LA-12

# 完全マッチングを持つグラフに対する最小頂点被覆問題の近似解法

# Approximation for Vertex Cover Problem on graphs with perfect matching

今村 友和　　岩間 一雄 *
Graduate School of Informatics, Kyoto University

## 1 はじめに

最小頂点被覆問題 (Vertex Cover Problem) は古くから知られている NP 困難問題の一つである。この問題は最も基本的な 6 つの NP 困難問題の一つ (One of the six basic NP-hard problems) であると言われており、数多くの NP 困難問題との関係も知られている、極めて重要性の高い問題である。最小頂点被覆問題に対しては非常に簡単な近似度 2 のアルゴリズムが存在する一方、任意の定数 $\varepsilon > 0$ に対して $2-\varepsilon$ の近似度のアルゴリズムは長年の精力的な研究にも関わらず知られておらず、このようなアルゴリズムを発見することは重要な未解決問題となっている。

本研究では一般の最小頂点被覆問題ではなく、VC-PM という部分問題を考える。これは入力のグラフを完全マッチングを持つグラフに制限した最小頂点被覆問題であり、Chen と Kanj[1] により導入された。この問題は次のような理由により、重要である。一般の最小頂点被覆問題から VC-PM に対する、ある興味深い帰着が存在する。これは、VC-PM に対する近似アルゴリズムから一般の問題に対する近似アルゴリズムを構成するものであり、その際にアルゴリズムの近似度がある程度保持される。特に注目すべきは、VC-PM に対する近似度が 2 未満であるなら一般の場合にも 2 未満の近似度が得られるという点である。従って 2 より小さな近似度のアルゴリズムを発見するという目的のもとでは VC-PM という部分問題のみ考えれば良い。

本研究では VC-PM に対する二つの結果を示す。一つは一般の最小頂点被覆問題から VC-PM への帰着である。これは、もし VC-PM に対して近似度 $r$ のアルゴリズムが存在するならば一般の最小頂点被覆問題に対する近似度 $(4r-2)/(r+1)$ のアルゴリズムを構成できるというものであり、これは [1] で与えられた帰着を大幅に改良している。このとき近似度は最悪でも 0.1 程度しか劣化しない。

もう一つは VC-PM に対する近似アルゴリズムであり、それぞれ近似度が $0.0230\bar{d}+1.378, 0.0115\bar{d}+1.534, 0.0138\bar{d}+1.441$ である 3 種類のアルゴリズムを構成した。ここで $\bar{d}$ とはグラフの平均次数である。これら三つのアルゴリズムは Chen と Kanj[1] の結果や、Halldósson と Radhakrishnan[2] らの独立頂点集合に対する結果を利用したものに比べ、広い範囲の $\bar{d}$ で近似度を大幅に改良することができた (図 1)。

アルゴリズムの基本的な考え方は以下の通りである。まず入力のグラフから重み付き MAX-2SAT のインスタンスを構成する。次にこれを MAX-2SAT の近似アルゴリズムを用いて解く。最後にこの近似解を用いてうまく頂点被覆を構成すれば、上のような近似度を得ることができる。

*京都大学情報学研究科

### 1.1 定義

頂点集合 $C$ がグラフ $G=(V,E)$ の頂点被覆であるとは、任意の $(i,j)\in E$ に対して $i\in C$ または $j\in C$ が成り立つことをいう。また、$G$ の独立な辺の集合 $M$ を $G$ のマッチングといい、特に $G$ のすべての頂点が $M$ の辺のいずれかと接続しているとき $M$ を $G$ の完全マッチングという。

最小頂点被覆問題とは与えられたグラフの頂点被覆のうち最も頂点数の少ないものを求める問題であり、特に入力のグラフとして完全マッチングを持つグラフのみ考える問題を VC-PM と呼ぶ。

また、以下ではグラフ $G=(V,E)$ は $|V|=n, |E|=m$ を満たし、平均次数を $\bar{d}=2m/n$ で定義する。$Opt(G)$ で $G$ の最小頂点被覆のサイズを表す。

重み付 MAX-2SAT のインスタンス $F$ および割当 $\sigma$ に対し、$|\sigma|$ によって $\sigma$ が充足する $F$ の節の重みの総和を表すことにする。また $Opt(F)$ で $|\sigma|$ の最適値を表す。

近似アルゴリズムの性能は近似度という値で評価される。あるアルゴリズム $\mathcal{A}$ の近似度が $r$ であるとは $\mathcal{A}$ が常に最適解の $r$ 倍以内の解を出力することを表す。

## 2 帰着

本節では、VC-PM に対する近似アルゴリズムから一般の最小頂点被覆問題に対する近似アルゴリズムを構成するための帰着の概要を与える。具体的には、以下の定理である。

**定理.** VC-PM に対して近似度 $r$ のアルゴリズムが存在するならば一般の最小頂点被覆問題に対して近似度 $(4r-2)/(r+1)$ の近似アルゴリズムを構成できる。

まず、与えられたグラフ $G$ からある方法を用いて極大マッチング $M$ を構成する。もし $M$ が完全マッチングに非常に近い場合は、いくつか足りない頂点と辺を補って完全マッチングを持つグラフ $G'$ を構成し、これを $\mathcal{A}$ を用いて解く。このとき得られた解から元のグラフの頂点被覆を構成するが、$M$ が完全マッチングに近いので $r$ に近い近似度が得られる。

$M$ が小さい場合 (完全マッチングと大きく掛け離れている場合) は、$M$ にマッチされる頂点の集合を出力する。一般にグラフの任意の極大マッチング $M$ に対して $M$ にマッチされていない頂点の集合は独立頂点集合となるため、これは $G$ の頂点被覆となる。今 $M$ が比較的小さい場合を考えているため、得られる頂点被覆も大きくならない。

以上のように、得られた極大マッチングのサイズに応じて出力を切り替えれば、定理のような結果が得られる。

また、以上の定理を利用して VC-PM の近似度の下界を示すこともできる。

**定理.** もし $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ について VC-PM に対する近似度 $19/17 - \varepsilon$ のアルゴリズムは存在しない。

*Proof.* もしそのようなアルゴリズムが存在すれば上の定理により一般の最小頂点被覆問題に対して近似度 $7/6 - \varepsilon$ のアルゴリズムが存在してしまう。このようなアルゴリズムは $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ である限り存在しないことが知られている。 □

## 3 アルゴリズム

本節では VC-PM に対する近似アルゴリズムの概要を与える。入力のグラフを $G = (V, E)$ とし、$G$ は完全マッチング $M$ を持つものとする。まず、各辺 $(u, v) \in E$ に対し $(x_u \vee x_v)$(以下 positive clause と呼ぶ) を、各マッチング辺 $(u, v) \in M$ に対し $(\overline{x}_u \vee \overline{x}_v)$(以下 negative clause と呼ぶ) を定義し、これらをすべて $\wedge$ で繋いだものを $F_G$ とおく。ここで $F_G$ は重み付論理式とし、positive clause の重みは 1、negative clause の重みは $w > 0$ であるとする。

次に $F_G$ を MAX-2SAT の近似アルゴリズムを用いて解き、その近似解を $\sigma$ とする。この時用いたアルゴリズムの近似度を $r$ とする。

次に $\sigma$ の改善を行なう。頂点集合 $\mathcal{T}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma$ を $\mathcal{T}_\sigma = \{v|\sigma(x_v) = \mathrm{true}\}$, $\mathcal{F}_\sigma = \{v|\sigma(x_v) = \mathrm{false}\}$ と定義し、$G$ の部分グラフ $G(\mathcal{F}_\sigma)$ の中で次数が $w$ 以上の頂点 $v$ が存在するならば、対応する変数 $x_v$ を true に割り当て直す。同時に $v$ を $\mathcal{F}_\sigma$ から $\mathcal{T}_\sigma$ へと移しかえる。以上の操作を、上のような $v$ が存在する限り繰り返す。この操作において $\sigma$ が充足する節の数は減少しない。

$G(\mathcal{F}_\sigma)$ の任意の頂点被覆と $\mathcal{T}_\sigma$ の和は $G$ の頂点被覆となっている。よって以下では $G(\mathcal{F}_\sigma)$ の頂点被覆について考える。

$C_\mathcal{F}$ を $G(\mathcal{F}_\sigma)$ の頂点被覆とする。$C = \mathcal{T}_\sigma \cup C_\mathcal{F}$ とし、$C_\mathcal{F}$ に含まれる頂点に対応する変数を true に割り当てなおしたものを $\sigma'$ とし、$\delta = |\sigma| - |\sigma'|$ とおく。この時以下の不等式が成立する。

$$\frac{|C|}{Opt(G)} \leq 1 + \frac{2\delta}{wn} + \frac{r-1}{wr}(\overline{d} + w) \qquad (1)$$

この不等式は以下の二つの不等式から証明することができる。これらは $w$ の値によらず成立する。

**補題.** $Opt(G) \geq n + (m - Opt(F_G))/w$

**補題.** $|C| < n + \{m + \delta - Opt(F_G)/r\}/w$

しかし、上の不等式による評価では $\delta$ の値が不明であるため、$\delta$ の値が大きなときは意味を成さない。そこで、以下では $\delta$ が大きいときに有効な、別の評価を与える。

$\delta$ が大きい場合は $\mathcal{F}_\sigma$ の多くが true に割り当てなおされたことを意味するため、$C_\mathcal{F}$ も $\delta$ に比例して大きくなっていることがわかる。以下では、幾つかの場合において $C_\mathcal{F}$ が大きい場合は残された頂点 (頂点被覆に含まれなかった頂点) もある程度の大きさになることを示す。

今 $G(\mathcal{F}_\sigma)$ は最大次数 $w - 1$ であり、一般にこのようなグラフに対して良い頂点被覆を求めることは容易ではないが、$w$ が小さい場合に限っては最小頂点被覆、あるいは最小に近い頂点被覆を求めることができる。そこで、以下 $w = 2, 3$ の場合を考える ($w = 1$ の場合は Chen と Kanj[1] によってなされた)。

$w = 2$ のとき、$G(\mathcal{F}_\sigma)$ は最大次数 1 のグラフであり、グラフは独立頂点あるいは長さ 1 のパスのみから構成される。この場合各パスの端点のいずれか一つを任意に選んでいくことで容易に最小頂点被覆を構成できる。この場合、各パスの端点のいずれかは必ず残され、独立頂点は全てのこるため、$\mathcal{F}_\sigma$ の頂点のうち少なくとも 1/2 を残すことができる。

$w = 3$ のとき、$G(\mathcal{F}_\sigma)$ は最大次数 2 のグラフであり、このようなグラフは閉路とパスのみから構成されるため、その再省庁点被覆を構成するためには各パスや閉路の頂点を一つおきに選んでいけば良い。よって直観的にはおよそ半分を残すことができる。実際には、三角形のみから構成される場合が最悪で、この場合三角形を被覆するためにはその頂点のうち二つが必要なので、残るのは全体の 1/3 となる。

特に、$w = 3$ でかつグラフが triangle-free なら最悪の場合が長さ 5 の閉路の場合で、この場合全体の 2/5 を残すことができる。

以上により、$w \leq 3$ の場合は $\delta$ が大きい場合には残された頂点もある程度大きくなることがわかる。例えば $w = 2$ の場合は $|C| \leq n - \delta/2$ が成立する。この評価と、式 (1) の評価のうち、$\delta$ の値の大小に応じて良い方を用いれば最終的に以下の近似度が得られる。

$$2 - \frac{1}{3r}(2 - (r-1)\overline{d}) \qquad (w = 2)$$

$$2 - \frac{1}{5r}(3 - (r-1)\overline{d}) \qquad (w = 3)$$

$$2 - \frac{1}{6r}(3 - (r-1)\overline{d}) \qquad (w = 3, \text{triangle-free})$$

以上において $r = 1.0741$[2] とするとそれぞれ $0.0230\overline{d} + 1.378, 0.0115\overline{d} + 1.534, 0.0138\overline{d} + 1.441$ が得られ、これをグラフに表したものが図 1 である。ここで曲線のグラフは [3] の結果を利用したものであり、一番傾きの大きなグラフは [1] による結果である。我々の結果はこれらの結果を広い範囲の $\overline{d}$ で改善している。

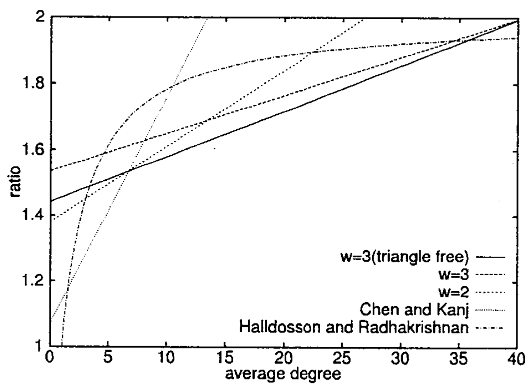


図 1: 近似度の比較

## 参考文献

[1] J. Chen and Iyad A. Kanj . *ISAAC 2000*, 132-143.

[2] U. Feige and M. X. Goemans. *ISTCS '95*, 182-189.

[3] M. Haldorsson and J. Radhakrishnan, *ACM STOC '94*, 145-16 3.