

最小コストフローアルゴリズムに基づく 管路網解析問題の一解法†

阪内 秀記^{††} 吉村 猛^{††}

上水道の管路網において運用の策定を実施する際、効率的な管路網解析手法が必要である。本文では、管路網に代表される凸な非線形特性を有するネットワークの最適化手法の一つである Primal-Dual 法の計算量の効率化を提案した。Primal-Dual 法は、管路の流量-圧力特性を階段状に近似した後、最小コストフローを求めるアルゴリズムであり、ネットワークの構造（接続関係）情報を利用して計算を効率的に実行する。そのアルゴリズムでは、計算の繰り返しごとにネットワークの最短径路木を求めている。本文では、階段状に近似するとき制約を加えることで、毎回の最短径路木の変化が1回の本の初等変換である性質を示した。この性質を利用して、最短径路木を求める計算時間を削減するアルゴリズムを提案した。その結果、1回の最短径路木を求める操作は、問題の規模（節点数+枝数）に比例する手間であることを示した。計算実験結果からも、提案したアルゴリズムの効果が確かめられた。本文で提案したアルゴリズムは、管路網の例で代表されるネットワーク上で非線形凸関数の最適化を行う問題に適用できるアルゴリズムである。

1. はじめに

上水道の配水管路網は、取水点、配水池、分岐点、需要点の働きをする諸施設と、各施設を結ぶ管路と、管路の中に存在するポンプ、バルブなどの圧力制御施設から構成される。ポンプ、バルブを除く各施設を節点、各管路を枝と考えると、配水管路網はネットワークとしてモデル化できる。管路は密閉されているため、中を流れる水の流量と圧力に関して、ある非線形特性を有している。

管路網解析問題とは、圧力制御施設における圧力制御量（ポンプ、バルブの稼働量）、取水点における取水量、需要点における需要量が与えられたとき、管路網内の定常的な流量、圧力分布を求める問題である。これは、水運用を実際に行う場において、基本的な流量配分計画に用いられるため重要な問題である。この問題は、管路の流量と圧力に関する特性が非線形であるため、非線形連立方程式により記述される。したがって、基本的に Newton-Raphson 法や特性の区分線形近似を行う Katzenelson 法⁹⁾の適用により、解を得ることができる。

近年、対象とする管路網が大規模化する傾向がある。一般に Newton-Raphson 法は、初期解により収束性が異なる点や行列演算に要する記憶領域が大きい（最大で問題の規模の2乗）問題点がある。その対策

として、線形計画問題の一種であるネットワーク上の最小コストフロー問題に帰着させ、最小コストフローアルゴリズムを用いる方法がある⁷⁾。ここで、最小コストフロー問題への帰着は、問題を表す非線形連立方程式を非線形最適化問題に置き換え、管路特性関数を近似することによって行うことができる。最小コストフローアルゴリズムには、Primal 法、Dual 法、Primal-Dual 法、Out of Kilter 法がある⁶⁾。これらの解法は、メモリが問題の規模に比例する量で十分という点と、Newton-Raphson 法よりも数値的に安定である点に特徴がある。

また、水運用を実際に行う場では、特定管路の流量指定（運用上、特定の管路流量をあらかじめ政策的に決め、その条件のもとで解を得る）を行う機能のほか、状況によって取水点の優先順位（複数の取水点がある場合、優先する順番）を考慮するなどの機能が要求されている。流量を主変数とする最小コストフローアルゴリズムは、解の途中段階においても流量の連続条件が保存されている。したがって、上記の特別な要求に柔軟に 대응することが容易にできる。

本文では、前記の最小コストフローアルゴリズムのうち、運用上の特別な要求を考慮して、Primal-Dual 法^{1), 3), 8)}をベースとした管路網解析アルゴリズムを提案する。

Primal-Dual 法は、基本的にネットワーク上で最短径路木を求める計算を繰り返している。そのため、本文では、最短径路アルゴリズムの計算部分を効率化することによる Primal-Dual 法の計算量の減少法を提案する。その方法は、管路特性の近似に特定の制約を

† An Algorithm for Water Distribution Analysis Based on a Minimum-cost Flow Algorithm by HIDEKI SAKAUCHI and TAKESHI YOSHIMURA (C&C Systems Research Laboratories, NEC Corporation).

†† 日本電気(株) C&C システム研究所

加えることにより、繰り返し計算時の最短経路木の変化が1回の木の初等変換に相当することを利用して、その結果、プログラム実験により計算時間が2~3倍効率化されることが分かった。

以下、まず、問題および用語の定義を行い、次に、Primal-Dual法を管路網解析に適用する場合のアルゴリズムを説明し、さらに、Primal-Dual法の計算時間を効率化する手法を提案して、計算実験結果を示す。

2. 準備

2.1 管路網要素

配水管路網は、取水点、配水池、分岐点、需要点などの諸施設と、各施設を結ぶ密閉された管路と管路上に存在する圧力制御施設（ポンプ、バルブ）からなる（図1）。取水点は、外部から水を取り入れる点、配水池は、一定の範囲で水を貯める能力をもつ点、分岐点は、管路と管路を接続する点、需要点は、水を消費する点である。配水池は、水位が下がる場合池から水が流出し、上がる場合池に水が流入する。管路網解析は、ある時間帯における定常状態を求めるため、配水池は、その時間帯の初期状態と最終状態により、取水点、需要点または分岐点とみなして解く。

ここで、各施設を節点、管路を枝に対応させた有向ネットワーク G を定義し、さらに、ネットワーク上の最も基本的な要素であるフロー f を定義する。

[定義] ネットワーク $G=(V, E)$

$G=(V, E)$ は、管路網を示す有向ネットワークである。 V は、

$$V = S \cup D \cup X$$

なる節点集合で、その要素数（節点数）を n とする。ただし、 S, D, X は、それぞれ取水点（ソース）集合、需要点（シンク）集合、分岐点集合である。 E は、

$$E \subseteq \{(u, v) | u, v \in V\}$$

なる枝集合であり、各管路に対応する。その要素数

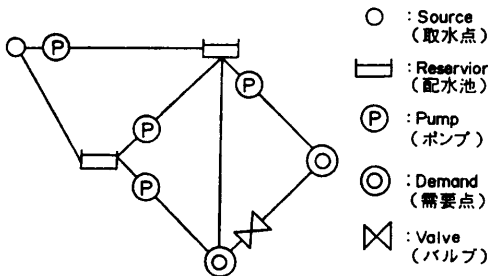


図1 管路網の例
 Fig. 1 Pipe network example.

(枝数) を m とする。なお、本来管路に向きはないが、便宜上、枝の向きを定める。 □

[定義] フロー f

フロー f は、管路(枝)に関連づけられる物理量である。フローは管路流量を示し、取水点で発生し、需要点で消滅し、分岐点では保存する。また、フローは枝の向きを基準にして考える。すなわち、枝 $j (= (u, v))$ 上のフロー f_j を

$$f_j = f(u, v) = -f(v, u)$$

とする。 □

一方、配水管路網では、管路が密閉されているため、(1)式に示すフロー f と管路両端の圧力差（テンションと呼ぶ） t の間に非線形の管路特性を有している（図2）。以後、枝のフローとテンションの関係を枝特性と呼ぶ。

$$t = r(f) = a \cdot \text{sgn}(f) \cdot |f|^{1.85} \quad (1)$$

(Hazen-Williamsの式¹⁾ただし、

a : 管路の物理的要素で定まる定数、

$\text{sgn}(f)$: f の符号)

また、特定の管路には、流量を制御するためのポンプ、バルブが設定されている。ここでは、これらを近似的に可変圧力源と考える。稼働（加圧）量 p を設定したポンプの存在する管路の管路特性関数を(2)式で定義する。バルブは、稼働することにより圧力が失われることから負のポンプとみなす。以上の考え方により、ポンプ、バルブを含むネットワークの解析が可能となることは明らかである。ポンプ、バルブを含む特性関数の例を図3に示す。

$$t(f) = r(f) - p \quad (2)$$

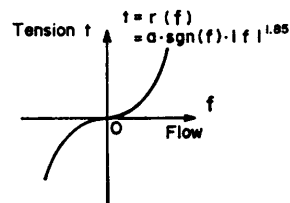


図2 管路特性
 Fig. 2 Pipe characteristics.

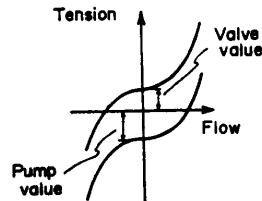


図3 ポンプ/バルブのある管路特性
 Fig. 3 Pipe characteristics with pump/valve.

2.2 問題の定式化

管路網解析問題とは、上水道網 (図1) において、ネットワーク、取水点の取水量、需要点の需要量およびポンプ、バルブの稼働量を入力し、定常的な管路網内の流量を求めることである。すなわち、(2)式の枝特性を有するネットワーク上で流量保存則と圧力平衡則を満足するフロー f を求める問題となる。さらに、この問題は、(3)式の流量保存則を満足する制約条件のもとで、各枝の特性関数 ((2)式) の積分値の和を最小 ((4)式) とする最小コストフロー問題と等価である⁷⁾。

$$\text{制約条件 } A\mathbf{f}=\mathbf{J}. \quad (3)$$

$$\text{目的関数 } \sum_{j=1}^m \int_0^{f_j} t_j(f)df \rightarrow \min. \quad (4)$$

ここで、 $A=\{a_{ij}\}$ は、ネットワークの接続行列で

$$a_{ij} = \begin{cases} 1: \text{ 節点 } i \text{ が枝 } j \text{ の始点である} \\ -1: \text{ 節点 } i \text{ が枝 } j \text{ の終点である} \\ 0: \text{ 上記以外} \end{cases}$$

を値とする $(n \times m)$ 行列である。 $\mathbf{J}=\{J_i\}$ は、

$$J_i = (\text{節点 } i \text{ の取水量}) - (\text{節点 } i \text{ の需要量})$$

を値とする n 次元の流量源ベクトルである。ただし、取水点以外の取水量、需要点以外の需要量は0とする。

ここで、最小コストフローアルゴリズムを適用するために近似特性曲線 r^* を定義する。まず、本文で提案する手法は、特性関数が原点を通ることが必須のため次の変換を行う。まず、 $t_j(f)=0$ を満足するフローを x_j とする。ここで、 $f'=f-x_j$ なる変数変換を施すと、

$$\tilde{t}_j(f')=t_j(f-x_j) \quad (5)$$

なる原点を通る関数 \tilde{t} が定義できる。

次に、原点を通る枝特性関数 \tilde{t} を階段状曲線で近似した曲線 r^* を定義する²⁾ (図4)。近似した関数を用いる最小コストフロー問題は、以下の変形によって(3)'、(4)'式で記述される問題となる。

$$\begin{aligned} \text{制約条件 } A(\mathbf{f}'+\mathbf{x}) &= \mathbf{J}, \\ A\mathbf{f}' &= \mathbf{J}-A\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3)'$$

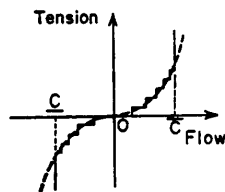


図4 近似枝特性

Fig. 4 Edge characteristic approximation.

$$\text{目的関数 } \sum_{j=1}^m \int_0^{f_j} r^*_{j}(f')df' \rightarrow \min. \quad (4)'$$

これは、領域内での単位フロー当たりのコストが一定、すなわち、目的関数が線形となるため、線形計画問題となる。

枝 j の枝特性 $\tilde{t}_j(f)$ を階段状に近似する方法としては、(a) 特性グラフ上でフロー軸方向の幅が一定となる階段を定義する、(b) テンション軸方向の幅が一定となる階段を定義する、(c) フロー、テンションの両方向とも可変にして定義する方法が考えられる。ここでは、(b) テンション軸方向の幅が一定となる階段により近似特性曲線を定義する。

[定義] 近似特性曲線 r^*_j

枝特性 $\tilde{t}_j(f)$ は、単調増加の一価関数のため、逆関数 t^{-1}_j が存在し、 t^{-1}_j も一価関数である。枝 j の階段の段差を w_j としたとき、 t^{-1}_j と任意の整数 i より $f-t$ 平面上の点列 p^i, q^i を次の方法で定める。

i) $i > 0$ のとき、

$$p^i = (t^{-1}_j, ((i-1/2) \cdot w_j)), \quad (i-1) \cdot w_j,$$

$$q^i = (t^{-1}_j, ((i-1/2) \cdot w_j), \quad i \cdot w_j),$$

ii) $i < 0$ のとき、

$$p^i = (t^{-1}_j, ((i+1/2) \cdot w_j), \quad i \cdot w_j),$$

$$q^i = (t^{-1}_j, ((i+1/2) \cdot w_j), \quad (i+1) \cdot w_j).$$

iii) $i = 0$ のとき、

$$p^i = (0, 0), \quad q^i = (0, 0).$$

これらの点列と任意の整数 ζ を用いて、

$$\begin{cases} \zeta: \text{ 奇数 } (=2 \cdot i + 1) \text{ のとき} & \text{線分 } [q^i, p^{i+1}], \\ \zeta: \text{ 偶数 } (=2 \cdot i) \text{ のとき} & \text{線分 } [p^i, q^i] \end{cases}$$

なる $f-t$ 平面上の線分を ζ に対応させる。これら線分をつないだ折れ線を近似特性曲線 r^*_j とする (図5)。この曲線は、フローとテンションの関係を示す点集合である。ある時点における枝 j のフロー、テンションを表す点の特性曲線 r^*_j 上の所属領域を示す値 ζ を ζ_j とし、これを領域番号と呼ぶ。また、 p^i, q^i を

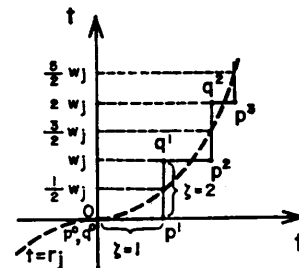


図5 近似幅 w_j による近似特性曲線 r^*

Fig. 5 Approximated characteristic curve with w_j .

屈曲点と呼ぶ。 □

2.3 用語の定義

本文中で扱う用語の定義を行う。

① 最短経路木

最短経路木は、枝の長さの定義されたネットワーク上で、ある1点から他のすべての点へ、経路の長さが最短となる木である。最短経路の始点となる点をルートと呼ぶ。

② テンション確定枝

領域番号 ζ_j が奇数である枝をテンション確定枝とする。これは、領域 ζ_j 全体にわたりテンション値が一定である。テンション確定領域 $\zeta_j (=2 \cdot i + 1)$ に対応するテンション値 $t(\zeta_j)$ を

$$t(\zeta_j) : q^i \text{ のテンション値,}$$

と定める。これを用いてテンション確定枝 $j (= (u, v))$ の長さ $l_{(u,v)}$ と逆向きの長さ $l_{(v,u)}$ をそれぞれ

$$\begin{cases} l_{(u,v)} = t(\zeta_j), \\ l_{(v,u)} = -t(\zeta_j) \end{cases}$$

と定める (図 6)。

③ フロー確定枝

領域番号 ζ_j が偶数である枝をフロー確定枝とする。これは、領域 ζ_j 全体にわたりフロー値が一定である。フロー確定領域 $\zeta_j (=2 \cdot i)$ に対応するフロー値 $f(\zeta_j)$ を

$$f(\zeta_j) : p^i \text{ のフロー値,}$$

と定める。フロー確定枝 $j (= (u, v))$ の長さ $l_{(u,v)}$ と逆向きの長さ $l_{(v,u)}$ をそれぞれ

$$\begin{cases} l_{(u,v)} = t(\zeta_j + 1) \\ l_{(v,u)} = -t(\zeta_j - 1) \end{cases}$$

と定める (図 7)。枝の向きの長さとは逆向きの長さの和は、階段の段差が w_j であるため

$$l_{(u,v)} + l_{(v,u)} = w_j \tag{6}$$

となる。

④ 節点ポテンシャル $p(v)$

節点ポテンシャル $p(v)$ は、ネットワーク上でルート付きの木が選ばれたとき、ルートから節点 v へ向かう径路上の木枝について、経路の向きに見た枝の長さを合計した値である。

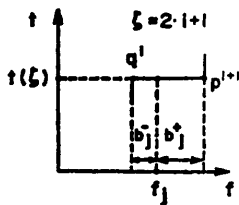


図 6 テンション確定枝
Fig. 6 Tension-determined edge.

⑤ 流量上下限 (c_j, ϵ_j)

流量上下限 $(c_j (\geq 0), \epsilon_j (\leq 0))$ は、フローに $\epsilon_j \leq f_j \leq c_j$ なる制約を設定する値である。このとき特性曲線 r^* は、

i) $f_j = c_j$ のとき

$f_j = c_j$ で r^* につながるテンション軸に平行な $+\infty$ 方向の半直線

ii) $f_j = \epsilon_j$ のとき

$f_j = \epsilon_j$ で r^* につながるテンション軸に平行な $-\infty$ 方向の半直線

iii) $\epsilon_j \leq f_j \leq c_j$

r^* と同じ

を合わせた曲線となる (図 4)。i) の領域番号は、iii) の領域番号の最大値 + 1, ii) の領域番号は、iii) の領域番号の最小値 - 1 とする。また、流量上限または下限が指定されない場合は、 $\epsilon_j = -\infty, c_j = \infty$ とみなす。

⑥ フロー変化可能量 (b^+_j, b^-_j)

枝 j のフロー変化可能量 (b^+_j, b^-_j) は、その時点のフロー f_j を②③で定義した枝の長さを変化しない範囲で、変化させることのできる正方向と負方向の最大量である。すなわち、枝 j の状態変数である領域 ζ_j により、

i) テンション確定枝 (ζ_j : 奇数) のとき (図 6),

$$\begin{cases} b^+_j : f(\zeta_j + 1) - f_j, \\ b^-_j : f_j - f(\zeta_j - 1) \end{cases}$$

ii) フロー確定枝 (ζ_j : 偶数) のとき (図 7),

$$\begin{cases} b^+_j : f(\zeta_j + 2) - f(\zeta_j), \\ b^-_j : f(\zeta_j) - f(\zeta_j - 2) \end{cases}$$

となる。

⑦ 節点 v (または枝 j) の子孫節点

ルートの定義された木において、節点 v (または木枝 j) が、節点 u とルートの間の木枝のみから成る径路上に存在するとき、節点 u は、 v (または木枝 j) の子孫節点であるという (図 8)。

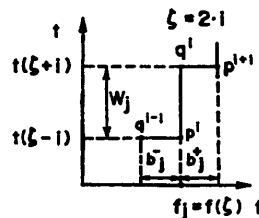


図 7 近似幅 w_j とフロー確定枝
Fig. 7 Approximation width and flow-determined edge.

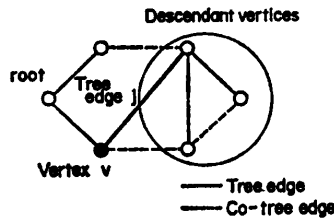


図 8 子孫節点
Fig. 8 Descendant vertices of v (or j).

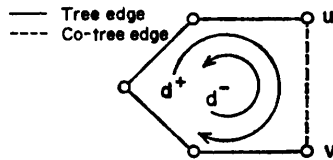


図 9 基本閉路テンション差 $d^{+(u,v)}, d^{-(u,v)}$
Fig. 9 Basic loop tension difference.

⑧ 基本閉路テンション差 ($d^{+(u,v)}, d^{-(u,v)}$)

基本閉路テンション差 ($d^{+(u,v)}, d^{-(u,v)}$) は、補木枝 (u, v) が与えられたとき、枝 (u, v) の両端節点のポテンシャルの差と枝 (u, v) の長さの差である ((7)(8) 式)。

$$\begin{cases} d^{+(u,v)} = l_{(u,v)} - (p(v) - p(u)), & (7) \\ d^{-(u,v)} = l_{(v,u)} - (p(u) - p(v)). & (8) \end{cases}$$

これらは、補木枝により定まる基本閉路について、定義した向きに枝の長さの和を求めた値が $d^{+(u,v)}$ 、逆向きの長さの和が $d^{-(u,v)}$ である (図 9)。

⑨ 基本カットセット C_j

最短経路木の木枝 j に対して、他がすべて補木枝となるように選んだカットセットを C_j とする。

3. 基本アルゴリズム

3.1 拡張ネットワーク

この節では、最小コストフローアルゴリズムの導入を容易にするため、仮想的なソースとシンクを定義する。

[定義] 拡張ネットワーク G^*

元のネットワークの節点 V (S : 取水点, D : 需要点) に仮想ソース ss , 仮想シンク sd を加え、枝 E に仮想取水枝 E_s , 仮想需要枝 E_T を加えたネットワークを拡張ネットワーク G^*

$$G^* = (V \cup \{ss, sd\}, E \cup E_s \cup E_T)$$

とする。取水枝, 需要枝は,

$$\begin{cases} E_s = \{(ss, v) | v \in S\}, \\ E_T = \{(v, sd) | v \in D\} \end{cases}$$

であり、流量上下限, 枝特性をそれぞれ

$$\begin{cases} c_j = 0, \bar{c}_j = \text{取水量} (j \in E_s), \\ c_j = 0, \bar{c}_j = \text{需要量} (j \in E_T), \\ r^*_j(f_j) = 0 (j \in E_s \cup E_T, c_j \leq f_j \leq \bar{c}_j) \end{cases}$$

とする (流量上下限以内は 0 で一定の曲線)。 □

以上の定義により、取水点, 需要点を一般の分岐点と同様に扱うことができる。以下、ネットワークと呼ぶ場合は、拡張ネットワーク G^* を指すものとする。

3.2 Primal-Dual 法

管路特性を階段近似した最小コストフローを求める問題は、線形凸関数の最適化である⁷⁾。その一算法として、ネットワーク上の Primal-Dual 法 (以後 NPD 法と呼ぶ) が知られている。これは、線形計画問題を解く Primal-Dual 法の解の動きをネットワーク上で行うアルゴリズムである。その特徴は、アルゴリズムの空間複雑度が問題の規模 (ここでは管路数) の定数倍で十分な点にある。NPD 法に基づく管路網解析のアルゴリズムを以下に示す。このアルゴリズムでは、各枝の状態を示す領域番号が 1 回の繰り返しごとに高々 1 の増減をしながら解へ近づく。

アルゴリズム NPD 法

Step 0. 各枝のフローと長さで領域番号 ζ_j を 0 とする。

Step 1. 仮想ソースをルートとして最短経路木を求め、選ばれた木枝のうち、前の段階で ζ_j が偶数の枝 (フロー確定枝) について、

$$\begin{cases} \zeta_j \leftarrow \zeta_j + 1 \text{ (ルートから仮想シンクに向かう枝)}, \\ \zeta_j \leftarrow \zeta_j - 1 \text{ (仮想シンクからルートに向かう枝)} \end{cases}$$

とする。

Step 2. 仮想ソースから仮想シンクへの最短経路 P の増加可能量 Δq をフロー変化可能量により求める。

$$\Delta q = \min \{ \min_{\substack{j \in P \text{ と同じ} \\ \text{向きの枝集合}}} (b^+_j), \min_{\substack{j \in P \text{ と逆向} \\ \text{きの枝集合}}} (b^-_j) \}.$$

Step 3. 最短経路 P 上の枝 j のフローを

$$\begin{cases} f_j \leftarrow f_j + \Delta q \text{ (枝 } j \text{ が } P \text{ と同じ向きするとき)}, \\ f_j \leftarrow f_j - \Delta q \text{ (枝 } j \text{ が } P \text{ と逆向きするとき)} \end{cases}$$

により更新する。

もし、あるカットセットのすべての枝について、ルートから仮想シンクに向かう枝が流量上限、仮想シンクからルートに向かう枝が流量下限に達したならば終了。

Step 4. フローが枝特性の屈曲点に達した木枝のうちある 1 本の枝 j について、

$$\begin{cases} \zeta_j \leftarrow \zeta_j + 1 \text{ (} j \text{ のフローが増加した場合)}, \\ \zeta_j \leftarrow \zeta_j - 1 \text{ (} j \text{ のフローが減少した場合)} \end{cases}$$

とする。Step 1. へ。 □

4. 効率化の検討

NPD 法では, Step 1. の反復回数 I は, 関数を近似する段差 w_j に依存する ((9)式).

$$I \doteq \sum_{j=1}^m t_j/w_j. \tag{9}$$

(ただし, t_j : 解における枝 j のテンション値)
 これは, NPD 法がフロー 0 を初期解とし, テンション t_j になるまで, フローを増加させるアルゴリズムであり, それまでに t_j/w_j 回フロー確定状態を通り, そのたびに Step 1. の最短径路木を求め直さなければならないからである. また, Step 2. ~ Step 4. は, 単に径路上にフローを加えるだけのため, 効率化の余地はほとんどない. したがって, 与えられた w_j のもとで, 計算量を減少させるには, 最短径路木を繰り返し求める操作を効率化しなければならない.

それには, 任意の段階の最短径路木を求めるとき, 前段階の最短径路木の情報を利用することが考えられる. 以下, NPD 法の i 回目の Step 1. 終了時における最短径路木を $T^{(i)}$ とするとき, Step 4. の操作後, $T^{(i+1)}$ を求める計算を高速化する手法について述べる.

4.1 最短径路木の意味

ここでは, NPD 法の i 回目の Step 1. の終了後の最短径路木を $T^{(i)}$ とするとき, その最短径路木のもつ性質を定理 1 に示す.

[定理 1] NPD 法計算途中の最短径路木 $T^{(i)}$ は, 木枝がテンション確定枝, 補木枝がフロー確定枝によって構成され, かつ, $T^{(i)}$ の任意の補木枝 $j (= (u, v))$ について

$$c_{(u,v)} = p(v) - p(u)$$

とおいて,

$$t(\zeta_j - 1) \leq c_{(u,v)} \leq t(\zeta_j + 1) \tag{10}$$

が成立する. □

(証明) 帰納法により証明する. $T^{(1)}$ が定理を満足することは明らかである. なぜならば, Step 1. によりすべての木枝は, 定義された枝の向きがルートからの向きと一致するとき $\zeta_j = 1$, そうでないとき $\zeta_j = -1$ となる. また, すべての枝の長さは 0 のため, (10)式も明らかに成り立つ.

次に, $T^{(k)}$ が定理を満足すると仮定する. NPD 法では, $T^{(k)}$ のもとで, フローを最短径路上に加える. このとき径路上の 1 本以上の枝が枝特性の屈曲点をなすフロー値に達し, そのうち 1 本の枝 $j (= (u, v), u$

がソース側, v がシンク側の節点とする) の ζ_j が奇数 (テンション確定枝) から偶数 (フロー確定枝) へ変化する. $T^{(k)}$ が定理を満足しているとすれば, ここで基本カットセット C_j の枝はすべて ζ_j が偶数の枝となる. そしてアルゴリズムは, 次の段階の最短径路木 $T^{(k+1)}$ として, C_j 中の 1 本の枝 j' を木枝として選ぶ (図 10). もし, j' が選ばれない場合は, アルゴリズムが終了する. Step 1. により木枝 j' の $\zeta_{j'}$ は, フローが変化する向きに隣接する領域番号 ($\zeta_{j'}$ が奇数) に変化する. すなわち, 木枝がテンション確定枝, 補木枝がフロー確定枝の状態は保存される.

一方, 枝 $j' (= (u', v') \neq j)$ は, $T^{(k)}$ における補木枝であり, u' がソース側, v' がシンク側の節点として,

$$c_{(u',v')} = p(v') - p(u')$$

とおくと, (10)式を満足するため,

$$t(\zeta_{j'} - 1) \leq c_{(u',v')} \leq t(\zeta_{j'} + 1)$$

が成り立つ. 元の木枝 j がフロー確定枝になり元の長さ $l^{(k)}_{(u,v)}$ が w_j 長くなった結果, 枝 j' が $T^{(k+1)}$ において最短径路木の木枝になったことより,

$$p^{(k+1)}(v) \leq p^{(k)}(u) + l^{(k+1)}_{(u,v)}$$

である ($p^{(k)}, l^{(k)}$ は $T^{(k)}$ における値を示す). u がソース側で $p(u)$ は変化しないため,

$$p^{(k+1)}(v) \leq p^{(k+1)}(u) + l^{(k+1)}_{(u,v)}$$

である. また, $p(v)$ が 0 以上増加するため,

$$\begin{aligned} p^{(k+1)}(v) &\geq p^{(k)}(v) = p^{(k)}(u) + l^{(k)}_{(u,v)} \\ &= p^{(k+1)}(u) + l^{(k)}_{(u,v)} \end{aligned}$$

となる. ここで, 枝 j が新たにフロー確定枝 (ζ_j が偶数) となったため,

$$\begin{cases} l^{(k)}_{(u,v)} = t(\zeta_j - 1), \\ l^{(k+1)}_{(u,v)} = t(\zeta_j + 1) \end{cases}$$

である. したがって,

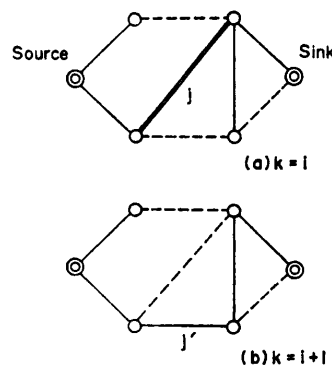


図 10 最短径路木の変化
 Fig. 10 Shortest path tree transition.

$$t(\zeta_j - 1) \leq p^{(k+1)}(v) - p^{(k+1)}(u) \leq t(\zeta_j + 1)$$

が成り立つ。また、次の段階で選ばれた j' が j と同じときは、すべての補木枝について(10)式は、明らかに成り立つ。

もし、 (u, v) が逆向きに定義されているならば、フローが減少することで屈曲点に至る。このとき、長さは w_j 減少するが、逆向きに見て符号が反転するため、ルートから見た長さは w_j 増加する。したがって、同じ議論となる。すなわち、(10)式が成立する。

以上により、 $T^{(k+1)}$ も定理を満足する。□

定理 1 は、NPD 法の Step 1. の終了後、すべての基本閉路が 1 本のフロー確定枝と、1 本以上のテンション確定枝からなることを示している。このとき、フロー確定枝 j の基本閉路テンション差 (d^+, d^-) は、枝 j の近似幅 w_j 以内である。これより、NPD 法の任意の段階の解は、それまで割り当てられたフローに関するコストの最小性を保存していることが分かる⁶⁾。

4.2 木の初等変換法

以下では、すべての枝を一定値のテンション段差 w によって階段近似を行う場合の性質を述べる。

すべての枝で一定の幅を用いて定義した近似特性曲線による NPD 法における最短径路木 $T^{(k)}$ と $T^{(k+1)}$ の相違について、次の補題、定理が成り立つ。

【補題 1】 任意の補木枝 (u, v) の長さとその両端節点のポテンシャル差との相違、すなわち基本閉路テンション差 $d^+(u, v)$, $d^-(u, v)$ は、それぞれ 0 または w である。□

(証明) 各枝の長さ、および各節点のポテンシャルは、 w の整数倍となる。そこで、 $d^+(u, v)$, $d^-(u, v)$ 各々が、0 以上 $2w$ 未満となることを示せば良い。

i) $d^+(u, v)$ が負の場合

$$l_{(u,v)} - (p(v) - p(u)) < 0. \tag{11}$$

移項すると、

$$p(v) > p(u) + l_{(u,v)}. \tag{12}$$

v へ到達するには、補木枝 (u, v) を通るほうが近い。よって、仮定が矛盾する。

$d^-(u, v)$ についても、同様に証明できる。

ii) $d^+(u, v)$ が $2w$ 以上の場合

$$l_{(u,v)} - (p(v) - p(u)) \geq 2w. \tag{13}$$

また、i) より

$$l_{(v,u)} - (p(u) - p(v)) \geq 0. \tag{14}$$

(13) (14) 式の両辺を加えると、

$$l_{(u,v)} + l_{(v,u)} \geq 2w. \tag{15}$$

ところが、定義③フロー確定枝の長さより

$$l_{(u,v)} + l_{(v,u)} = w. \tag{6)'}$$

よって、仮定が矛盾する。

$d^-(u, v)$ についても、同様に証明できる。□

【補題 2】 補木枝 $j (= (u, v))$ の $d^+(u, v)$ (または $d^-(u, v)$) が 0 のとき、ルートと v の間 (またはルートと u の間) の木枝 j' と枝 j を木の初等変換をしても各節点のポテンシャルは変化しない。□

(証明) いま、木枝 (x, y) がルートと v の間の最短径路上にあり (x がルート側), $d^+(u, v)$ が 0 とする。定義より

$$p(u) + l_{(u,v)} = p(v). \tag{16}$$

したがって、枝 (u, v) を木枝としても、 $p(v)$ は変化しない。このとき y, v 間の径路上の木構造が変化する。しかし、木枝はテンション確定枝であり、逆向きの長さは、定義②より絶対値の等しい異符号値である。したがって、 y を起点とし、 $p(y)$ をもとに計算した y, v の間のポテンシャル値と v を起点とし、 $p(v)$ をもとに計算したポテンシャル値は等しい。 y, v 間が変化しなければ、他の節点のポテンシャル値には影響がない (図 11(a)→(b))。□

$d^-(u, v)$ が 0 のときも同様である。□

補題 2 は、木枝 (x, y) と補木枝 (u, v) を変換した木も i 段階の最短径路木の一つであることを示す。補題 1, 2 より次の定理が導かれる。

【定理 2】 $T^{(k)}$ に対して、フローを更新することで屈曲点に達してフロー確定枝となった j と、 j を含む基本カットセット C_j の中の高々 1 本の補木枝との木の初等変換を施すことで、 $T^{(k+1)}$ が得られる。□

(証明) 二つの場合に分ける。

i) $T^{(k)}$ において、 C_j の中の補木枝 (u, v) (u を

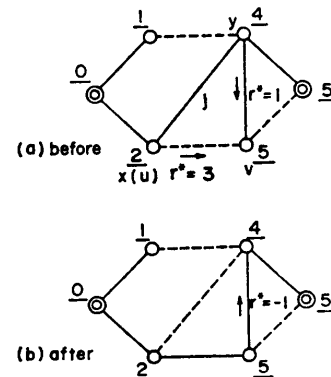


図 11 ポテンシャルの変化しない変換
Fig. 11 Transformation with potential conservation.
(下線は該当節点のポテンシャルを示す)

ルート側とする) による基本閉路の $d^+(u,v)$ はすべて w である (図 12(a)) 場合

このとき定義より,

$$l_{(u,v)} - (p(v) - p(u)) = w. \tag{17}$$

移項して,

$$p(u) + l_{(u,v)} = p(v) + w. \tag{18}$$

これは、木枝 j の代わりに (u, v) を木枝とすると v のポテンシャルは、 w 増加することを示す。また、 $T^{(i)}$ の構造が変化しなければ、 j と子孫節点のポテンシャルは、一様に w 増加する。ゆえに、 $T^{(i)}$ は、 $i+1$ 段階の最短経路木の一つである (図 12(b))。このとき j は、フローが変化する方向の次のテンション確定領域 (ζ_j が 2 増加または減少) に移る。

ii) $T^{(i)}$ において、 C_j の中の補木枝 (u, v) (u をルート側とする) による基本閉路の $d^+(u,v)$ が 0 の閉路が存在する (図 13(a)) 場合

木枝 j の長さが増加しても、 $d^+(u,v)$ が 0 の閉路の補木枝と木枝 j を初等変換しても、すべての節点のポ

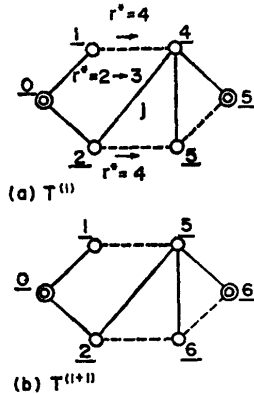


図 12 定理 2 i) の場合
Fig. 12 Theorem 2 case i).

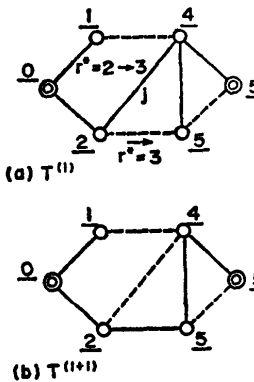


図 13 定理 2 ii) の場合
Fig. 13 Theorem 2 case ii).

テンシャルは変化しない。したがって、その木が $i+1$ 段階目の最短経路木の一つである (図 13(b))。□

定理 2 により、長さの増加した木枝 j の子孫節点を調べ、上記 $d^+(u,v)$ (u をルート側とする) が 0 となる枝が見つければ、その枝と元の木枝 j を初等変換することで、 $i+1$ 段階の最短経路木として良いことが分かる。もし、該当する枝が存在しない場合は、木の構造はそのままとし、木枝 j の子孫節点のポテンシャルを一様に w 増加させる。アルゴリズムを以下に示す。

アルゴリズム 改訂 NPD

- Step 0. 各枝のフローと長さを 0 とする。
- Step 1. 仮想ソースをルートとして最短経路木を求める。この木における補木枝の領域番号 ζ_j を 0、木枝でルートからシンクへの向きの枝の領域番号 ζ_j を 1、他の ζ_j を -1 とする。
- Step 2. ルートから仮想シンクへの最短経路 P の増加可能量 Δq を求める (NPD 法と同じ)。
- Step 3. 最短経路 P 上の枝のフローを更新する (NPD 法と同じ)。

もし、あるカットセットのすべての枝について、ルートから仮想シンクに向かう枝が流量上限、仮想シンクからルートに向かう枝が流量下限に達したならば終了。

Step 4. フロー値が枝特性の屈曲点に達した木枝のうち 1 本を j とする。 j の子孫節点を走査し、カットセット C_j の補木枝 (u, v) (u がルート側) の $d^+(u,v)$ が 0 となる枝 j' を探す。

Step 5. もし、 j' が見つかった場合は、枝 j' と j による木の初等変換をする。 ζ_j と $\zeta_{j'}$ をそれぞれフローが増加した場合 1 増加、減少した場合 1 減少させる。

j' が見つからない場合、 j の子孫節点すべてのポテンシャルを w 増加させ、木の構造はそのままとする。 ζ_j をフローが増加した場合 2 増加、減少した場合 2 減少させる (隣接するテンション確定領域へ移る)。

Step 2. へ。 □

4.3 計算複雑度

改訂 NPD 法の Step 5. の計算量は、以下のように見つめることができる。

カットセットの枝を調べる操作は、枝の数に比例する。木の初等変換を行う場合は、元の木枝 (u, v) (u がルート側とする) と新しい木枝 (u', v') (u' がルート側とする) の v, v' 間の木枝に沿う経路上の節点に操作をする。また、初等変換をしない場合は、枝 j の子孫節点全部に操作をする。いずれも節点数に比例す

表 1 計算時間の比較 (単位: 秒)
Table 1 Comparison of calculation time.

規 模			手 法	
N	n	m	NPD 法	改訂 NPD
5	25	40	0.25	0.11
7	49	84	0.94	0.31
10	100	180	8.60	2.32
A	170	221	1.08	0.20
B	308	410	9.25	3.35

る手間の計算量である。したがって、枝と節点の走査を効率よく実行するデータ構造があれば、Step 5. は、枝数と節点数の和に比例する手間で実行できる。

4.4 実験結果

以上の議論による効率化を確認するためのプログラム実験を行った。実験では、毎回最短経路木を単純に反復して求める方法と改訂 NPD を比較した。両者のプログラムの相違は、最短経路木を更新する部分のみである。テストデータは、 $(N \times N)$ 節点の正方形グラフ (枝数 $2 \cdot (N-1) \cdot N$) の各節点、枝に、需要量、係数を乱数により与えた。 $N=5, 7, 10$ とし、各々 10 ケースの平均をとった。また、実際の管路網 A (節点数 170, 枝数 221, 取水点数 3), B (同 308, 410, 3) に対して計算した。以上の結果を表 1 にまとめる (使用計算機 ACOS-1000)。計算結果を見ると、改訂 NPD によって、余分な探索の削減効果があることが分かる (同じデータの場合、反復回数はほぼ同じである)。

5. おわりに

本文では、ネットワーク上の Primal-Dual 法の効率化について提案を行った。特性近似に制約を加えることで、毎回の繰り返しに必要とされる最短経路木が、1 回の木の初等変換で得られることを示した。この性質を利用して、計算を効率化する手法を提案した。この手法は、最小化すべき関数が凸関数であれば、任意の非線形ネットワークフロー解析問題に適用可能である。

謝辞 本文作成に当たり、有用な助言をいただきました日本電気(株) C&C システム研究所応用システム研究部後藤部長および御討論いただきました関係各位の方々に深謝いたします。

参 考 文 献

1) Ford, L. R., Jr. and Fulkerson, D. R.: Flows in

Networks, Princeton University Press, Princeton (1962).

- 2) Iri, M.: *Network Flow, Transportation and Scheduling*, pp. 193-209, Academic Press, New York (1969).
- 3) Tomizawa, N.: On Some Techniques Useful for Solution of Transportation Network Problems, *Networks*, Vol. 1, pp. 173-194 (1971).
- 4) Aho, A. V., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D.: *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading (1974).
- 5) Ali, A. I., Helgason, R. V., Kenington, J. L. and Lall, H. S.: Primal Simplex Network Codes, *Networks*, Vol. 8, pp. 315-339 (1978).
- 6) 伊理, 古林: ネットワーク理論, 日科技連, 東京 (1976).
- 7) 大附辰夫: 最近のグラフ理論とその応用, 情報処理, Vol. 21, No. 2, pp. 171-179 (1980).
- 8) 宮岡, 松本: 最小費用流計算による管網解析法, 電学論 C, Vol. 101, No. 11, pp. 261-268 (1981).
- 9) 吉村: 区分線形近似による管網解析手法, 信学論 A, Vol. J 66-A, No. 4, pp. 297-304 (1983).
- 10) 阪内, 吉村: 非線形ネットワークにおける最小コスト・フロー・アルゴリズム, 第 30 回情報処理学会全国大会論文集, pp. 31-32 (1985).
- 11) 土木学会: 水理公式集, p. 379 (1971).

(昭和 63 年 5 月 12 日受付)

(昭和 63 年 9 月 5 日採録)

阪内 秀記 (正会員)



昭和 56 年早稲田大学理工学部電子通信学科卒業。昭和 58 年同大学院修士課程修了。同年日本電気(株)入社。水道, 電気, ガスなどネットワークアルゴリズムの応用に関する研究に従事。現在, 同社 C&C システム研究所応用システム研究部勤務。電子情報通信学会会員。

吉村 猛 (正会員)



昭和 49 年大阪大学大学院電子工学科修士課程修了。同年, 日本電気(株)入社。以来, 水道網運用, VLSI-CAD を始めとするネットワーク問題の研究に従事。現在, 同社 C&C システム研究所応用システム研究部研究課長。電子情報通信学会, IEEE 各会員。