A-37

直並列グラフのリスト全彩色

List Total-Colorings of Series-Parallel Graphs

東北大学大学院情報科学研究科
松尾 悠生, 周 暁, 西関 隆夫

1 まえがき

点集合 V, 辺集合 E からなるグラフを $G=(V,E)$ と書く．また, $V=V(G)$, $E=E(G)$ とも書くことがある．多重辺やループを含まないグラフを単純グラフという．グラフ $G=(V,E)$ の全彩色とは, 隣接する任意の 2 点, 端点を共有する任意の 2 辺, 任意の点とそれに接続する任意の辺が異なる色になるように, G のすべての点と辺に彩色することである．したがって全彩色は $V \cup E$ から色集合 C への写像 $f: V \cup E \to C$ である．グラフ G における点 v の次数を $d(v,G)$ と書く．また G の最大次数を $\Delta(G)$ と書く．グラフ G を全彩色するのに必要な最少色数を $\chi_t(G)$ とすると, 明らかに $\chi_t(G) \geq \Delta(G)+1$ である．

写像 $L: E \cup V \to 2^C$ を G のリストという．L に対するグラフ G のリスト全彩色 $f: V \cup E \to C$ とは, 各要素 $x \in V \cup E$ に対して $f(x) \in L(x)$ なる G の全彩色である．このような G のリスト全彩色を G の L-全彩色ともいう．リスト全彩色は全彩色の一般化である．k が自然数であり, 各要素 x について $|L(x)| \geq k$ なる任意のリスト L に対して G の L-全彩色が存在するとき, G は k-リスト全彩色可能であるという．

本文では単純直並列グラフを扱う．直並列グラフとは 4 点からなる完全グラフ K_4 の細分を部分グラフとしてもたないグラフである．

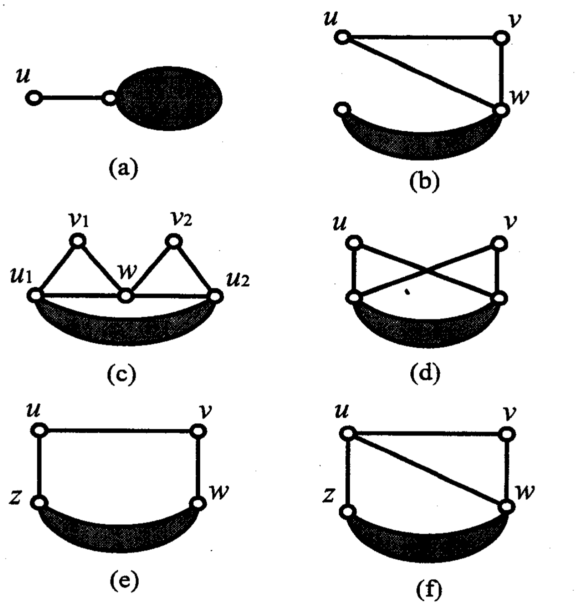

図 1: 直並列グラフの部分構造

2 定理

本文の主な結果は次の定理である．

定理 1 $\Delta(G) \geq 3$ なる単純直並列グラフ G は, $(\Delta(G)+1)$-リスト全彩色可能である．

2.1 直並列グラフの部分構造について

グラフ G が単純直並列グラフであれば, 次にあげる (a)〜(f) の部分構造のうち少なくとも 1 つが G に部分グラフとして含まれている [1].

(a) G は高々1 次の点 u を持つ．
(b) G は次の (b1), (b2) を満たす相異なる 3 点 u,v,w を持つ．
 (b1) u は 2 次点でその隣接点は v,w である．
 (b2) v は 2 次点でその隣接点は u,w である．
(c) G は次の (c1)-(c3) を満たす相異なる 5 点 v_1,v_2,u_1,u_2,w を持つ．
 (c1) w は 4 次点でその隣接点は v_1,v_2,u_1,u_2 である．
 (c2) v_1 は 2 次点でその隣接点は u_1,w である．
 (c3) v_2 は 2 次点でその隣接点は u_2,w である．
(d) G は共通の隣接点を持つ 2 つの相異なる 2 次の点 u,v を持つ．
(e) G は次の (e1), (e2) を満たす相異なる 4 点 u,v,w,z を持つ．
 (e1) v は 2 次点でその隣接点は u,w である．
 (e2) u は 2 次点でその隣接点は v,z である．
(f) G は次の (f1), (f2) を満たす相異なる 4 点 u,v,w,z を持つ．
 (f1) v は 2 次点でその隣接点は u,w である．
 (f2) u は 3 次点でその隣接点は v,w,z である．

2.2 定理の証明

$G=(V,E)$ をグラフとし, L は G のリストとする．各要素 $x \in V \cup E$ に対して $|L(x)| \geq \Delta(G)+1$ であるとき, リ

スト L は適切であると言う．このとき定理 1 は，$\Delta(G) \geq 3$ なる単純直並列グラフ G は任意の適切なリスト L に対し L-全彩色を持つと言い換えることができる．

G が単純直並列グラフであるとき，(a) ～ (f) の部分構造のうち少なくとも 1 つが G に部分グラフ H として含まれることを用いて，$|G|$ による帰納法により定理 1 を証明する．ここで $|G| = |V| + |E|$ である．

明らかに 1 点からなるグラフに対して，定理 1 が成り立つ．G の任意の真部分グラフに対し，定理 1 が成り立つと仮定する．

G から辺集合 $E - E(H)$ により誘導される部分グラフを $G' = (V', E')$ とする．G のリスト $L : V \cup E \to 2^C$ の $V' \cup E'$ への制限を L' と書き，L' は L を G' に制限して得られるリストであるという．L が G の適切なリストであるので，明らかに L' は G' の適切なリストである．したがって帰納法の仮定により，G の部分グラフ G' は $(\Delta(G')+1)$-リスト全彩色可能であるから，G' の L'-全彩色 $f' : V(G') \cup E(G') \to C$ が存在する．f' と各要素 $x \in (V \cup E - V' \cup E')$ に対して，

$$L_{\mathrm{av}}(x, f') = \{c \in L(x) \mid x \text{ に隣接または接続する全ての } y \in V' \cup E' \text{ に対して}, f'(y) \neq c\}$$

と定義し，この $L_{\mathrm{av}}(x, f')$ を（f' に関する）x の L-欠色集合と言う．次のように G' の L'-全彩色 f' を G の L-全彩色 f へ拡張できる．

[G が部分構造 (a) を含む場合]

G は部分構造 (a) を含むから，G は高々1 次の点 u を含む．u の隣接点を v とし，H は点 u と v により誘導される G の部分グラフであるとする．このとき G' は G から点 u を除去して得られるグラフ $G' = G - u$ である．このとき明らかに $|G'| < |G|$ だから，G' は L'-全彩色 f' を持つ．

$d(u, G) = 0$ の場合は明らかに f' を G の L-全彩色 f に拡張できるから，$d(u, G) = 1$ の場合だけ考えればよい．L は適切だから，$|L(uv)| \geq \Delta(G) + 1$ である．従って，

$$\begin{aligned} |L_{\mathrm{av}}(uv, f')| &= |L(uv)| - (1 + d(v, G')) \\ &\geq \Delta(G) + 1 - (1 + d(v, G) - 1) \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

であり，$c_1 \in L_{\mathrm{av}}(uv, f')$ なる色 $c_1 \in L(uv)$ が存在する．また

$$\begin{aligned} |L_{\mathrm{av}}(u, f') - \{c_1\}| &\geq |L_{\mathrm{av}}(u, f')| - 1 = |L(u)| - 2 \\ &\geq \Delta(G) - 1 \\ &\geq 2 \end{aligned}$$

であるので，$c_2 \in L_{\mathrm{av}}(u, f')$ かつ $c_2 \neq c_1$ なる色 $c_2 \in L(u)$ が存在する．よって，f' を次のように G のリスト全彩色 f へ拡張できる．

$$f(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in V(G') \cup E(G') \text{ のとき} \\ c_1 & x = uv \text{ のとき} \\ c_2 & x = u \text{ のとき} \end{cases}$$

f は明らかに G の L-全彩色である．■

[G が部分構造 (b) を含む場合]

u は 2 次点でその隣接点は v, w であり，v は 2 次点であり，v の隣接点は u, w である．H は点 u, v, w により誘導される G の部分グラフとする．このとき $G' = G - u - v$ である．$|G'| < |G|$ であるので，G' は L'-全彩色 f' を持つ．ここで次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} |L_{\mathrm{av}}(u, f')| &= |L(u)| - 1 \\ &\geq \Delta(G) + 1 - 1 \\ &= \Delta(G) \\ &\geq 3 \end{aligned} \tag{1}$$

同様に $|L_{\mathrm{av}}(v, f')| \geq 3$, $|L_{\mathrm{av}}(uv, f')| \geq 4$, $|L_{\mathrm{av}}(uw, f')| \geq 2$, $|L_{\mathrm{av}}(vw, f')| \geq 2$ である．次の 2 つの場合がある．

(場合 1) $\alpha \in (L_{\mathrm{av}}(uw, f') \cap L_{\mathrm{av}}(v, f')) \neq \phi$ のとき

点 v と辺 uw を α で彩色する．このとき $|L_{\mathrm{av}}(u, f') - \{\alpha\}| \geq 2$, $|L_{\mathrm{av}}(uv, f') - \{\alpha\}| \geq 3$, $|L_{\mathrm{av}}(vw, f') - \{\alpha\}| \geq 1$ であるので，次の式を満たすような相異なる色 $c_1, c_2, c_3 \in C$ が存在する．

$$\begin{aligned} c_1 &\in L_{\mathrm{av}}(vw, f') - \{\alpha\} \\ c_2 &\in L_{\mathrm{av}}(u, f') - \{\alpha\} \\ c_3 &\in L_{\mathrm{av}}(uv, f') - \{\alpha\} \end{aligned}$$

よって f' を次のように G のリスト全彩色 f へ拡張できる．

$$f(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in V(G') \cup E(G') \text{ のとき} \\ \alpha & x \in \{v, uw\} \text{ のとき} \\ c_1 & x = vw \text{ のとき} \\ c_2 & x = u \text{ のとき} \\ c_3 & x = uv \text{ のとき} \end{cases}$$

(場合 2) $(L_{\mathrm{av}}(uw, f') \cap L_{\mathrm{av}}(v, f')) = \phi$ のとき

(場合 1) と同様の方法で証明できる．本文では省略する．■

(c) ～ (f) の各部分構造についても同様に証明できるが，本文では省略する．

3 結び

$\Delta(G) \geq 3$ なる単純直並列グラフ G は，$(\Delta(G)+1)$-リスト全彩色可能であることを証明した．これは $\Delta(G) \geq 3$ なる単純直並列グラフ G の全彩色数が $\chi_t(G) = \Delta(G) + 1$ であるという結果も包含している．また，本文の証明は構成的であるので，その証明から単純直並列グラフのリスト全彩色を求めるアルゴリズムが直ちに得られる．

参考文献

[1] M. Juvan, B. Mohar, and R. Thomas, "List edge-colorings of series-parallel graphs", THE ELECTRONIC JOURNAL OF COMBINATORICS 6(1999)42, pp.1-6.