A-42 Bipartiteグラフのdirect productにおける素因子分解の非一意性について

菊地 洋右,Wilfried Imrich, 柴田 幸夫
{kikuchi, shibata}@msc.cs.gunma-u.ac.jp, imrich@unileoben.ac.at

群馬大学工学部情報工学科
〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1

Department of Applied Mathematics
Montanuniversität Leoben
A-8700 Leoben,Austria

1 はじめに

本論文では, ある条件を満たす与えられた連結なbipartite グラフが direct product のもとでループ付き有限単純グラフ (このクラスをΓ_0 で表す) では一意に素因子分解されないことを示す.

グラフの積は hypercube,mesh,torus などのようにネットワークモデルの構成に用いられる代表的なグラフの演算である. またここで扱う direct product はオートマトンとも関わりが深い [7]. ここでいう因子分解とは積に対する逆演算に相当するものである. 与えられたグラフ G と積に対して, どのようなグラフから G が構成されているかという問題はそのグラフの構造を知る上で興味深いものを含んでいる.

先に挙げた hypercube においては partial cubes, median graphs,planar median graphs,hypercube といった subgraph に対しての recognition algorithm が提案されている. 又,hypercube を拡張した Hamming graph に対してもそのいくつかの subgraph に対して recognition algorithm が提案されている [5].

このようなグラフのクラスに対する recognition algorithm の研究がある一方で, グラフの積に対する recognition algorithm も研究されている。グラフの積には standard products と呼ばれる 4 つの積 (Cartesian product,direct product,strong product,lexicographic product) がある. 与えられたグラフ G があるグラフの積として表現できるかという問題は興味深く様々な研究がなされてきた. 一般に,standard products においては与えられたグラフ G が非連結の場合, 一意に因子分解されない. そこでグラフを連結の場合に限ることにする. このとき,standard products において,Cartesian product と strong product は任意のグラフ G に対して Γ_0 において一意素因子分解されることが知られている. 更に,Cartesian product では 92年に Aurenhammer ら [1] によって $O(m\log n)$ の recognition algorithm が提案されたが, 最近, 線形時間, 線形領域の algorithm が Imrich[6] によって開発された. strong product については Feigenbaum らによる多項式時間の recognition algorithm が知られている [3]. lexicographic product に関して, その recognition は graph isomorphism problem と同等の complexity を持つ (GI 完全) ことが Feigenbaum らによって示された [2]. direct product は McKenzie[8] により nonbipartite グラフに対して Γ_0 において一意素因子分解可能であることが知られている. 更に Imrich は [8] をもとに nonbipartite グラフに対する多項式時間の recognition algorithm を開発した [4]. bipartite graph の direct product に対する研究として [7] があるが, これは direct product によって構成された graph が非連結の場合の同型成分について論じたものである.

以下, 本論文では次節で必要となる諸定義を述べ,3節で主定理とその証明を与え, 4 節でまとめと今後の課題について述べる.

2 諸定義

はじめに述べたことがらを数学的に定式化するためにいくつかの定義と記号を導入する. グラフ G の頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ とする. なおここで扱うグラフは有限グラフとする. グラフ G の頂点集合 $V(G)$ に対して $V_1 \cup V_2 = V(G)$ かつ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 任意の頂点 $u, v \in V_i (i = 1, 2)$ に対して $\langle uv \rangle \notin E(G)$ であるとき G は bipartite であるといい, V_1, V_2 を partite set と呼ぶ. グラフ G と H の direct product $G \times H$ とは,

$$
\begin{aligned}
V(G\times H) &= V(G)\times V(H),\\
E(G\times H) &= \{\langle (u_1u_2),(v_1v_2)\rangle \\
&\qquad |\langle u_1v_1\rangle \in E(G) \text{ かつ } \\
&\qquad \langle u_2v_2\rangle \in E(H)\}
\end{aligned}
$$

で定義されるグラフである.

グラフ G が $G = A \times B$ と表現されるとき, これを G の direct product における A, B による因子分解 (あるいは G の A, B による因子分解) と呼び, A, B は共に G の因子であるという. グラフ G が素であるとは,$G = A \times B$ を満たす A, B が Γ_0 において存在しない又は,G が自明なグラフであるときをいう.

$G = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_k$ と表現されるときに任意の H_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ が素であるならば, これを G の素因子分解という.

このとき次のことが知られている.

Proposition 1 [8, 5 pp.177]G を nonbipartite かつ $G \in \Gamma_0$ とする. このとき G は direct product のもとで Γ_0 において一意素因子分解される.

この proposition は nonbipartite グラフに対する結果である. 同様の一意素因子分解が bipartite グラフに対して成り立つか否かは興味深い問題であり, これが本論文のテーマである.

次節に入る前にグラフの自己同型写像について述べる．グラフ G の自己同型写像 τ とは,$V(G)$ 上の全単射で，隣接関係を保存するものをいう．この自己同型写像について次の性質を性質 π と呼ぶ．
性質 π:グラフ G のある隣接する頂点 u,v に対して $\phi(u)=v, \phi(v)=u$ かつ $\phi^2=\mathrm{id}$ を満足する G 上の自己同型写像 ϕ が存在する．

3 主定理とその証明

bipartite グラフ G が direct product において因子分解されるとする．このとき次が成り立つ．ただし、Γ は有限単純グラフのクラスを表す．

補題 1 G を bipartite グラフ，又 $G=H_1\times H_2$ と因子分解されるものとする．このとき，

1. $H_1\in\Gamma_0\setminus\Gamma$ ならば $H_2\in\Gamma$ かつ bipartite である．
2. $H_1,H_2\in\Gamma$ ならば,H_1,H_2 の一方は bipartite であり，もう一方は nonbipartite である． ■

これらの準備のもとで，次のことが成り立つ．

定理 1 bipartite グラフ G が因子として Γ に属する性質 π を持つ nonbipartite グラフを持つならば,G は Γ_0 において一意に因子分解されない．

証明 Γ に属し，性質 π を持つ nonbipartite グラフを H_1 とし，H_1 は G の因子とする．このとき $G=H_1\times H_2$ と書け，H_2 も因子であり，又，補題 1 より H_2 は bipartite である．H_1 において自己同型写像を ϕ は性質 π を満足するものとする．$V(H_1)=\{a_1,a_2,\ldots,a_s\}$ とし,a_1,a_2 は $\phi(a_1)=a_2$,$\phi(a_2)=a_1$ かつ $(a_1,a_2)\in E(H_1)$ であり，$\phi^2=\mathrm{id}$ を満足するものとする．一方,H_2 は bipartite グラフであるので,H_2 の partite set を $V_1=\{b_1,b_2,\ldots,b_i\}, V_2=\{b'_1,b'_2,\ldots,b'_j\}$ とおく.$V(G)$ 上の写像 ψ を次のように構成する．

$$\psi(x,y)=\begin{cases}(x,y) & \text{if } y\in V_1\\ (\phi(x),y) & \text{otherwise}\end{cases}$$

ϕ が H_1 上の自己同型写像,H_2 が bipartite グラフであることから ψ は G 上の自己同型写像である．この G に ψ を施したグラフを G' とおく．

グラフ G' の任意の 2 頂点 (a,b) と (a',b') が隣接していると仮定する．このとき，

$$\langle(a,b),(\phi^{-1}(a'),b')\rangle\in E(G)$$

direct product の定義から

$$\langle a,\phi^{-1}(a')\rangle\in E(H_1) \text{ かつ } \langle b,b'\rangle\in E(H_2)$$

よって $\phi(a)$ と a' は隣接しかつ $\langle b,b'\rangle\in E(H_2)$ であり，

$$\begin{aligned}\langle(a',b),(\phi(a),b')\rangle &\in E(G) \text{ となり}\\ \langle(a',b),(a,b')\rangle &\in E(G')\end{aligned}$$

を得る．故に,G' は direct product の隣接条件より，G' の頂点 (x,y) に対して

$$\theta_1(x,y)=x \quad \theta_2(x,y)=y$$

G' の辺 $\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle$ に対して

$$\begin{aligned}\theta'_1(\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle) &= \langle x_1,x_2\rangle\\ \theta'_2(\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle) &= \langle y_1,y_2\rangle\end{aligned}$$

なる写像 $\theta_1,\theta_2,\theta'_1,\theta'_2$ を与えることができる．θ_1,θ'_1 により得られるグラフ H'_1 と θ_2,θ'_2 により得られるグラフ H_2 はともに G' の因子であり $G'=H'_1\times H_2$ である．又,H'_1 は頂点 a_1 と a_2 に loop を持つグラフである．故に $G=H_1\times H_2\simeq H'_1\times H_2$ となり，このことから G は Γ_0 において一意に因子分解されないことが導ける． ■

4 まとめと今後の課題

本論文では,bipartite グラフの direct product における素因子分解について考察した．bipartite グラフが性質 π を満たす因子を持つ時に，その bipartite グラフは一意に分解されず，したがって素因子分解も一意ではない．

今後の課題として bipartite グラフは Γ において一意素因子分解されるかという問題がある．

参考文献

[1] Aurenhammer, F., Hagauer, J., and Imrich, W., Cartesian graph factorization at logarithmic cost per edge. *Comput. Complexity* 2, (1992) 331–349.

[2] Feigenbaum, J., and Schäffer, A. A., Recognizing composite graphs is equivalent to testing graph isomorphism, *SIAM J. Comput.*,15 (1986) 619–627.

[3] Feigenbaum, J., and Schäffer, A. A., Finding the prime factors of strong direct product graphs in polynomial time, *Discrete Math.*109 (1992) 77–102.

[4] Imrich, W., Factoring cardinal product graphs in polynomial time, *Discrete Math.*192 (1998) 119–144.

[5] Imrich, W. and Klavžar,*Product Graphs ,Structure and Recognition*, John Wiley & Sons, Reading,New York,2000.

[6] Imrich, W., Recognizing Cartesian product graphs in linear time and space, submitted.

[7] Jha, P. K., Klavžar, S. and Zmazek, B., Isomorphic components of Kronecker product of bipartite graphs, *Discussiones Math. Graph Theory*, 17 (1997) 301–309.

[8] McKenzie, R., Cardinal multiplication of structures with a reflexive relation, *Fund. Math.*, 70 (1971) 59–101.