LA-11　直並列グラフをリスト辺彩色するアルゴリズム
Algorithm for Finding List Edge-Colorings of Series-Parallel Graphs

藤野 友也*　周 暁*　西関 隆夫*
Tomoya Fujino　Xiao Zhou　Takao Nishizeki

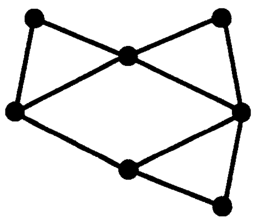
概 要

本文では, (単純) 直並列グラフ G の各辺 $vw \in E(G)$ に対して, リスト L が $|L(vw)| \geq \max\{3, d(v), d(w)\}$ を満たすならば, G がリスト辺彩色可能であることを示す. またそのようなリスト L に対して G のリスト辺彩色を求める $O(\Delta n)$ 時間アルゴリズムを与える. ここで, $d(v), d(w)$ はそれぞれ G における点 v, w の次数, Δ は G の最大次数, n は G の点数である.

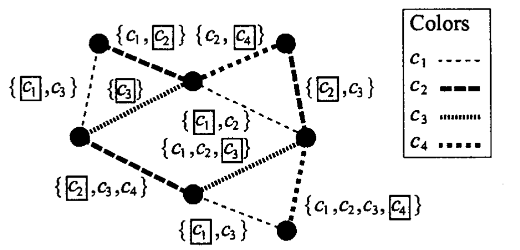
1　はじめに

本文では多重辺や自己ループのない有限な単純無向グラフを扱う. グラフ G の点 v に接続する辺の本数 $d(v)$ を v の次数と呼び, G の点の最大の次数 Δ を G の最大次数と呼ぶ.

直並列グラフとは, 4 点からなる完全グラフ K_4 の細分を部分グラフとして持たない単純グラフのことである. 例えば, 図 1 (a) のグラフは直並列グラフである.



(a) 直並列グラフの例



(b) リスト辺彩色の例

図 1: (a) 直並列グラフの例と (b) リスト辺彩色の例.

端点を共有する任意の 2 辺が異なる色になるように G の全ての辺を彩色することを G の辺彩色と呼ぶ. 本文では, 辺彩色より一般的な “リスト辺彩色” を考える. グラフ G の各辺 e に色のリスト, すなわち色の集合 $L(e)$ が与えられているとする. G の辺彩色 ψ で各辺 e に塗られた色 $\psi(e)$ が $L(e)$ に含まれるとき, ψ を G のリスト辺彩色あるいは ***L*-**辺彩色という. 通常の辺彩色は全ての辺 e のリスト $L(e)$ が等しい場合の L-辺彩色であるので, L-辺彩色は通常の辺彩色の一般化である. 図 1 (a) のグラフ G の L-辺彩色を図 1 (b) に示す. 図 1 (b) では, 各辺 e にリスト $L(e)$ が付けられており, 四角で囲われた色が辺 e の色 $\psi(e)$ を表している. リスト辺彩色は, スケジューリング問題等へ応用される.

リスト辺彩色に関しては, これまでに以下のような結果が知られている. Borodin らは, G が 2 部グラフであり, 各辺 $e = vw$ に対し $|L(e)| \geq \max\{d(v), d(w)\}$ ならば, G は L-辺彩色を持つことを証明した [BKW97]. また Juvan らは, G が直並列グラフであり, $\Delta \geq 3$ であり, 各辺 e に対し $|L(e)| \geq \Delta$ ならば, G は L-辺彩色を持つことを証明した [JMT99]. さらに Wu は, G が直並列グラフであり, 各辺 vw に対し $|L(vw)| \geq \max\{4, d(v), d(w)\}$ ならば, G は L-辺彩色を持つことを証明した [Wu00].

本文では, G が直並列グラフであり, 各辺 vw に対し $|L(vw)| \geq \max\{3, d(v), d(w)\}$ ならば, G は L-辺彩色を持つことを示す. 本文の結果は, 従来の結果 [JMT99, Wu00] を一般化している. また本文では, 直並列グラフの L-辺彩色を与える $O(\Delta n)$ 時間アルゴリズムも与える.

2　直並列グラフの特徴

直並列グラフに関して, 次の補題 1 が成り立つ. なお, $N_G(v)$ は G における点 v の隣接点集合である.

補題 1 任意の空でない直並列グラフ G は, 以下の (a)–(j) のうち少なくとも 1 つを満たす (図 2 参照):

(a) 高々1 次の点 v が存在する.
(b) 2 つの相異なる 2 次の点 u, v が存在し, $N_G(u) = N_G(v)$.
(c) 相異なる 5 つの点 u_1, u_2, v_1, v_2, w と, $Z_i \cap \{u_1, u_2, v_1, v_2, w\} = \emptyset$, $|Z_i| \leq 1$ $(i = 1, 2)$ かつ $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ なる点集合 Z_1, Z_2 が存在し, $N_G(u_i) \supseteq \{v_i, w\} \cup Z_i$, $N_G(v_i) = \{u_i, w\} \cup Z_i$ $(i = 1, 2)$ かつ $N_G(w) = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ であり, $z_i \in Z_i$ ならば $N_G(z_i) = \{u_i, v_i\}$ $(i = 1, 2)$.
(d) 2 つの相異なる 2 次の点 u, v が存在し, 互いに隣接する.
(e) 相異なる 4 つの点 u, v, w, z が存在し, $N_G(u) = \{v, w, z\}$, $N_G(v) = \{u, w\}$ かつ $z \notin N_G(w)$.
(f) 相異なる 4 つの点 u, v, w, z が存在し, $N_G(u) = \{v, w, z\}$, $N_G(v) = \{u, w\}$ かつ $N_G(w) = \{u, v, z\}$.
(g) 相異なる 5 つの点 t, u, v, w, z が存在し, $N_G(u) = \{v, w, z\}$, $N_G(v) = \{u, w\}$ かつ $N_G(w) = \{t, u, v, z\}$.
(h) 相異なる 5 つの点 t, u, v, w, z が存在し, $N_G(u) = \{v, w, z\}$, $N_G(v) = \{u, w\}$ かつ $N_G(z) = \{t, u, w\}$.
(i) 相異なる 5 つの点 t, u, v, w, z が存在し, $N_G(u) = \{v, w, z\}$, $N_G(v) = \{u, w\}$, $N_G(w) \supseteq \{t, u, v, z\}$ かつ $d(t) = 2$.
(j) 相異なる 6 つの点 s, t, u, v, w, z が存在し, $N_G(s) = \{t, z\}$, $N_G(t) \supseteq \{s, z\}$, $N_G(u) = \{v, w, z\}$, $N_G(v) = \{u, w\}$, $N_G(z) \supseteq \{s, t, u, w\}$ かつ $d(t) = 3$.

*東北大学大学院 情報科学研究科

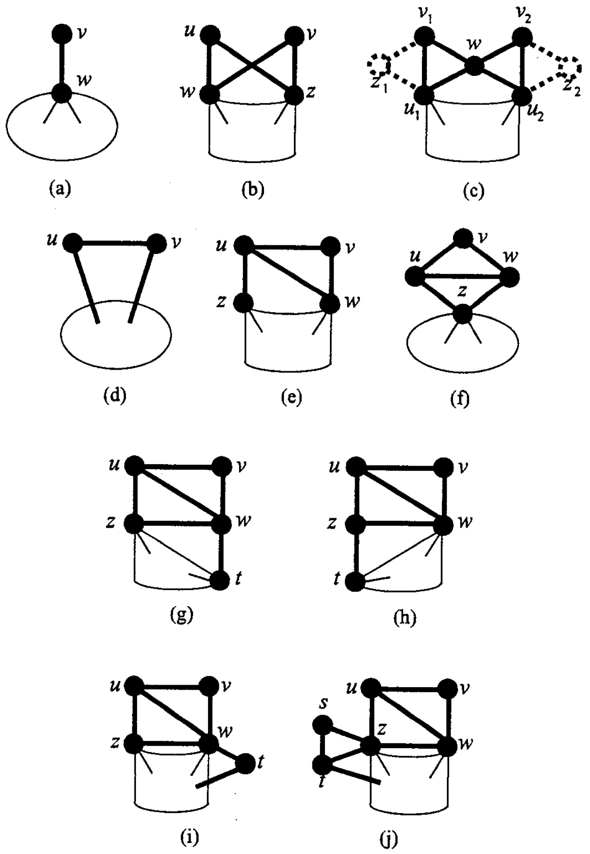


図 2: 直並列グラフが持つ部分構造 (点線で示された点や辺はある場合とない場合がある)

3 本文の結果

本文の主な結果は, 以下の定理である.

定理 1 直並列グラフ G の各辺 vw に対して, $|L(vw)| \geq \max\{3, d(v), d(w)\}$ ならば, G は L-辺彩色を持つ.

直並列グラフ G の各辺 vw に対してリスト L が $|L(vw)| \geq \max\{2, d(v), d(w)\}$ であっても, G が L-辺彩色を持たない例, 例えば奇閉路, が無限個存在する. また直並列グラフ G の各辺 vw に対してリスト L が $|L(vw)| \geq \max\{3, d(v)-1, d(w)\}$ であっても, G が L-辺彩色を持たない例が無限個存在する. この意味で定理 1 は最適である.

定理 1 は, グラフの点数と辺数の和に関する帰納法で証明できる. その概略は以下の通り.

まず, 2 点完全グラフ K_2 においては明らかに定理 1 は成り立つ. 次に, 点数と辺数の和が $k \geq 3$ 以下の直並列グラフに関しては定理 1 が成立すると仮定し, 点数と辺数の和が $k+1$ である任意の直並列グラフ G を考える. 補題 1 より, G には (a)–(j) の部分構造のいずれかが必ず存在する (図 2 参照). G にどの部分構造が存在していても, G よりも点数と辺数の和が小さい適切な直並列グラフ G' を G から辺を除去したり短絡して作ると, 適切なリスト L' が存在し, 帰納法の仮定より G' は L'-辺彩色を持つ. G' のその L'-辺彩色から G の L-辺彩色に拡張できる.

4 アルゴリズムと計算時間

本文の定理 1 の証明は構成的であるので, 直並列グラフ $G = (V, E)$ の各辺 $vw \in E$ に対して $|L(vw)| \geq \max\{3, d(v), d(w)\}$ ならば, G の L-辺彩色を求める多項式時間アルゴリズムが直ちに得られる.

[Algorithm List-Color(G,L)]

Step 1. G が持つ部分構造 (a)–(j) のいずれかを見つける;

Step 2. G が持つ部分構造に応じて, 適切な小さいグラフ G' とリスト L' を構成する;

Step 3. **List-Color(G',L')** により再帰的に G' の L'-辺彩色 ψ' を求める;

Step 4. G' の L'-辺彩色 ψ' を G の L-辺彩色に拡張する.

直並列グラフ $G = (V, E)$ は隣接リストを用いて表現する. $n = |V|$ とすると, G が単純直並列グラフであることより, $|E| \leq 2n - 2$ である. また $l = \Sigma_{e \in E}|L(e)|$ とすると, $l = O(\Delta n)$ である. 各辺 e のリスト $L(e)$ は, ソート済み連結リストで表現する. これは $e \in E$ かつ $c \in L(e)$ なるペア (e, c) を, 基数ソートを用いて辞書式順序でソートすることで $O(l+n) = O(\Delta n)$ 時間で行える.

Step 1 は, 各点の次数と 2 次以下の点を保持しておくことで, アルゴリズム全体で $O(\Delta n)$ 時間で行うことができる. G' を構成するための G の操作と L' を構成するための L の操作が共に 1 回当たり $O(\Delta)$ 時間ででき, Step 2 はアルゴリズム全体では高々 $|V|+|E| = O(n)$ 回繰り返される. 従ってアルゴリズム全体で Step 2 にかかる時間の合計は $O(\Delta n)$ である. Step 3 における再帰呼び出し回数はアルゴリズム全体で $O(n)$ である. Step 4 は拡張すべき部分が限定されているので 1 回当たり $O(\Delta)$ 時間で実行可能であり, アルゴリズム全体では高々 $O(n)$ 回繰り返される. 従ってアルゴリズム全体で Step 4 にかかる時間の合計は $O(\Delta n)$ である.

以上より, このアルゴリズムの実行時間は $O(\Delta n)$ である.

5 結論と今後の課題

本文では, 直並列グラフのリスト辺彩色に関して定理 1 を証明した. 定理 1 は従来の結果 [JMT99, Wu00] を包含する. また直並列グラフ G の L-辺彩色を求める $O(\Delta n)$ 時間アルゴリズムを与えた.

今後の課題としては, 平面グラフなど, 他のグラフのクラスに対し同様な命題を証明することなどが挙げられる.

参考文献

[BKW97] O. V. Borodin, A. V. Kostochka and D. R. Woodall, List edge and list total colourings of multigraphs, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 71 (1997), pp.184–204.

[JMT99] Martin Juvan, Bojan Mohar, and Robin Thomas, List edge-colorings of series-parallel graphs, The Electronic Journal of Combinatorics 6, #42 (1999), pp.1–6.

[Wu00] J. L. Wu, List edge-colouring of series-parallel graphs, Shandong Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban, 35 (2000), pp.144–149 (in Chinese).