ショートノート

指数型3次スプライン補間†

裴 錫 燦†† 一 松 信†††

通例のスプライン関数の変形として，各小区間で $A_i \prod_{k=1}^{3} \exp(\lambda_{ki} x^k)$ の形の指数多項式を滑らかにつないで作った指数3次スプライン関数について，その計算法と実例を与える．

1. 指数型スプライン関数

1.1 指数型スプライン補間

区間 $[a,b]$ 上に $(n+1)$ 個の節点

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b \tag{1}$$

をとり，x_i での値 y_i を与える．ここでデータ y_i がすべて正としたとき，次のような指数型スプライン関数による補間を考える．

1° $s(x_i)=y_i$ $(0\leqq i\leqq n)$，$s(x)$ は C^2 級，

2° 各小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 上で $s(x)$ は

$$A_i \exp(a_i x+b_i x^2+c_i x^3) \tag{2}$$

の形である．$\ln|A_i|=d_i$ と記す．

$S(x)=\ln|s(x)|$ は通例の3次スプラインであるから，両端での境界条件を定めれば，通例のとおり[1),3),7),8),11)]に計算できる．便宜上

$$g_i=\ln y_i,\ h_i=x_{i+1}-x_i \tag{3}$$

$$\lambda_i=h_{i+1}/(h_{i+1}+h_i),\ \mu_i=1-\lambda_i$$

とおくと，中間の節点での値 $S'(x_i)=m_i$，$S''(x_i)=M_i$ は，それぞれ次の連立1次方程式をみたす．

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=D_i \tag{4}$$

$$D_i=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{g_{i+1}-g_i}{h_{i+1}}-\frac{g_i-g_{i-1}}{h_i}\right)$$

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=C_i \tag{5}$$

$$C_i=3[\lambda_i(g_i-g_{i-1})/h_i+\mu_i(g_{i+1}-g_i)/h_{i+1}]$$

$$1\leqq i\leqq n-1$$

1.2 計 算 式

境界条件を $s'(a)=y_0'$, $s'(b)=y_n'$ と与えれば，$S'(a)=y_0'/y_0$，$S'(b)=y_n'/y_n$ となるから，(5)式に

$$m_0=y_0'/y_0,\quad m_n=y_n'/y_n$$

を追加して解く．また(4)式には両端に

$$2M_0+M_1=\frac{6}{h_0}\left(\frac{g_1-g_0}{h_0}-\frac{y_0'}{y_0}\right)$$

$$M_{n-1}+2M_n=\frac{6}{h_{n-1}}\left(\frac{y_n'}{y_n}-\frac{g_n-g_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$$

を加えて解く，各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ では，両端での値と導関数が既知なので，3次式を Hermite 補間[2),4)~6)]として求めることができる．具体式は次のようになる．

$$\begin{aligned}S(x)=&m_{i-1}(x_i-x)^2(x-x_{i-1})/h_i^2\\&-m_i(x-x_{i-1})^2(x_i-x)/h_i^2\\&+g_{i-1}(x_i-x)^2[2(x-x_{i-1})+h_i]/h_i^3\\&+g_i(x-x_{i-1})^2[2(x_i-x)+h_i]/h_i^3,\\&x_{i-1}\leqq x\leqq x_i\end{aligned} \tag{6}$$

他の境界条件，たとえば周期境界条件 $s^{(i)}(a)=s^{(i)}(b)$ $(i=1,2)$ の場合も同様に計算できる．

2. 指数型スプラインの収束性

分割(1)に対する最大幅を $|\Delta|$ とする．y_i が一様連続で十分滑らかな正の関数 $f(x)$ の x_i での値のとき，指数型3次スプライン関数は，$\Delta\to 0$ のとき $f(x)$ に一様収束する．その略証と誤差の評価を与える．

$g(x)=\ln[f(x)]$ が区間 $[a,b]$ で C^1 級のとき，節点(1)において $g_i=g(x_i)$ に対する3次スプライン関数 $S(x)$ は前章の(6)式で与えられ，これから通例のように[7)]，区間 $[x_{i-1}, x_i]$ での評価

$$|g(x)-S(x)|\leqq\omega(g,|\Delta|)+(h_{i-1}/4)\max(|m_{i-1}|,|m_i|)$$

をうる．ここに ω は g の一様連続率，すなわち $|x'-x''|<|\Delta|$ である2点 x', x'' に対する $|g(x')-g(x'')|$ の上限である．これから $|\Delta|\to 0$ のとき $S(x)$ は $g(x)$ に一様収束する．したがって $f(x)$ が C^1 級で定符号，$|f|$ が正の下限をもてば，$g(x)=\ln|f(x)|$ は一様連続なので，$f(x)$ に対する指数型3次スプラ

† Exponential Cubic Spline Interpolation by XI-CAN PEI (Department of Mathematics, North-east Normal College, Changchun, China) and SIN HITOTUMATU (Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University).

†† 長春市・東北師範大学数学系

††† 京都大学数理解析研究所

イン関数 $s(x)$も，$|\Delta|\to 0$ のとき一様に $f(x)$ に収束する.

なお Hall[9] により，$g(x)$ が C^4 級のとき

$$|g(x)-S(x)|\leqq(5|\Delta|^4/384)\max|g^{(4)}(x)|$$

が証明されている．著者の一人(裴)は，これを知らず独立にこの評価を示した[12]．これから上記の条件をみたす $f(x)$ が C^4 級なら，指数型スプライン関数の近似度は $O(h^4), h=|\Delta|$ である.

3. 実　　例

3.1 一つの数値例

$f(x)=\exp(1/x)$，$0.2\leqq x\leqq 3$

節点は 0.4 刻み等間隔，境界条件は $f'(x)$ の真値

$f'(0.2)=-3710.33$，$f'(3)=-0.155068$

を与えた．データを**表1**に，連立一次方程式を解いてえた $m_i(1\leqq i\leqq 6)$ の値と境界値 m_0, m_7 を**表2**に，指数型スプライン補間の係数を**表3**に示す．計算の一部は電卓による手計算であり，主要部は長春師範大学計算センターの機械で，標準 FORTRAN 単長のライブラリプログラムを利用した.

表1 例のデータ
Table 1 Data for the example.

i	x_i	$f(x_i)$	$g(x_i)$
0	0.2	148.413	5.00000
1	0.6	5.29449	1.66667
2	1.0	2.71828	1.00000
3	1.4	2.04273	0.714286
4	1.8	1.74291	0.555556
5	2.2	1.57546	0.454545
6	2.6	1.46905	0.384616
7	3.0	1.39561	0.333333

表2 m_i の計算値
Table 2 The computed values of m_i.

i	m_i	i	m_i
0	−25.0000	4	−0.342644
1	−0.882471	5	−0.197308
2	−1.47005	6	−0.150175
3	−0.380164	7	−0.111111

表3 指数3次スプライン補間式の係数
Table 3 The coefficients of the exponential cubic spline interpolation.

i	A_i	c_i	b_i	a_i
0	464656	−57.7945	99.2657	−57.5999
1	0.488504	11.0328	−15.4464	6.12997
2	3130.01	−15.2628	10.8492	−2.63523
3	0.672119	2.83605	−2.07852	0.442796
4	31.7366	−3.58859	1.49072	−0.218173
5	2.69026	−0.223362	−0.0389237	0.013585
6	5.82865	−1.11547	0.304198	−0.0304011

同じデータを同じ節点で通例の3次スプライン補間をすると，近似が悪く，$x=0.4, 1.2$ の付近で関数値が負になる．指数型スプラインでも最大絶対誤差が 3.8 だが，xが大きくなるにつれて急激に誤差が減少する．ただし単長計算では節点において 10^{-5} 程度の演算誤差が発生した.

3.2 他の実例

他の例として $f(x)=\sqrt{2/\pi}\exp(-2x^2)$，$0\leqq x\leqq 1$ を刻み幅 0.2 の等間隔節点で試みた[12]．詳細は略すが，通例の3次スプラインでも最大誤差 1.7×10^{-4} 程度だが，指数型スプラインによると，全区間を通じてほぼ単長計算の限界に近い 2×10^{-6} 以下の誤差で補間ができた.

3.3 結　　語

変化の激しい定符号関数の近似に対数変換を用いるというアイディアは多くの文献にあるが（たとえば文献 10)），不完全ガンマ関数の一族などの近似式として，指数型スプラインによる近似式は，有効に活用できる.

謝辞 多くの不注意を指摘下さり，文献 9), 10) を御教示下さった査読者に感謝の詞を述べる.

参 考 文 献

1) 一松　信：数値解析，pp. 98-102, 朝倉書店，東京 (1982).
2) Henrici, P. (一松，平本，本田訳)：数値解析の基礎，pp. 185-215, 培風館，東京 (1973).
3) 南京大学数学系計算数学室編：数値逼近方法，pp. 122-149, 中国科学出版社，北京(1978) (中国語).
4) Stečkii, S. V. and Suebotin, Ju. N.: *Slučainy v vyčislitel'noi matematike*, pp. 83-95, Izd. Nauka, Moscow (1976).
5) Powell, M. J. D.: *Approximation Theory and Methods*, pp. 212-224, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U. K. (1981).
6) Chenny, E. W.: *Introduction to Approximation Theory*, pp. 84-100, McGraw-Hill (1966).
7) 市田浩三，吉本富士市：スプライン関数とその応用，pp. 43-59, 教育出版社，東京 (1979).
8) Burden, R. L., Paires, J. D. and Reynolds, A. C.: *Numerical Analysis*, 2nd ed., pp. 107-120, Prindle, Weber & Schmidt, Boston (1981).
9) Hall, C.: On Error Bound for Spline Interpolation, *J. of Approx, Theory*, Vol. 1, pp. 209-218 (1968).
10) Wold, S.: Analysis of Kinetic Data by Means

of Spline Functions, *Chemica Scripta*, Vol. 1, pp. 97-102 (1971).
11) 蘇 歩青, 劉 鼎元：計算幾何, 上海科学技術出版社, 上海 (1981) (中国語).
12) 裴 錫燦：指数型三次様条挿値, 全国高校第五属学術論文, 長春 (1987) (中国語).

(昭和63年 4月25日受付)
(昭和63年11月14日採録)

裴 錫燦

1934年10月2日生. 1960年8月吉林師範大学数学系卒業. 中国長春市東北師範大学数学系勤務. 研究テーマは数値解析, 自動プログラミング. 昭和56年10月から2年間京都大学数理解析研究所研修員.

一松 信 (正会員)

1926年生. 1947年東京帝国大学理学部数学科卒業. 理学博士. 京都大学数理解析研究所教授. 主たる研究テーマ：数学と計算機との界面として, 数式処理, 情報検索など. 日本数学会, 日本数学教育学会会員. 主要著書. 解析学序説上, 下(新版), 裳華房；数値解析, 朝倉書店など.