

代用電荷法に基づく2重連結領域等角写像の数値計算法†

天 野 要††

等角写像は関数論の基本的な問題の1つであり、物理学・工学への応用も広い。本論文では、代用電荷法が Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数を複素対数ポテンシャルの1次結合で簡潔かつ高精度に近似できることに着目し、与えられた2つの Jordan 曲線で囲まれた有界な2重連結領域から円環領域 $\mu < |w| < 1$ ($0 < \mu < 1$) への等角写像の簡単で精度の高い数値計算法を提案する。ここに、円環の同心円の半径の比、すなわち内円の半径 μ の逆数、はモジュラスと呼ばれ、 μ は与えられた領域に対して一意的に定まる。典型的な領域に対して数値実験を行った結果、約100個の電荷を用いて、単精度計算で最大絶対誤差が $10^{-6} \sim 10^{-3}$ という高い精度を得た。同時に求められる μ の精度はさらに高い。

1. ま え が き

等角写像は関数論の基本的な問題の1つであり、物理学・工学への応用も広い。

著者は、論文^{1),2)}で、代用電荷法³⁾が Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数を複素対数ポテンシャルの1次結合で簡潔・高精度に近似できることに着目し、単連結領域等角写像、すなわち、与えられた Jordan 領域またはその外部から単位円の内部またはその外部への簡単で精度の高い数値計算法を提案した。これらをそれぞれ単連結領域の内部問題および外部問題と呼ぶ。本論文では、2重連結領域等角写像、すなわち、与えられた2つの Jordan 曲線で囲まれた有界な2重連結領域から円環領域への等角写像の新しい数値計算法を提案する。

2重連結領域等角写像の問題は単連結領域等角写像の内部問題と外部問題の複合問題と見ることもできる。しかし、本来、多重連結領域等角写像と単連結領域等角写像では、問題の数学的様相が全く異なる^{4),5)}。すなわち、多重連結領域の場合には、単連結領域の場合の単位円のような唯一の標準領域は存在しない。特に、最も簡単な多重連結領域である2重連結領域の場合には、等角写像された円環の外側と内側の2つの同心円の半径の比は与えられた領域に対して一意的に定まり、相互に等角写像できるのはこの比を同じくする領域間に限られる。等角写像に対するこの不変量をモジュラス(modulus)といい、モジュラスを同じくする領域を互いに等角同値であるという。したがって、与

えられた2重連結領域から円環領域への等角写像の数値計算法は、必然的に、計算手続きの中に与えられた領域のモジュラスの評価を含まなければならない。モジュラスは応用上も重要な量である。本論文では、外側の円の半径が1である円環領域への等角写像を扱う。しかし、上述のように、この制約によって問題の一般性が失われることはない。

数値等角写像(Numerical Conformal Mapping)の研究は、与えられた問題領域から標準領域への写像を求める問題と、逆に、標準領域から問題領域への写像を求める問題とに大別される^{5),6)}。その計算法としては、いずれの場合も、境界対応関数(境界を1対1に対応づける)を未知量とする積分方程式に基づくものが主流である。しかし、現在までのところ、両者は比較的独立した問題として研究されている。

一般に、標準領域から問題領域への等角写像の場合には、積分方程式は非線形であり、その数値解法には様々な反復法が用いられる⁷⁾。Theodorsen の積分方程式に基づく方法⁸⁾⁻¹⁰⁾が代表的である。特に、積分方程式法に基づいて、2重連結領域を対象にこの方向の数値等角写像を扱ったものに文献^{8),11),12)}等がある。

これに対して、問題領域から標準領域への等角写像では、積分方程式は線形であり、多くの場合、Dirichlet 問題から導かれる。Symm の積分方程式に基づく方法¹³⁾⁻¹⁵⁾が代表的である。これは、Dirichlet 問題の解である調和関数の1重層対数ポテンシャル表現により、等角写像の問題を境界上のソース(source)密度(境界対応関数の微分に相当する)を未知量とする第1種 Fredholm 型の線形特異積分方程式の問題に帰着させ、これを階段関数近似で離散化して解いたものである。その後、スプライン関数(区分局項式)近似¹⁶⁾⁻¹⁸⁾による精度の向上や、特異関数の導入^{17),18)}

† Numerical Conformal Mapping of Doubly-Connected Domains by the Charge Simulation Method by KANAME AMANO (Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Ehime University).

†† 愛媛大学工学部応用数学教室

による角点(境界上の特異点)処理等の改良がなされた. 特に, 積分方程式に基づいて, 2重連結領域を対象にこの方向の数値等角写像を扱ったものに文献^{15), 18)~20)}等がある.

代用電荷法に基づく数値計算法は, 2重連結領域の場合にも単連結領域の場合と同様に, 従来の積分方程式法に比べて次のような特徴を持っている.

(1) 数学的表現と計算法が簡潔で, プログラミングが容易である. 写像関数の近似公式は境界上に特異性を持たない.

(2) 数値積分が不要で, 計算量が少ない. したがって, 処理の複雑さと精度の低下をもたらす特異積分の問題も生じない.

(3) 滑らかな境界の場合には精度が非常に高い. また, 角を持つ領域に対しても, 局所的に特別な計算法^{17), 18)}を用いることなく, 比較的高い精度を得ることができる.

(4) 調和関数と正則関数の最大値の原理が適用できるので, 誤差の評価が容易である. これは, 積分方程式法の場合と同様, 外部問題への適用性とともな, 偏微分方程式の汎用的な数値解法である差分法や有限要素法にはない利点である.

論文の構成は以下のとおりである. まず, 2重連結領域等角写像の問題を, Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数および与えられた領域のモジュラスを同時に求める, という問題に帰着できることを示す. 次いで, 数値計算法と誤差評価法を説明し, 最後に, 典型的な領域に対して行った数値実験の結果を記す.

2. 2重連結領域等角写像

本論文では, 図1のように, 与えられた2つの Jordan 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた $z (=x+iy)$ 平面上の有界な2重連結領域を D として, D から $w (=u+iv)$ 平面上の円環領域 $\{w|\mu<|w|<1\}$ ($0<\mu<1$) への等角写像を考える. このとき, 外側の境界 C_1 は単位円 $|w|=1$ に, 内側の境界 C_2 はその同心円 $|w|=\mu$ に移るものとする. ここに, 等角写像された円環の外側と内側の同心円の半径の比 μ^{-1} がモジュラスであり, μ は与えられた領域に対して一意的に定

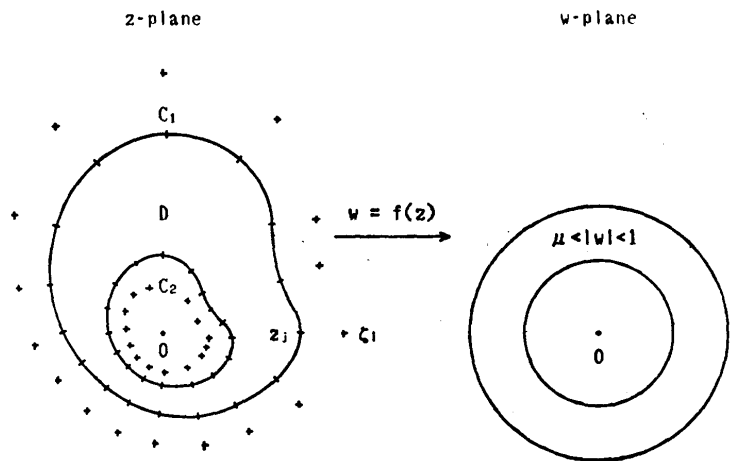


図1 2重連結領域等角写像と代用電荷法
Fig. 1 Conformal mapping of a doubly-connected domain and the charge simulation method. The μ^{-1} is a conformal invariant called modulus of the given domain, and ζ_i and z_j show the charge points and the collocation points, respectively.

まる^{4), 5)}.

我々の目標はこのような等角写像の写像関数 $w=f(z)$ を円環の内円の半径 μ の値とともに数値的に求めることである. このとき, C_1 と C_2 は Jordan 曲線であるから, Carathéodory の定理により, $f(z)$ は境界をも含む閉領域 $\bar{D}=D+C_1+C_2$ を $\mu\leq|w|\leq 1$ に1対1, 連続に写像する.

一般性を失うことなく, C_2 の内側の領域に原点をとることができる. このとき, 回転の任意性を除いて, 求める写像関数は

$$\begin{aligned} w=f(z) &= ze^{g(z)+ih(z)} \\ &= e^{\log z + g(z) + iA(z)} \\ &= e^{\log |z| + g(z) + i(\arg z + h(z))} \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられる⁵⁾. ここに, $g(z)$ と $h(z)$ は D で共役な調和関数である. C_1 が $|w|=1$ に, C_2 が $|w|=\mu$ に移るという条件から, $g(z)$ は境界上で

$$\log |z| + g(z) = 0, \quad z \in C_1, \quad (2)$$

$$\log |z| + g(z) = \log \mu, \quad z \in C_2, \quad (3)$$

でなければならない. また, $g(z)$ が D で1価な共役調和関数 $h(z)$ を持つための必要十分条件は

$$\begin{aligned} \oint_C (\partial g(z)/\partial \bar{n}) |dz| &= \oint_C (\partial h(z)/\partial s) |dz| \\ &= \oint_C dh(z) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる⁵⁾. ここに, C は D 内にあって原点を, したがって, C_1 を囲む任意の閉曲線で, $\partial/\partial s$ と $\partial/\partial n$

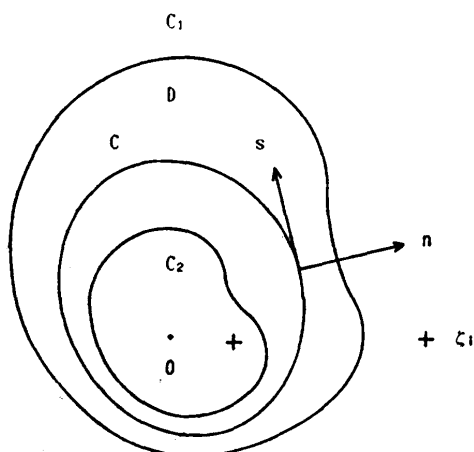


図2 積分経路

Fig. 2 Pass of integration. The n and s show the direction normal and tangential to a closed contour C lying in D and surrounding the origin of the coordinates, respectively.

はそれぞれ C 上の接線方向と法線方向の方向微分である (図2). 共役調和関数 $g(z)$ と $h(z)$ の間には Cauchy-Riemann の関係式²¹⁾

$$\partial g(z)/\partial n = \partial h(z)/\partial s$$

$$\partial h(z)/\partial n = -\partial g(z)/\partial s$$

が成立していることに注意する.

したがって, このような2重連結領域等角写像は,

1) Dirichlet 問題:

$$\nabla^2 g(z) = 0, \quad z \in D, \quad (5)$$

境界条件

$$g(z) = -\log|z|, \quad z \in C_1, \quad (6)$$

$$g(z) = \log \mu - \log|z|, \quad z \in C_2, \quad (7)$$

1価共役調和関数 $h(z)$ の存在条件

$$\oint_C (\partial g(z)/\partial n) |dz| = 0, \quad (8)$$

2) $g(z)$ の共役調和関数 $h(z)$,

$$3) f(z) = ze^{g(z) + i h(z)}, \quad z \in \bar{D}, \quad (9)$$

を順次計算することによって得られる. すなわち, 2重連結領域等角写像の問題は, Dirichlet 問題の解である調和関数 $g(z)$ とその共役調和関数 $h(z)$ および与えられた領域のモジュラスの逆数である円環の内円の半径 μ を同時に求めるという問題に帰着されたわけである.

3. 数値計算法

以下, w, u, v, g, h, μ 等の近似値を W, U, V, G, H, M 等の大文字で記す.

ここで, 単連結領域の場合と同様に, 代用電荷法に

よって, Dirichlet 問題(5)の解である調和関数 $g(z)$ とその共役調和関数 $h(z)$ を問題の2重連結領域 $\bar{D}$ の外部, すなわち, 境界曲線 C_1 の外側と C_2 の内側の領域に配置されたそれぞれ N_1, N_2 ($N_1 + N_2 = N$) 個の点 ζ_i (電荷点と呼ぶ) を極とする複素対数ポテンシャルの実部と虚部の1次結合

$$G(z) = - \sum_{i=1}^N Q_i \log|z - \zeta_i|, \quad z \in \bar{D}, \quad (10)$$

$$H(z) = - \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i), \quad z \in \bar{D}, \quad (11)$$

で簡潔に近似できることに着目する. 未定係数 Q_i (電荷と呼ぶ) は, C_1, C_2 上に選ばれた N_1, N_2 個の点 z_j (拘束点と呼ぶ) で, それぞれ境界条件 (拘束条件と呼ぶ) (6), (7) を満たすように定められる. すなわち,

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log|z_j - \zeta_i| = \log|z_j|, \quad z_j \in C_1, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log|z_j - \zeta_i| + \log M = \log|z_j|, \quad z_j \in C_2. \quad (13)$$

また, 1価共役調和関数存在の条件(8)すなわち(4)から,

$$\begin{aligned} \oint_C dH(z) &= \oint_C d \left\{ - \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i) \right\} \\ &= - \sum_{i=1}^N Q_i \oint_C d \{ \arg(z - \zeta_i) \} \\ &= - \sum_{i=1}^{N_1} Q_i \cdot 0 - \sum_{i=1}^{N_2} Q_i \cdot 2\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

でなければならない (図2). すなわち,

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0. \quad (14)$$

ここに, $\sum_{i=1}^{N_1}$ と $\sum_{i=1}^{N_2}$ はそれぞれ C_1 の外側と C_2 の内側に配置された電荷についての和であることを示す. 以上の3式(12)-(14)は Q_i ($i=1, 2, \dots, N$) と $\log M$ を未知数とする連立1次方程式

$$\begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \log|z_j - \zeta_i| & & \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i \\ \\ \log M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log|z_j| \\ \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

を構成する.

以上により, 目的とする2重連結領域等角写像の数

値解を次のような手順で得ることができる。

1) 与えられた領域に対して適当な電荷点 ζ_i と拘束点 z_j を選ぶ。

2) 拘束条件の連立1次方程式(15)を解いて電荷 Q_i と M の値を計算する。

3) 以下、 $\bar{D}$ の各点ごとに、 $G(z)$ (10) と $H(z)$ (11) を計算して、(9)または(1)式、すなわち、

$$U(z) = e^{\log|z| + G(z)} \cos \{\arg z + H(z)\}, \quad (16)$$

$$V(z) = e^{\log|z| + G(z)} \sin \{\arg z + H(z)\}, \quad (17)$$

に代入する。

このように数値積分は不要であり、したがって、計算処理の複雑さや精度の低下をもたらす特異積分の問題も生じない。未知量が $g(z), h(z)$ および μ から Q_i および M になったという意味で、問題の次元が2次元から1次元に低下していることに注意する。

なお、外部問題²⁾でも指摘したように、 $\arg$ 関数には $\pm\pi$ の不連続線が存在するので、これが $H(z)$ の計算を妨げないようにする必要がある。この場合にも、 $(14) \sum_{i=1}^{N_1} Q_i = 0$ が成立しているので、境界曲線 C_2 の内側の電荷に起因する不連続線を C_2 の内側の領域に閉じ込めてしまうことが可能である²²⁾。また、 C_1 の外側の電荷に起因する不連続線は、その方向を領域 $\bar{D}$ における $H(z)$ の計算の妨げにならないようにとすることが可能である。

しかし、 C_1 と C_2 がいずれも原点に対して星状(starlike)である、すなわち、原点から C_1 と C_2 上のすべての点を見渡すことができる場合には、言い換えれば、そのような位置に原点をとることができる場合には、以下のように、この問題をより簡単に解消することが可能である。すなわち、(1)または(9)式の写像関数 $f(z)$ は回転の任意性を含んでいるので、(11)式の $H(z)$ にはこの任意性に対応する定数を加えることができる。そこで、内部問題¹⁾の場合と同様に、この定数を

$$c = \sum_{i=1}^{N_1} Q_i \arg(-\zeta_i) \quad (18)$$

と選び、さらに、外部問題²⁾の場合と同様に、 $\sum_{i=1}^{N_2} Q_i$

$\arg(z) (=0, \because \sum_{i=1}^{N_1} Q_i = 0)$ を加えて、(11)式を

$$\begin{aligned} H(z) &= - \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i) + c \\ &= - \sum_{i=1}^{N_1} Q_i \arg(z - \zeta_i) + \sum_{i=1}^{N_1} Q_i \arg(-\zeta_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N_2} Q_i \arg(z - \zeta_i) + \sum_{i=1}^{N_2} Q_i \arg(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \sum_{i=1}^{N_1} Q_i \arg(1 - z/\zeta_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N_2} Q_i \arg(1 - \zeta_i/z) \end{aligned} \quad (19)$$

と変形する。こうすれば、 C_1, C_2 が原点に対して星状であれば不連続線の問題は生じない。後述の数値実験はこのような例である。

境界曲線 C_1, C_2 のいずれか、または、いずれもが星状ではない場合にも、外部問題で示したように、(11)式や(19)式の適当な使いわけで対処できることが少なくない。また、そのために、与えられた領域の対称性の利用、回転等是有効である。

4. 誤 差

誤差の評価には正則関数の最大値の原理を利用することができる。

問題の写像関数を $w(z)$ 、代用電荷法によるその近似関数を $W(z)$ とすれば、これらはいずれも有界領域 D で1価、正則であり、さらに、境界 $C = C_1 + C_2$ 上で連続である。したがって、正則関数の最大値の原理により、誤差の絶対値

$$E_R(z) \equiv |W(z) - w(z)|, \quad z \in \bar{D} \quad (20)$$

は境界 C 上で最大値をとる。故に、

$$\begin{aligned} E_R(z) &\leq \max_C |W(z) - w(z)| \\ &\leq \max_C \{ ||W(z)| - |w(z)|| \\ &\quad + |w(z)| |\arg W(z) - \arg w(z)| \} \\ &\leq \max_C \{ ||W(z)| - |w(z)|| \\ &\quad + \max_C \{ |w(z)| |H(z) - h(z)| \} \} \end{aligned} \quad (21)$$

が成立する(図3)。 $\max_C$ 境界 C 上での評価を示している。ここで、

$$E_R \equiv \max_C E_R(z) = \max_C |W(z) - w(z)|$$

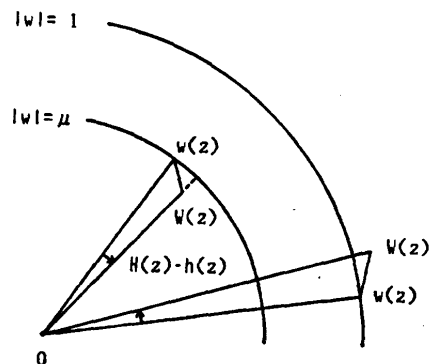


図3 境界上での誤差評価

Fig. 3 Error estimation on the boundary curves using the maximum modulus theorem for regular functions.

$$E_M \equiv \max_C E_M(z) = \max_C ||W(z)| - |w(z)||$$

$$E_A \equiv \max_C E_A(z) = \max_C ||w(z)| |H(z) - h(z)||$$

とおけば, (21)式は

$$E_R(z) \leq E_R \leq E_M + E_A \quad (22)$$

と書くことができる。\$E_M\$ は絶対値方向の, \$E_A\$ は偏角方向の最大誤差である。問題の領域に原点を通る対称軸が存在し, 回転の任意定数を(18)式のようにとって, \$H(z)\$ の計算に(19)式を用いた場合には, この軸上では \$h(z)=0\$ となる。しかし, (21)または(22)式は右辺になお未知の量を含んでいる。

次の2つの条件

$$|M - \mu| \ll E_R \equiv \max_C E_R(z) \ll 1 \quad (23)$$

$$\Delta G_k \equiv \max_C |G(z) - g(z)|$$

$$\equiv \max_C |H(z) - h(z)| \equiv \Delta H_k \quad (24)$$

\$k=1\$ for \$C_1\$, 2 for \$C_2\$

が成立する場合には, より簡潔な誤差の評価が可能である。条件(23)は, 写像関数の誤差が小さく, 円環の内円の半径, すなわち, モジュラスの逆数の誤差はさらに小さいことを意味している。実際, 多くの場合, 外部問題²⁾の容量の場合と同様に, この計算法の \$M\$ の値は非常に正確であることを解析解の知られている問題に対して数値実験的に確かめることができる。また, 条件(24)は \$G(z)\$ (10)と \$H(z)\$ (11)の誤差がいずれも電荷 \$Q_i\$ の配置とその数値計算に起因することから予測されることである。

条件(23)の \$E_R \ll 1\$ と条件(24)の下に, 次の関係式

$$E_M \equiv E_A \quad (25)$$

を導くことができる。なぜなら, このとき,

$$\max_{C_1} E_M(z) \equiv \Delta G_1 \equiv \Delta H_1 \equiv \max_{C_1} E_A(z)$$

$$\max_{C_2} E_M(z) \equiv \mu \Delta G_2 \equiv \mu \Delta H_2 \equiv \max_{C_2} E_A(z)$$

となるからである。実際, 多くの場合に, この関係の成立することも数値実験的に確かめることができる。このとき, (22)式は

$$E_R(z) \leq E_R \leq 2E_M \quad (26)$$

となる。さらに, 条件(23)の \$|M - \mu| \ll E_R\$ の下に, 次の関係式

$$E_M \equiv \max \{ \max_{C_1} ||W(z)| - 1|, \\ \max_{C_2} ||W(z)| - M| \} \quad (27)$$

を導くことができる。なぜなら, このとき,

$$\max_{C_1} E_M(z) = \max_{C_1} ||W(z)| - 1|$$

$$\max_{C_2} E_M(z) = \max_{C_2} ||W(z)| - M| \pm |M - \mu|$$

$$= \max_{C_2} ||W(z)| - M| \pm |M - \mu|$$

$$\equiv \max_{C_2} ||W(z)| - M|$$

となるからである。したがって, この計算法では, 境

界 \$C_1\$ 上の拘束点で \$|W(z_j)|=1\$, \$C_2\$ 上の拘束点で \$|W(z_j)|=M\$ となるように電荷 \$Q_i\$ と \$M\$ が定められるので,

$$E_M \equiv \max \{ \max_{C_1} ||W(z_{j+1/2}) - 1|, \\ \max_{C_2} ||W(z_{j+1/2}) - M| \} \quad (28)$$

を最も簡単な誤差の指標と考えることができる。ここに, \$z_{j+1/2}\$ は隣接する2つの拘束点 \$z_j\$ と \$z_{j+1}\$ の間の点(中間点と呼ぶ)である。

電荷配置が悪く, 拘束条件の連立1次方程式を解いて電荷 \$Q_i\$ を求める過程で大きな桁落ちを生じた場合でも, \$G(z)\$, \$H(z)\$ の共役調和性と, \$W(z)\$ の正則性は成立していることに注意する。

5. 数値実験

2つの境界曲線 \$C_1\$ と \$C_2\$ がともに楕円(凸型), Cassiniの楕形(凹型), 正方形(角の存在)という典型的な3種の2重連結領域について数値実験を行った。愛媛大学情報処理センターの FACOM M-360 AP システムを利用し, 連立1次方程式には Crout 法を用いたが, 解の反復改良は行っていない。いずれの計算も単精度である。

楕円と Cassini の楕形については, 2つの境界曲線の間に一定の関係が成立するときに限って初等的な写像関数が知られている。そのときには, これとの比較による直接的な誤差の評価が可能である。2重連結領域の初等的な写像関数が知られている事例は単連結領域の場合よりもさらに少ない。しかし, 前述のように, この計算法では写像関数が知られていない場合でも誤差の評価が可能である。

計算結果の提示に用いた記号(図1参照)は次のとおりである。

\$N\$: 電荷数=拘束点数 (\$N_1=N_2=N/2\$) (括弧内は対称性を利用した場合の拘束条件の次元数で, 例題では \$N/4+2\$)

\$r\$: 問題によって意味の異なる電荷配置のパラメータ (\$r>0\$)

なお, \$E_M, E_A\$, および \$E_R\$ の評価には拘束点と中間点における計算値を用いた。

5.1 楕 円

境 界 \$C_1: x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1\$

\$C_2: x^2/a_2^2 + y^2/b_2^2 = 1\$

(a) \$a_1=7, b_1=5, a_2=5, b_2=1\$

(b) 8, 4, 4, 2

(c) 9, 3, 2, 2

拘束点 $x_j = a_1 \cos(j-1)\Delta\theta$ $y_j = b_1 \sin(j-1)\Delta\theta$ $\Delta\theta = 2\pi/(N/2)$ $k=1, 2$ $j=1, 2, \dots, N/2$ 電荷点 $\zeta_i = z_i$ $+r|z_i - z_{i-1}|e^{i(\arg(z_i - z_{i-1}) + \pi/2)}$ $\mp: - \text{ for } C_1, + \text{ for } C_2$ $r > 0$ $i=1, 2, \dots, N/2$ $z_0 = z_{N/2}$

写像関数と内円の半径は、 C_1 と C_2 が共焦，すなわち，

$$a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 - b_2^2$$

のとき，

$$f(z) = [z + \{z^2 - (a_1^2 - b_1^2)\}^{1/2}]/(a_1 + b_1),$$

$$\mu = (a_2 + b_2)/(a_1 + b_1)$$

である。

電荷点の配置には外部問題²⁾で提案した方法を用いている。すなわち，各拘束点に対応する電荷点は，近似的に，境界曲線のその拘束点を通る法線上に存在し，かつ，両者の間の距離はその拘束点と隣接する拘束点との間の距離の r 倍で，この比 r の値はすべての拘束点と電荷点の組に対して一定である。この電荷配置法は，配置のパラメータが r 唯一つであり，計算法は簡単で，滑らか（1回連続微分可能）な境界を持つ任意の領域に適用可能であり，しかも，計算精度は r に対して簡単かつ規則的に変化し，広い範囲にわたって比較的良好な結果を与えることができる。

図4と表1に数値実験の結果を示す。(a)は2つの

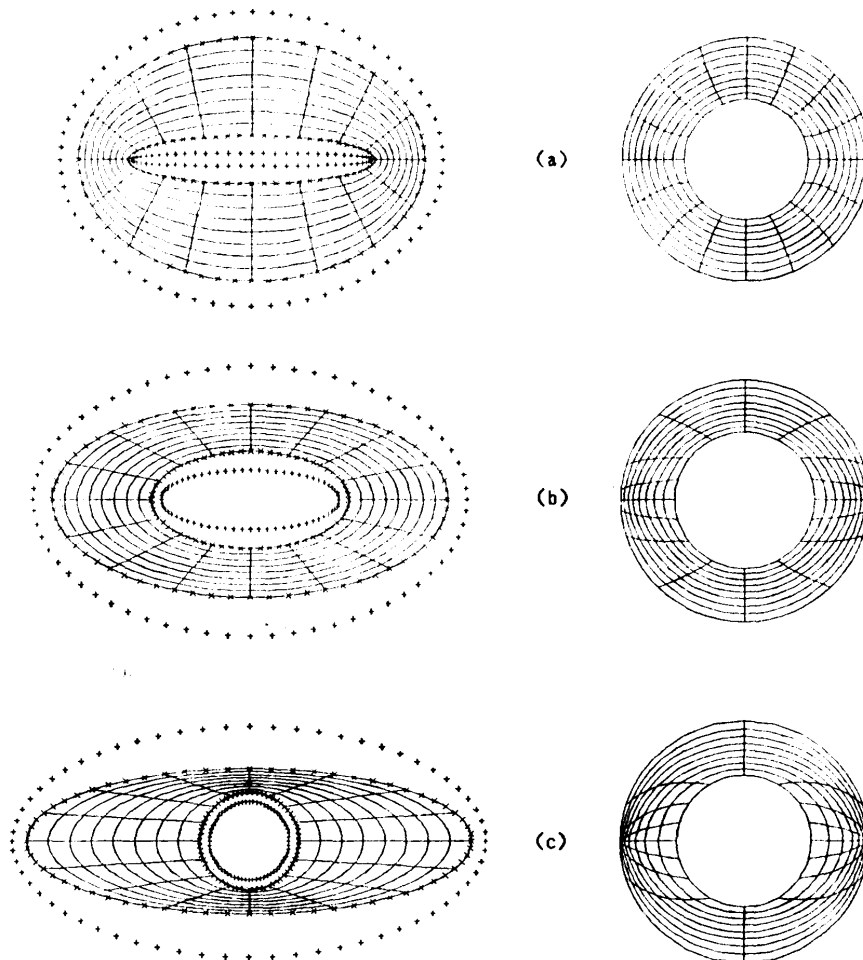


図4 数値等角写像 (楕円)

Fig. 4 Numerical conformal mapping of elliptic doubly-connected domains by the charge simulation method. Same symbols are used as in Fig. 1.

表 1 誤差評価 (楕円)

Table 1 Error estimation in the cases of two ellipses, $C_1: x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ and $C_2: x^2/a_2^2 + y^2/b_2^2 = 1$. N and r are the total number of charge points (the number of independent equations using symmetry) and a parameter of charge distribution, respectively. E_M , E_A and E_R are the estimation of $\max_c ||W(z)| - |w(z)||$, $\max_c \{|w(z)| |\arg W(z) - \arg w(z)|\}$ and $\max_c |W(z) - w(z)|$, respectively. M^{-1} is the modulus of the given domain.

a_1	b_1	a_2	b_2	r	N	32(10)	64(18)	128(34)
						8.4E-3	1.1E-2	6.4E-3
					0.5	7.0E-3	9.0E-3	3.3E-3
						8.6E-3	1.1E-2	6.4E-3
						0.4967915	0.4991144	0.4996100
(a)	7						4.3E-3	5.3E-4
	5			1.0			4.2E-3	5.0E-4
	5						4.3E-3	5.3E-4
	1						0.4998567	0.4999830
	$\mu=0.5$							
				2.0				3.2E-3
								3.2E-3
								3.2E-3
								0.4999986
				0.5	2.0E-2	7.5E-3	3.2E-3	
						0.5613312	0.5632631	0.5639827
(b)	8							
	4			1.0	2.8E-3	5.6E-4	1.5E-4	
	4				0.5642502	0.5644912	0.5645394	
	2							
				2.0		3.6E-4	4.4E-5	
						0.5645684	0.5645689	
				0.5	2.2E-2	2.0E-2	8.9E-3	
						0.5377217	0.5393843	0.5414063
(c)	9							
	3			1.0	1.2E-2	2.1E-3	6.8E-4	
	2				0.5454589	0.5425659	0.5427355	
	2							
				2.0		8.5E-4	5.6E-5	
						0.5428680	0.5428132	

楕円が共焦で写像関数が知られている場合、(b)は2つの楕円が相似の場合、(c)は、(a)と逆に、外側の楕円が内側の楕円 (実際は円) よりも扁平な場合である。

図の左側が z 平面、右側が w 平面である。これから、与えられた2重連結領域が円環領域に等角写像される様子を読み取ることができる。対応する1対の直

線と曲線は両平面上で等しい角度で交わっていることに注意する。

表は、(a)、(b)、(c)それぞれの場合について、代表的な N と r の値に対する計算精度を示したものである。 E_A と E_R は写像関数が知られている場合にのみ記されている。計算精度は、(a) $E_R=5.3 \times 10^{-4}$ ($N=128$, $r=1.0$), (b) $E_M=4.4 \times 10^{-5}$ ($N=128$, $r=2.0$), (c) $E_M=5.6 \times 10^{-5}$ ($N=128$, $r=2.0$) と、いずれの場合も非常に高い。さらに、(a)の場合には、誤差評価の条件(23)および(25) $E_M \approx E_A$ の関係の成立を確認することができる。したがって、(b)と(c)の場合にも M の精度は丸め誤差に近いと考えることができる。

計算精度とパラメータの間には以下のような関係が存在する。

1) 電荷数 N の増加に従って精度は向上する。このとき、対応する電荷点と拘束点との間の距離を一定に保つという意味では、例えば $N=32$, $r=0.5$ と $N=64$, $r=1.0$ および $N=128$, $r=2.0$ の間で比較すべきであることに注意する。さらに N を増した場合の計算結果の1例を示せば、(a)の $N=256$, $r=2.0$ で $E_M=8.9 \times 10^{-5}$, $E_A=3.7 \times 10^{-6}$, $E_R=8.9 \times 10^{-5}$, $M=0.5000000$ である。

2) r が増大し、電荷が境界から離れるに従って、精度はまず向上し、次いで低下する。表の(b)と(c)に精度の低下が現れていないのは、 r の値を 0.5, 1.0, 2.0 の3点に限ったためである。この精度の低下は拘束条件の連立1次方程式の計算の過程で生じる桁落ちのためであり、最終的には係数行列が特異になって数値解を求めることができなくなる。(a)の場合に $N=128$, $r=1.5$ の計算結果を補えば、 $E_M=3.4 \times 10^{-4}$, $E_A=3.3 \times 10^{-4}$, $E_R=3.4 \times 10^{-4}$, $M=0.4999993$ である。なお、表の空白部分は、係数行列の特異性ではなく、電荷点が与えられた領域の対称軸である x 軸または y 軸を越えてしまったために計算を中止したものである。

3) 最適な電荷点は、 N が増すほど境界に近づく。この場合も、対応する電荷点と拘束点の間の距離が r/N に比例していることに注意する。

なお、最大誤差は、(a)では C_2 上、(c)では C_1 上と、いずれもより扁平な境界上で生じている。

5.2 Cassini の楕形

境界 $C_1: \{(x+b_1)^2+y^2\} \{(x-b_1)^2+y^2\}=a_1^4$

$C_2: \{(x+b_2)^2+y^2\} \{(x-b_2)^2+y^2\}=a_2^4$

- (a) $a_1=2^{1/2}$, $b_1=1$, $a_2=2^{1/32}$, $b_2=1$
 (b) $2^{1/8}$, 1 , $2^{1/8}/2$, $1/2$
 (c) $2(2/7)^{1/2}$, 1 , $2/7$, $1/7$

拘束点 $x_j = r_k \cos \theta$

$$y_j = r_k \sin \theta$$

$$r_k = \{b_k^2 \cos 2\theta + a_k^4 - b_k^4\}^{1/2}$$

$$+ \{b_k^4 \cos^2 2\theta + a_k^4 - b_k^4\}^{1/2}$$

$$\theta = 2\pi(j-1)/(N/2)$$

$$k=1, 2$$

$$j=1, 2, \dots, N/2$$

電荷点の配置は楕円の場合と同じである。

写像関数と内円の半径は, C_1 と C_2 の間に

$$(a_1^4 - b_1^4)/b_1^2 = (a_2^4 - b_2^4)/b_2^2$$

なる関係が存在するとき,

$$f(z) = a_1 z / (b_1^2 z^2 + a_1^4 - b_1^4)^{1/2},$$

$$\mu = a_1 b_2 / a_2 b_1$$

である。

図5と表2に数値実験の結果を示す。(a)は凸形と凹形の組合せ, (b)は相似形, (c)は, (a)と逆に, 凹形と凸形の組合せで, 写像関数が知られている場合である。

計算精度は, (a) $E_M = 2.4 \times 10^{-5}$ ($N=128$, $r=2.0$), (b) $E_M = 1.0 \times 10^{-5}$ ($N=128$, $r=2.0$), (c) $E_R = 5.3 \times 10^{-6}$ ($N=128$, $r=2.0$) と, この場合も非常に高い。さらに, (c)の場合には, 誤差評価の条件(23)および(25)の関係の成立を確認することができる。したがって, (a), (b)の場合にも, M の精度は丸め誤差に近いと考えられる。なお, (c)の $N=128$,

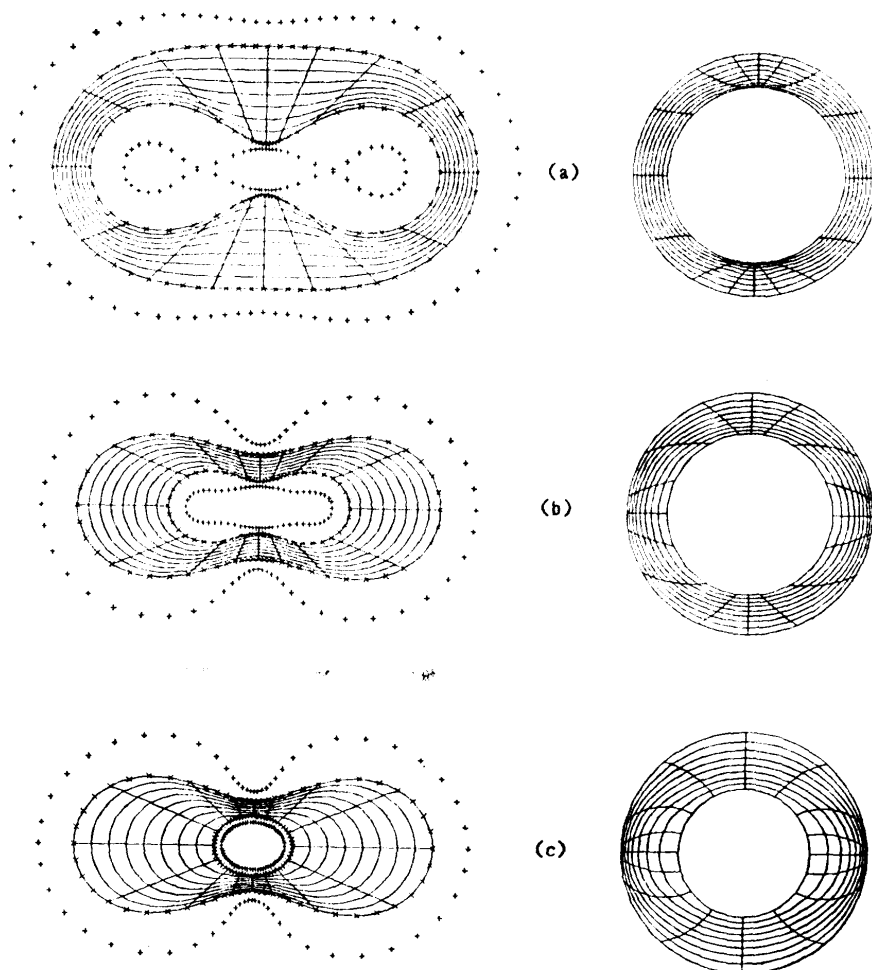


図5 数値等角写像 (Cassini の楕形)

Fig. 5 Numerical conformal mapping of doubly-connected domains bounded by two ovals of Cassini. Same symbols are used as in Fig. 1.

表 2 誤差評価 (Cassini の楕形)
Table 2 Error estimation in the cases of two ovals of Cassini, $C_1: \{(x+b_1)^2+y^2\} \{(x-b_1)^2+y^2\} = a_1^4$ and $C_2: \{(x+b_2)^2+y^2\} \{(x-b_2)^2+y^2\} = a_2^4$. Same symbols are used as in Table 1.

	a_1 b_1 a_2 b_2	r	E_M (E_A) (E_R) M			
			N	32(10)	64(18)	128(34)
			0.5	2.0E-2 0.7227299	4.9E-3 0.7206858	2.1E-3 0.7214195
(a)	$2^{1/2}$					
	1	1.0			1.8E-3 0.7226290	1.6E-4 0.7225587
	$2^{1/3}$					
	1		2.0			2.4E-5 0.7225904
			0.5	1.6E-2 0.6734555	4.1E-3 0.6724819	1.9E-3 0.6727499
(b)	$2^{1/4}$					
	1	1.0			3.9E-4 0.6733694	1.2E-4 0.6733276
	$2^{1/2}/2$					
	$1/2$		2.0			1.0E-5 0.6733408
				1.3E-2 0.5	3.4E-3 1.5E-2 3.4E-3 0.5347280	2.1E-3 9.2E-4 2.1E-3 0.5341283
(c)	$2(2/7)^{1/2}$				1.4E-2 2.2E-4	9.2E-5
	1	1.0			1.3E-2 3.2E-4	5.5E-5
	$2/7$				1.4E-2 3.2E-4	9.3E-5
	$1/7$				0.5348859 0.5345328	0.5345175
	$\mu=0.5345224$					
					5.6E-4 5.4E-4 5.6E-4 0.5345277	3.9E-6 4.4E-6 5.3E-6 0.5345274
		2.0				

$r=2.0$ で $|M-\mu| \doteq E_R$ であるのは、写像関数と M の精度がともにほとんど丸め誤差の範囲に達していることによる。

計算精度とパラメータの間には楕円の場合と同様な関係が存在する。また、最大誤差は、(a)では C_2 上、(c)では C_1 上と、いずれの場合も凹形の境界上で生じている。

5.3 正 方 形

境 界 $C_1: |x|=2, |y|=2$

$C_2: |x-x_c|=1, |y-y_c|=1$

(a) $x_c=0, y_c=0$

(b) $-0.25, -0.5$

拘束点 $C_1: x_j=2$

$$y_j=2(1-r^{j-1})/(1-r^{(N/2)/8})$$

$C_2: x_j=1+x_c$

$$y_j=(1-r^{j-1})/(1-r^{(N/2)/8})+y_c$$

$$0 < r < 1$$

$$j=1, 2, \dots, (N/2)/8+1$$

電荷点 $C_1: \xi_i=(1-p_1/q_1)\eta_i+p_1$

$$\eta_i=q_1(1-r^{i-1})/(1-r^{(N/2)/8})$$

$C_2: \xi_i=(1-p_2/q_2)\eta_i+p_2+x_c$

$$\eta_i=q_2(1-r^{i-1})/(1-r^{(N/2)/8})+y_c$$

$$i=1, 2, \dots, (N/2)/8+1$$

(他は対称配置)

電荷は、境界の角付近で密かつ境界近くになるよう、図 6 のように配置する。配置のパラメータの意味は次のとおりである。すなわち、内側の正方形の平行移動 (x_c, y_c) を除いて、 $(p_1, 0)$ と (q_1, q_1) はそれぞれ x 軸上と偏角 $\pi/4$ 方向の電荷の座標であり、 r は x 軸からの距離を与える等比級数の公比である。

計算例の (a) は 2 つの正方形の中心が一致する場合、(b) は、中心が一致せず、対称軸も存在しない場合である。

図は、計算例 (b) のもので、左側が z 平面、右側が

表 3 誤差評価 (正方形)

Table 3 Error estimation in the cases of two squares, $C_1: |x|=2, |y|=2$ and $C_2: |x-x_c|=1, |y-y_c|=1$. Same symbols are used as in Table 1.

$q_1=0.99$			$q_1=2.10$		
q_1	E_M	M	q_2	E_M	M
(a) $(x_c, y_c)=(0, 0)$					
2.02	3.8E-3	0.5417237	0.998	7.8E-3	0.5404148
2.04	1.4E-3	0.5417176	0.996	5.7E-3	0.5408849
2.06	4.5E-4	0.5417145	0.994	3.8E-3	0.5412214
2.08	1.5E-4	0.5417132	0.992	1.9E-3	0.5414893
2.10	1.5E-4	0.5417128	0.990	1.5E-4	0.5417126
2.12	1.5E-4	0.5417123	0.988	1.9E-3	0.5419030
2.14	1.5E-4	0.5417125	0.986	3.9E-3	0.5420671
2.16	1.5E-4	0.5417125	0.984	5.9E-3	0.5422093
(b) $(x_c, y_c)=(-0.25, -0.5)$					
2.02	5.6E-3	0.5954187	0.998	1.0E-2	0.5939915
2.04	2.1E-3	0.5954108	0.996	8.0E-3	0.5945030
2.06	7.6E-4	0.5954073	0.994	5.5E-3	0.5948693
2.08	7.6E-4	0.5954056	0.992	3.1E-3	0.5951614
2.10	7.6E-4	0.5954049	0.990	7.6E-4	0.5954049
2.12	7.6E-4	0.5954046	0.988	3.0E-3	0.5956126
2.14	7.6E-4	0.5954046	0.986	5.6E-3	0.5957917
2.16	7.6E-4	0.5954046	0.984	8.2E-3	0.5959467
$N=128$					
$r^{(N/2)/8-1}=1/2$					
$p_1=2.8 \quad p_2=0.6$					

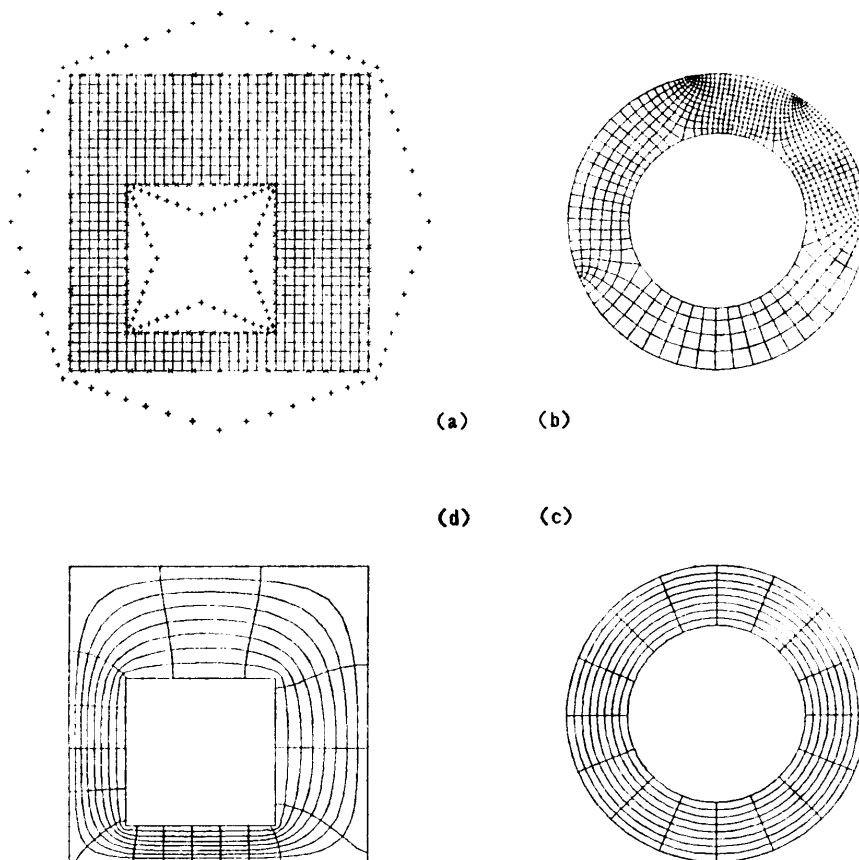


図 6 数値等角写像 (正方形)

Fig. 6 Numerical conformal mapping of doubly-connected domains bounded by two squares, where (a) is mapped onto (b), and (d) is obtained by inverse interpolation from (c). Same symbols are used as in Fig. 1.

w 平面である。図の(a)を等角写像した結果が(b)であり、(c)に逆補間を適用した結果が(d)である。電磁気学的には、(d)は矩形の導体管とその内部の導体管(または棒)との間の断面における等電位面と電気力線を表している。

表3は、電荷配置のパラメータ q_2 を固定して q_1 を変えた場合と、 q_1 を固定して q_2 を変えた場合の計算精度を示したものである。このように、精度は境界特に C_2 の角付近の局所的な電荷配置に強く依存する。ここでは、写像関数との比較による直接的な誤差の評価は行わない。しかし、(a) $E_M = 1.5 \times 10^{-4}$ 、(b) $E_M = 7.6 \times 10^{-4}$ (いずれも $N=128$, $q_1=2.10$, $q_2=0.99$) という結果から、この場合の計算精度もそれぞれ (a) $E_R \approx 3 \times 10^{-4}$ 、(b) $E_R \approx 1.5 \times 10^{-3}$ 程度であると考えることができる。

6. む す び

2つの Jordan 曲線で囲まれた有界な与えられた2重連結領域から円環領域への等角写像の数値計算法を提案し、典型的な領域を対象に数値実験を行った。その結果、約100個の電荷を用いて、単精度計算で最大絶対誤差が $10^{-6} \sim 10^{-3}$ という高い精度が得られた。同時に求められる領域のモジュラスの精度はさらに高い。

代用電荷法は、従来、Laplace 方程式の簡単で精度の高い数値解法として研究され、使用されてきた。著者は、これを等角写像の問題に適用し、与えられた Jordan 領域、その外部または2重連結領域からそれぞれ単位円の内部、その外部または円環領域への簡単で精度の高い数値計算法を与えることができた^{1),2)}。多重連結領域への適用性が次の課題であるが、代用電荷法と数値等角写像の問題には、電荷数を増した場合

の真の解への収束の証明をはじめ、最適電荷配置の問題等、残されている数学的課題が少なくない。

謝辞 著者が数値等角写像の研究を始める契機を与えて下さり、日頃この問題に関する討論と助言をいただく愛媛大学工学部応用数学教室 安倍 齊 教授に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 天野 要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).
- 2) 天野 要: 代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 1, pp. 62-72 (1988).
- 3) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 194 pp., 森北出版, 東京 (1983).
- 4) Nehari, Z.: *Conformal Mapping*, pp. 148-392, Dover, New York (1975); General Pub., Toronto (1952).
- 5) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 3, pp. 323-506, John Wiley and Sons, New York (1986).
- 6) Trefethen, L. N. (ed.): *Numerical Conformal Mapping*, 269 pp., North-Holland, Amsterdam (1986); reprinted from *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2 (1986).
- 7) Gutknecht, M. H.: Numerical Conformal Mapping Methods Based on Function Conjugation, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 31-77 (1986).
- 8) Henrici, P.: Fast Fourier Methods in Computational Complex Analysis, *SIAM Rev.*, Vol. 21, No. 4, pp. 481-527 (1979).
- 9) Gutknecht, M. H.: Solving Theodorsen's Integral Equation for Conformal Maps with the Fast Fourier Transform and Various Nonlinear Iterative Methods, *Numer. Math.*, Vol. 36, pp. 405-429 (1981).
- 10) Gutknecht, M. H.: Numerical Experiments on Solving Theodorsen's Integral Equation for Conformal Maps with the Fast Fourier Transform and Various Nonlinear Iterative Methods, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 4, No. 1, pp. 1-30 (1983).
- 11) Fornberg, B.: A Numerical Method for Conformal Mapping of Doubly Connected Regions, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 5, No. 4, pp. 771-783 (1984).
- 12) Wegmann, R.: An Iterative Method for the Conformal Mapping of Doubly Connected Regions, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 79-98 (1986).
- 13) Symm, G. T.: An Integral Equation Method in Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 250-258 (1966).
- 14) Symm, G. T.: Numerical Mapping of Exterior Domains, *Numer. Math.*, Vol. 10, pp. 437-445 (1967).
- 15) Symm, G. T.: Conformal Mapping of Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 13, pp. 448-457 (1969).
- 16) Hayes, J. K., Kahaner, D. K. and Kellner, R. G.: An Improved Method for Numerical Conformal Mapping, *Math. Comput.*, Vol. 26, No. 118, pp. 327-334 (1972).
- 17) Hough, D. M. and Papamichael, N.: The Use of Splines and Singular Functions in an Integral Equation Method for Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 37, pp. 133-147 (1981).
- 18) Hough, D. M. and Papamichael, N.: An Integral Equation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 41, pp. 287-307 (1983).
- 19) Reichel, L.: A Fast Method for Solving Certain Integral Equations of the First Kind with Application to Conformal Mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 125-142 (1986).
- 20) Mayo, A.: Rapid Methods for the Conformal Mapping of Multiply Connected Regions, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 143-153 (1986).
- 21) 安倍 齊: 応用関数論, p. 24, 森北出版, 東京 (1981).
- 22) 村島定行, 小野記久雄, 賛田 寛: 代用うず法の検討, 電気学会論文誌A, Vol. 103, No. 2, pp. 65-72 (1983).

(昭和 63 年 2 月 29 日受付)

(昭和 63 年 9 月 5 日採録)



天野 要 (正会員)

昭和 23 年生。昭和 46 年京都大学工学部電子工学科卒業。昭和 49 年同大学院工学研究科修士課程修了。昭和 53 年北海道大学大学院工学研究科博士課程修了。工学博士。同年北海道大学大型計算機センター助手。現在、愛媛大学工学部応用数学教室助教授。応用数学、数値解析、特に関数論の数値解析的研究に興味を持つ。数学会、電子情報通信学会、ACM 各会員。