプログラムを作成した。これを新 GT 法プログラム^{12), 18)} と仮称し, 先に提案したア

ルゴリズム⁹⁾ によるものを GT 法と仮称する。これらの両プログラムは代表的両立性クラス RC を作成するのに共に同じ手法を用いている。ただ新 GT 法は最小閉被覆の大きさの上限値 u_{UB} の決定を必要とし, MC や PC の求まった段階でこの決定を行い, その後で RC の作成を行う。これは, u_{UB} の決定に MC や PC が用いられるためである。つぎに RC 作成後のプログラムについて考える。GT 法は, 主閉包集合を求めるため, 任意の RC のインプライする EP の要素である CP をカバーする RC の集合同士の直積を全部求める。これにたいし, 新 GT 法は, u_{UB} を越える長さを与えるような主閉包集合を生成する源となる RC を予知し, これを対象外として抹消して計算量を減少させている。新 GT 法では, GT 法に比してこのためのプログラムが追加されている。

GT 法と新 GT 法の 2 つのプログラムを用いて表 7 の状態遷移表群で表した 7 問の不完全指定順序回路の最小解を求めた。これらの状態遷移表はすべて文献に見られるもので, 中でも問 3 は本論文と密接な関係にある文献 5) と 9) に, また問 7 は文献 5) に採用されている。特に問 7 は表 1 と同じもので複雑な問題の

表 8 表 7 の問題にたいし 2 つの方法を用いた場合の演算時間と演算結果の比較
Table 8 Comparisons of both operating times and results obtained by using two different methods respectively.

項目		問題番号	1	2	3	4	5	6	7	
GT 法プログラム	演算時間(秒)	RC 作成まで	13	13	31	11	24	11	149	
		主閉包集合作成以降	3	1	4	5	4	7	計算不可能	
		計	16	14	35	16	28	18	計算不可能	
		解	de, abcf	cd, de, abf	ab, cef, dgh	cg, abd, abe, bef cg, bd, abe, bef	bc, fg, deh, abde	be, cf, acd ab, cd, ef be, cf, abd	計算不可能	
新 GT 法プログラム	演算時間(秒)	RC 作成まで	13	13	31	11	24	11	149	
		上限値 u_{UB} の計算	1	2	3	2	3	1	14	
		主閉包集合作成以降	4	4	10	15	29	10	1, 147	
		計	18	19	44	28	56	22	1, 310	
	解		単独の主閉包集合による解	de, abcf	cd, de, abf	ab, cef, dgh	cg, abd, abe, bef cg, bd, abe, bef	なし	be, cf, acd ab, cd, ef	abcf, abeh, defi, bcghi, abch, abf, bef, dqi
			合併による解	なし	なし	なし	なし	bc, fg, deh, abde	be, cf, abd	計算打ち切り
			定理 9 の適用による解	なし	なし	なし	cg, abd, ae, bef cg, bd, abe, bf	bc, fg, eh, abde	ab, bcd, ef be, cf, ad	abch, af, bef, dqi abch, abf, bef, deqi abch, af, bef, deqi

典型例である。ミニコンピュータ μ VAX-II (DEC 製) を用いてこれらの問題にたいして LISP 言語による 2 つのプログラムを実行した結果を、演算時間と最小解について比較して表 8 に示す¹³⁾。この表で、問 1~3 については、新 GT 法では GT 法に比し総合演算時間が 1.1~1.4 倍に増大している。これは、 u_{UB} の計算時間と、主閉包集合作成に際して必要となる不要 RC の除去時間との追加に起因する。なお、問 1~3 のすべてについて、両プログラムから同一解が得られた。問 4~6 については、新 GT 法では、問 5 を除き、総合演算時間が 2 倍近くまで増大した。これは主に主閉包集合作成以降の演算時間が増大したことに起因する。この増大はステップ 12 のように再調査候補の合併による解の生成と、定理 9 の適用による (すでに除去した PC の再活用による) 新たな解の生成とによるものである。特に膨大な計算を要する問 7 については、RC 生成までの演算時間が 149 秒で、問 1~6 の値 11~31 秒を大きく上回った。これは RC の生成個数が約 40 個で他の問題より多いためである。また、GT 法では問 7 にたいし主閉包集合生成以降の演算が不可能であったのにたいし、新 GT 法では 1,310 秒 (上限値 u_{UB} の計算に 14 秒、主閉包集合生成以降に 1,147 秒) を要したものの、表 6 と全く同じ解が得られた。これは新 GT 法の強力さを物語っている。また、16 ビットパーソナルコンピュータ PC 9801 (NEC 製) を用いて BASIC 言語による 2 つのプログラムを実行し、ほぼ同様な結果を得た¹²⁾。

5. む す び

本論文のアルゴリズムの特徴はつぎのようになる。

(1) GT 法では各 RC について直積計算を行い、考えられる主閉包集合すべてを求めた。しかし、ここでは最小閉被覆の大きさの上限 u_{UB} を最初に決定し、その値を越える濃度を持つ主閉包集合を生成する RC は最初から除去し、計算量と計算時間の減少を図った。

(2) 単独の主閉包集合を中心にした最小閉被覆を求めてから、閉被覆を満足しない主閉包集合を合併して別の最小閉被覆を生成した。

(3) 生成された最小閉被覆の構成要素である RC を、すでに除去済みの PC で置換できるように配慮し、複数解の充実を図った。

(4) 任意の主閉包集合の大きさを、主閉包集合生成前に予測するため主閉包集合行列 $T_{PCs,a}$ とその最

大非冗長列線集合 $MIRCC$ を導入した。

このような本論文の手法の特徴から、GT 法に比して、簡単な問題では 1.4 倍、やや複雑な問題では 2 倍の時間でより完全な複数解を求めることが可能となり、問 7 のような複雑な問題についても複数解を求めることが可能とった。

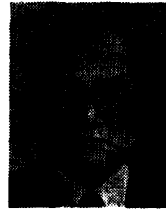
なお、いくつかの主閉包集合の合併による計算量の増大の圧縮については、今後さらに検討を要する。

参 考 文 献

- 1) Paul, M. C. and Unger, S. H.: Minimizing the Number of States in Incompletely Specified Sequential Switching Functions, *IRE Trans. Electron. Comput.*, Vol. EC-8, pp. 356-367 (1959).
- 2) Unger, S. H.: Flow Table Simplification—Some Useful Aids, *IEEE Trans. Electron. Comput.*, Vol. EC-14, pp. 472-475 (1965).
- 3) McClusky, E. J.: Minimum-state Sequential Circuits for a Restricted Class of Incompletely Specified Flow Tables, *B.S.T.J.*, Vol. 41, pp. 1759-1768 (1962).
- 4) Biswas, N. N.: State Minimization of Incompletely Specified Sequential Machines, *IEEE Trans. Comput.*, Vol. C-23, pp. 80-84 (1974).
- 5) Rao, C. V. S. and Biswas, N. N.: Minimization of Incompletely Specified Sequential Machines, *IEEE Trans. Comput.*, Vol. C-24, pp. 1089-1100 (1975).
- 6) 後藤, 日笠山: 両立性対を用いた不完全指定順序回路の最小化手法, 第 31 回情報処理学会全国大会論文集, 3J-10 (1985).
- 7) 後藤, 飯田, 高橋: 不完全指定順序回路の最小化のための 2 つのアルゴリズムの比較, 昭和 62 年信学会総合全国大会論文集, 310 (1987).
- 8) 後藤, 行富: 不完全指定順序回路の最小化の新たな手法の LISP 言語プログラムによる実現, 昭和 62 年電気学会全国大会論文集, 1444 (1987).
- 9) 後藤: IMPC と両立性対の使用による不完全指定順序回路の最小化の一手法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 6, pp. 646-657 (1987).
- 10) 後藤, 小松: 不完全定義順序回路の分類と内部状態最小化のための基本的手法, 昭和 55 年度信学会総全大, 1217 (1980).
- 11) 後藤: 複雑な形の不完全定義順序回路の内部状態最小化の一手法, 昭和 55 年度信学会総全大, 1216 (1980).
- 12) 後藤, 堺: 不完全指定順序回路の最小化の一手法, 第 36 回情報処理学会全国大会論文集, 1134 (1988).
- 13) 後藤, 高橋: 新 GT 法による不完全指定順序回路の最小化プログラム, 昭和 63 年電気学会全国

大会講演論文集, 1420 (1988).

(昭和 63 年 1 月 25 日受付)
(昭和 63 年 7 月 15 日採録)



後藤 公雄 (正会員)

大正 15 年生. 昭和 26 年東京大学第二工学部電気工学科卒業. 同年(株)日立製作所入社. 昭和 59 年同社退社. 同年幾徳工業大学工学部電気工学科教授. 昭和 63 年神奈川工科大学工学部情報工学科教授. 工学博士. これまで TV 中継装置, ドップラレーダ, 非同期多重通信方式等の開発, および非同期式順序回路の研究に従事. 現在, 計算機支援による論理設計, 計算機アーキテクチャ等の研究に従事し, 人工知能, 数値解析にも関心を持つ. 著書「パルス回路」(産業図書), 「詳解・デジタル IC 回路, 上, 下」(ラジオ技術社). 監訳書「高品質ソフトウェア」(近代科学社), 「フレンドリ・プログラミング」(近代科学社). 電子情報通信学会, 電気学会各会員.
