三角補間の誤差解析†

秦野 和郎††

高速 Fourier 変換 (Fast Fourier Transform, 以下 FFT と書く) なる計算法が多くの分野で使われている．この計算法により計算される量は離散 Fourier 係数 (Fourier 係数の近似値) または三角補間式 (あるいは三角多項式) の値である．FFT が非常に広汎なデータに対して適用される計算法であるにもかかわらず，解析的周期関数の場合を除けば，離散 Fourier 係数や三角補間式の誤差解析は十分には行われていない．FFT は不連続点を持つような周期関数に対しても適用されているのでそのような状況のもとでの誤差解析が必要である．誤差解析とはその計算法の品質保証であり実用上の適用限界を知る上で極めて重要である．この論文ではまず，区分的に十分に滑らかな周期関数 (幾つかの不連続点を持っていてもよい) に対する離散 Fourier 係数の誤差項を導く．その際，“Fourier 係数の漸近展開式” と “Aliasing の式” とを使う．導かれた誤差項は積分表現を含む正確な式である．これを使って次に三角補間式の誤差項を導く．導かれた誤差項は三角補間式の誤差の “閉じた形” である．さらにこれらの結果を使って，十分に滑らかな周期関数に対する離散 Fourier 係数および，三角補間式の誤差限界を導く．得られた結果から三角補間の誤差の性質がわかる．本論文での解析によって，三角補間の打ち切り誤差がどのような成分から成っているかが明白になった．

1. はじめに

三角補間は実用上極めて重要な補間法として多くの分野で使われてきている．特に FFT (Fast Fourier Transform) なる高速算法が開発されて三角補間式の補間係数，すなわち離散 Fourier 係数を効率的に計算できるようになり，三角補間の有用性は大きく向上している．

十分に滑らかな周期 2π の周期関数 (以下ではこれを $f(x)\in P^{m}_{2,\Delta}[0,2\pi]$ と書く)，あるいは両端で急激に零に収束するような関数に対する三角補間の誤差は一般に極めて小さい．そのような関数に対する離散 Fourier 係数は Fourier 係数の極めてよい近似値であり，また，三角補間式は元の関数を極めて精度よく近似する．

しかし，不連続点を持つような周期関数に対する三角補間は好ましくない性質を持っている．そのような関数に対する離散 Fourier 係数は一般に Fourier 係数のよい近似値ではない．また，三角補間式は不連続点の付近で “Gibbs の現象” と呼ばれる好ましくない振動を生ずる．閉区間 $[0,2\pi]$ で定義される十分に滑らかな関数 (両端の関数値が一致するとは限らない) を周期 2π で数直線上に周期的に延長すると得られる関数は一般に不連続点をもつような周期関数となる．したがって閉区間で定義される十分に滑らかな関数に対してさえも，三角補間は一般に好ましくない性質を持つ．

従来，$f(x)\in P^{m}_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する三角補間の誤差についてはいくつかの解析がなされ，若干の結果が知られている[2),3),13)]．しかし，不連続点を持つような周期関数に対する三角補間の誤差解析は全く行われていない．

本論文では，まず区分的に十分に滑らかな周期関数 (以下ではこれを $f(x)\in W^{m}_{2,\Delta}[0,2\pi]$ と書く) に対する離散 Fourier 係数の誤差項を導く．さらにそれを使って $f(x)\in P^{m}_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する離散 Fourier 係数の誤差限界を得る．

次に，$f(x)\in W^{m}_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差項を導く．さらにそれを使って $f(x)\in P^{m}_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差限界を得る．

以上の解析により，$f(x)\in W^{m}_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する三角補間の誤差がどのような成分から構成されているかが明確になる．誤差項を導く過程は構成的であるから得られた結果は三角補間の精度の向上に利用し得ると思われる．

2. 離散 Fourier 係数の誤差

本章では台形則による離散 Fourier 係数の，Fourier 係数に対する誤差を導く．

$$\bar{x}_r=2\pi r/N:\ 0\leq r\leq N. \tag{2.1}$$

を閉区間 $[0,2\pi]$ における $N+1$ 個の等間隔離散点とし，閉区間 $[0,2\pi]$ の分割を

$$\Delta:\ 0=x_0<x_1<\cdots<x_\ell=2\pi. \tag{2.2}$$

† Error Analysis of Trigonometric Interpolation by KAZUO HATANO (Department of Electronics, Faculty of Engineering, Aichi Institute of Technology).

†† 愛知工業大学工学部電子工学科

とする．ここで $x_i: i=0,1,\cdots,\xi$ は任意の実数ではなく

$$Nx_i/2\pi=r_i. \tag{2.3}$$

が N 以下，非負の整数であるような実数とする．また，$\xi\ll N$ であるとする．

m を自然数として

$$\begin{cases} f(x)\in C^m(x_i,x_{i+1}): 0\leqq i\leqq \xi-1. \\ \sum_{i=0}^{\xi-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\{f^{(m+1)}(x)\}^2\,\mathrm{d}\,x<\infty. \end{cases} \tag{2.4}$$

を満たし，$f^{(\nu)}(x_i-)$, $f^{(\nu)}(x_i+): 0\leqq\nu\leqq m,\ 0\leqq i\leqq\xi$ が存在して

$$\begin{cases} f(x_i)=\{f(x_i-)+f(x_i+)\}/2: 0\leqq i\leqq\xi. \\ f^{(\nu)}(0+)=f^{(\nu)}(2\pi+), \\ f^{(\nu)}(0-)=f^{(\nu)}(2\pi-): 0\leqq\nu\leqq m. \end{cases} \tag{2.5}$$

であるような実関数 $f(x)$ の全体を $W^m_{2,A}[0,2\pi]$ とする．さらに，その部分集合として

$$\begin{cases} f(x)\in W^m_{2,A}[0,2\pi]. \\ f(x)\in C^{m-1}(0,2\pi). \\ f^{(\nu)}(2\pi-)=f^{(\nu)}(0+): 0\leqq\nu\leqq m-1. \end{cases} \tag{2.6}$$

であるような実関数 $f(x)$ の全体を $P^m_{2,A}[0,2\pi]$ とする．

$f(x)\in W^m_{2,A}[0,2\pi]$ は区分的に十分に滑らかな周期関数であり，$f(x)\in P^m_{2,A}[0,2\pi]$ は十分に滑らかな周期関数である．

$f(x)\in W^m_{2,A}[0,2\pi]$ は

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{\infty}\{a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\}. \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} a_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos jx\,\mathrm{d}\,x: 0\leqq j. \\ b_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin jx\,\mathrm{d}\,x: 1\leqq j. \end{cases} \tag{2.8}$$

と Fourier 展開される[1]．

$f(x)\in W^m_{2,A}[0,2\pi]$ に対する，台形則による離散 Fourier 係数を

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)=\dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{r=0}^{N-1}f(\bar{x}_r)\cos j\bar{x}_r \\ \quad=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{r=0}^{N-1}\{f(\bar{x}_r-)+f(\bar{x}_r+)\}\cos j\bar{x}_r \\ \quad\quad: 0\leqq j\leqq\left[\dfrac{N}{2}\right]. \\ \bar{v}_j(f)=\dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{r=0}^{N-1}f(\bar{x}_r)\sin j\bar{x}_r \\ \quad=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{r=0}^{N-1}\{f(\bar{x}_r-)+f(\bar{x}_r+)\}\sin j\bar{x}_r \\ \quad\quad: 1\leqq j\leqq\left[\dfrac{N-1}{2}\right].^{*} \end{cases} \tag{2.9}$$

と定義する．上式に式(2.7)を代入し，三角関数についての若干の関係式を使うと，離散 Fourier 係数と Fourier 係数との間の関係，

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)=a_j(f)+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\{a_{kN+j}(f)+a_{kN-j}(f)\}. \\ \bar{v}_j(f)=b_j(f)+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\{b_{kN+j}(f)-b_{kN-j}(f)\}. \end{cases} \tag{2.10}$$

を得ることができる (Aliasing の式)[5]．

さて，Fourier 係数

$$\begin{cases} a_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{i=0}^{\xi-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\cos jx\,\mathrm{d}\,x. \\ b_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{i=0}^{\xi-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\sin jx\,\mathrm{d}\,x. \end{cases} \tag{2.11}$$

に部分積分を反復適用し

$$\begin{cases} \mathrm{cir}_\nu x=-\cos(x-\pi\nu/2). \\ \omega_\nu(f;x)=\{f^{(\nu)}(x-)-f^{(\nu)}(x+)\}/\pi. \end{cases} \tag{2.12}$$

とおくと式(2.8)で与えられる Fourier 係数は

$$\begin{cases} a_j(f)=\displaystyle\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\omega_{\nu-1}(f;x_i)\frac{(-1)^\nu}{j^\nu}\mathrm{cir}_\nu jx_i \\ \quad+\dfrac{(-1)^m}{\pi j^{m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi}f^{(m+1)}(t)\mathrm{cir}_{m+1}jt\,\mathrm{d}\,t: 0\leqq j. \\ b_j(f)=-\displaystyle\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\omega_{\nu-1}(f;x_i)\frac{(-1)^\nu}{j^\nu}\mathrm{cir}_{\nu-1}jx_i \\ \quad-\dfrac{(-1)^m}{\pi j^{m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi}f^{(m+1)}(t)\mathrm{cir}_m jt\,\mathrm{d}\,t: 1\leqq j. \end{cases} \tag{2.13}$$

となる (Fourier 係数の漸近展開式)[10),11)]．上式を式(2.10)右辺の第二項に代入し，

$$\begin{cases} \mathrm{cir}_\nu(kN+j)x_i=\mathrm{cir}_\nu(kN+j)\dfrac{2\pi r_i}{N}=\mathrm{cir}_\nu jx_i. \\ \mathrm{cir}_\nu(kN-j)x_i=\mathrm{cir}_\nu(kN-j)\dfrac{2\pi r_i}{N} \\ \quad=(-1)^\nu\mathrm{cir}_\nu jx_i. \end{cases} \tag{2.14}$$

であることを使い

$$\begin{cases} \bar{\delta}_\nu(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k+x)^\nu}+\frac{(-1)^\nu}{(k-x)^\nu}\right\}. \\ \bar{\alpha}_\nu(t;x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\mathrm{cir}_\nu(k+x)t}{(k+x)^\nu}+\frac{\mathrm{cir}_\nu(k-x)t}{(k-x)^\nu}\right\}. \\ \bar{\beta}_\nu(t;x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\mathrm{cir}_{\nu-1}(k+x)t}{(k+x)^\nu}-\frac{\mathrm{cir}_{\nu-1}(k-x)t}{(k-x)^\nu}\right\}. \end{cases} \tag{2.15}$$

とおくと $f(x)\in W^m_{2,A}[0,2\pi]$ に対する離散 Fourier 係数の誤差は

* $[N/2]$ は Gauss の記号で $N/2$ を越えない最大の整数．

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)-a_j(f) \\ \quad =\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{\omega_{\nu-1}(f\,;\,x_i)}{N^\nu}(-1)^\nu\bar{\delta}_\nu\left(\frac{j}{N}\right)\mathrm{cir}_\nu jx_i \\ \qquad +\frac{(-1)^m}{\pi N^{m+1}}\int_0^{2\pi}\bar{\alpha}_{m+1}\left(Nt\,;\,\frac{j}{N}\right)f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}\,t. \\ \bar{v}_j(f)-b_j(f) \\ \quad =-\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{\omega_{\nu-1}(f\,;\,x_i)}{N^\nu}(-1)^\nu\bar{\delta}_\nu\left(\frac{j}{N}\right)\mathrm{cir}_{\nu-1} jx_i \\ \qquad -\frac{(-1)^m}{\pi N^{m+1}}\int_0^{2\pi}\bar{\beta}_{m+1}\left(Nt\,;\,\frac{j}{N}\right)f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}\,t. \end{cases} \tag{2.16}$$

となることがわかる．この式が本論文における最大の成果であると共に，以下の議論の出発点にもなる．

ここで式(2.15)で与えられる $\bar{\delta}_\nu(x)$ 等についてそのいくつかの性質を述べる．

まず

$$\bar{\delta}_\nu'(x)=-\nu\bar{\delta}_{\nu+1}(x).^{\star} \tag{2.17}$$

すなわち

$$\bar{\delta}_{\nu+1}(x)=-\bar{\delta}_\nu'(x)/\nu. \tag{2.18}$$

である．この式を反復適用すると，

$$\bar{\delta}_\nu(x)=\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\bar{\delta}_1^{(\nu-1)}(x). \tag{2.19}$$

となる．

一方，$\bar{\delta}_1(x)$ は $\pi\cot\pi x-1/x$ の部分分数展開である[4]．したがって $\pi\cot\pi x-1/x$ の級数展開式から $\bar{\delta}_1(x)$ は

$$\bar{\delta}_1(x)=-2\sum_{r=1}^{\infty}\zeta(2r)x^{2r-1}. \tag{2.20}$$

と展開される[4]．ここで

$$\zeta(2r)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2r}}. \tag{2.21}$$

は Riemann の Zeta 関数である[4]．なお，式(2.20)の導出に際して

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{r=0}^{\infty}B_r\frac{t^r}{r!}. \tag{2.22}$$

で定義される Bernoulli 数 B_r と $\zeta(r)$ との間の関係

$$\zeta(2r)=(-1)^{r-1}\frac{(2\pi)^{2r}}{2\cdot(2r)!}B_{2r}. \tag{2.23}$$

を[4]使った．

式(2.19)，(2.20)から $\bar{\delta}_\nu(x)$ は

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{2\nu}(x)=2\sum_{r=\nu}^{\infty}\binom{2r-1}{2\nu-1}\zeta(2r)x^{2r-2\nu}. \\ \bar{\delta}_{2\nu+1}(x)=-2\sum_{r=\nu+1}^{\infty}\binom{2r-1}{2\nu}\zeta(2r)x^{2r-2\nu-1}. \end{cases} \tag{2.24}$$

と級数展開されることがわかる．さらに上式から $(-1)^\nu\bar{\delta}_\nu(x)$ は閉区間 $[0,1/2]$ において単調増加である．また，式(2.15)第一式から

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{2\nu}(0)=2\zeta(2\nu)\fallingdotseq 2. \\ \bar{\delta}_{2\nu}(1/2)=2^{2\nu}+2\zeta(2\nu\,;\,3/2)\fallingdotseq 2^{2\nu}. \\ \bar{\delta}_{2\nu+1}(0)=0. \\ \bar{\delta}_{2\nu+1}(1/2)=-2^{2\nu+1}. \end{cases} \tag{2.25}$$

であることが容易にわかる．ただしここで

$$\zeta(\nu\,;\,x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+x)^\nu}. \tag{2.26}$$

は一般化された Riemann の Zeta 関数である[4]．

さて，式(2.16)から $f(x)\in W_{2,A}^{m}[0,2\pi]$ に対する離散 Fourier 係数の誤差は一般に大きい．N が十分に大きいとき

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)-a_j(f)\fallingdotseq\sum_{i=0}^{\xi-1}\frac{\omega_0(f\,;\,x_i)}{N}\bar{\delta}_1\left(\frac{j}{N}\right)\sin jx_i. \\ \bar{v}_j(f)-b_j(f)\fallingdotseq-\sum_{i=0}^{\xi-1}\frac{\omega_0(f\,;\,x_i)}{N}\bar{\delta}_1\left(\frac{j}{N}\right)\cos jx_i. \end{cases} \tag{2.27}$$

である．$j/N\ll 1/2$ のとき式(2.20)から $\bar{\delta}_1(j/N)$ は j/N に比例する．したがって $j\ll N/2$ に対して離散 Fourier 係数の誤差は j/N^2 に比例することがわかる．

$W_{2,A}^{m}[0,2\pi]$ の部分集合で，特に

$$\begin{cases} f(x)\in W_{2,A}^{m}[0,2\pi]. \\ f(x)\in C^m(0,2\pi). \\ \|f^{(m+1)}\|_\infty<\infty.^{\star} \end{cases} \tag{2.28}$$

をみたす実関数 $f(x)$ の全体を $W_\infty^m[0,2\pi]$ とする．

$f(x)\in W_\infty^m[0,2\pi]$ に対する離散 Fourier 係数の誤差は式(2.16)から

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)-a_j(f) \\ \quad =\sum_{\nu=1}^{[(m+1)/2]}\frac{\omega_{2\nu-1}(f\,;\,0)}{N^{2\nu}}(-1)^{\nu-1}\bar{\delta}_{2\nu}\left(\frac{j}{N}\right) \\ \qquad +\frac{(-1)^m}{\pi N^{m+1}}\int_0^{2\pi}\bar{\alpha}_{m+1}\left(Nt\,;\,\frac{j}{N}\right)f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}\,t. \\ \bar{v}_j(f)-b_j(f) \\ \quad =\sum_{\nu=0}^{[m/2]}\frac{\omega_{2\nu}(f\,;\,0)}{N^{2\nu+1}}(-1)^{\nu-1}\bar{\delta}_{2\nu+1}\left(\frac{j}{N}\right) \\ \qquad -\frac{(-1)^m}{\pi N^{m+1}}\int_0^{2\pi}\bar{\beta}_{m+1}\left(Nt\,;\,\frac{j}{N}\right)f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}\,t. \end{cases} \tag{2.29}$$

となる．$j/N\ll 1/2$ のとき $\bar{\delta}_2(j/N)$ は式(2.24)からほぼ一定であることがわかる．したがって N が十分に大きいとき $j\ll N/2$ に対する離散 Fourier 係数，$\bar{u}_j(f), \bar{v}_j(f)$ の誤差はそれぞれ $1/N^2, j/N^2$ に比例する．

次に，式(2.16)から $f(x)\in P_{2,A}^{m}[0,2\pi]$ に対する離散

---

* 福井大学(工)情報，佐藤義雄助手の御教示による．

* $\|f\|_\infty=\max_{0\le i\le\xi-1}\left(\sup_{x\in(x_i,x_{i+1})}|f(x)|\right)$.

散 Fourier 係数の誤差は,

$$
\begin{cases}
\bar{u}_j(f)-a_j(f) \\
\quad =\dfrac{(-1)^{m+1}}{N^{m+1}}\bar{\delta}_{m+1}\left(\dfrac{j}{N}\right)\displaystyle\sum_{i=0}^{\xi-1}\omega_m(f;\ x_i)\cdot \mathrm{cir}_{m+1}jx_i \\
\quad\quad +\dfrac{(-1)^m}{\pi N^{m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi}\bar{\alpha}_{m+1}\left(Nt;\ \dfrac{j}{N}\right)f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t. \\
\bar{v}_j(f)-b_j(f) \\
\quad =-\dfrac{(-1)^{m+1}}{N^{m+1}}\bar{\delta}_{m+1}\left(\dfrac{j}{N}\right)\displaystyle\sum_{i=0}^{\xi-1}\omega_m(f;\ x_i)\cdot \mathrm{cir}_m jx_i \\
\quad\quad -\dfrac{(-1)^m}{\pi N^{m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi}\bar{\beta}_{m+1}\left(Nt;\ \dfrac{j}{N}\right)f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t.
\end{cases}
\tag{2.30}
$$

となる．上式において

$$
\begin{cases}
|\omega_m(f;\ x_i)|\leqq(2/\pi)\|f^{(m)}\|_\infty. \\
|\mathrm{cir}_\nu jx|\leqq 1.
\end{cases}
\tag{2.31}
$$

であることを使い右辺第二項に Schwarz の不等式を適用すると, $f(x)\in P^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する離散 Fourier 係数の誤差限界,

$$
\begin{cases}
|\bar{u}_j(f)-a_j(f)|\leqq\dfrac{1}{N^{m+1}}\left\{\dfrac{2\xi}{\pi}\left|\bar{\delta}_{m+1}\left(\dfrac{j}{N}\right)\right|\cdot\|f^{(m)}\|_\infty\right. \\
\quad\quad \left.+\left\{\dfrac{1}{\pi}\bar{\delta}_{2m+2}\left(\dfrac{j}{N}\right)\right\}^{1/2}\|f^{(m+1)}\|_2\right\}. \\
|\bar{v}_j(f)-b_j(f)|\leqq\dfrac{1}{N^{m+1}}\left\{\dfrac{2\xi}{\pi}\left|\bar{\delta}_{m+1}\left(\dfrac{j}{N}\right)\right|\cdot\|f^{(m)}\|_\infty\right. \\
\quad\quad \left.+\left\{\dfrac{1}{\pi}\bar{\delta}_{2m+2}\left(\dfrac{j}{N}\right)\right\}^{1/2}\|f^{(m+1)}\|_2\right\}.^{*}
\end{cases}
\tag{2.32}
$$

を得ることができる．すなわち $f(x)\in P^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する離散 Fourier 係数の誤差は $O(N^{-m-1})$ 程度である．また, j の増大につれて誤差は一般に大きくなることがわかる．ただし, この式の導出に際して式(2.15)から得られる関係式

$$
\begin{cases}
\|\bar{\alpha}_{m+1}(Nt;\ j/N)\|_2=\left\{\displaystyle\int_0^{2\pi}|\bar{\alpha}_{m+1}(Nt;\ j/N)|^2\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \\
\quad =\|\bar{\beta}_{m+1}(Nt;\ j/N)\|_2=\{\pi\bar{\delta}_{2m+2}(j/N)\}^{1/2}.
\end{cases}
\tag{2.33}
$$

を使った．

次に, $P^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ の部分集合で

$$
\begin{cases}
f(x)\in P^m_{2,\Delta}[0,2\pi]. \\
f(x)\in C^m(0,2\pi). \\
\|f^{(m+1)}\|_\infty<\infty.
\end{cases}
\tag{2.34}
$$

をみたす実関数 $f(x)$ の全体を $P^m_\infty[0,2\pi]$ とする．

式(2.30)において $\xi=1$ とおき,

$$
\omega_m(f;\ 0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t.
\tag{2.35}
$$

を使うと, $f(x)\in P^m_\infty[0,2\pi]$ に対する離散 Fourier 係数の誤差は,

$$
\begin{cases}
\bar{u}_j(f)-a_j(f) \\
\quad =\dfrac{(-1)^m}{\pi N^{m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left\{-\bar{\delta}_{m+1}\left(\dfrac{j}{N}\right)\mathrm{cir}_{m+1}0\right. \\
\quad\quad \left.+\bar{\alpha}_{m+1}\left(Nt;\ \dfrac{j}{N}\right)\right\}\cdot f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t. \\
\bar{v}_j(f)-b_j(f) \\
\quad =\dfrac{(-1)^m}{\pi N^{m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left\{\bar{\delta}_{m+1}\left(\dfrac{j}{N}\right)\mathrm{cir}_m 0\right. \\
\quad\quad \left.-\bar{\beta}_{m+1}\left(Nt;\ \dfrac{j}{N}\right)\right\}\cdot f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t.
\end{cases}
\tag{2.36}
$$

となる．上式に Hölder の不等式を適用すると, $f(x)\in P^{2m-1}_\infty[0,2\pi]$ に対して

$$
\begin{cases}
|\bar{u}_j(f)-a_j(f)|\leqq\dfrac{2}{N^{2m}}\bar{\delta}_{2m}\left(\dfrac{j}{N}\right)\|f^{(2m)}\|_\infty. \\
|\bar{v}_j(f)-b_j(f)|\leqq\dfrac{4}{\pi N^{2m}}\bar{\delta}_{2m}\left(\dfrac{j}{N}\right)\|f^{(2m)}\|_\infty.
\end{cases}
\tag{2.37}
$$

$f(x)\in P^{2m}_\infty[0,2\pi]$ に対して

$$
\begin{cases}
|\bar{u}_j(f)-a_j(f)|\leqq\dfrac{4}{\pi N^{2m+1}}\gamma_{2m+1}\left(\dfrac{j}{N}\right)\|f^{(2m+1)}\|_\infty. \\
|\bar{v}_j(f)-b_j(f)|\leqq\dfrac{2}{N^{2m+1}}\gamma_{2m+1}\left(\dfrac{j}{N}\right)\|f^{(2m+1)}\|_\infty.
\end{cases}
\tag{2.38}
$$

を得ることができる．ここで

$$
\gamma_\nu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k+x)^\nu}+\frac{1}{(k-x)^\nu}\right\}.
\tag{2.39}
$$

である．

3. 三角補間式の誤差

前章の結果を使って本章ではまず $f(x)\in W^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差を導く．

次に, $f(x)\in P^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差限界を導く．

Nが偶数であるか奇数であるかによって扱いが若干異なる．ここでは, N が偶数のときだけを考察するが, N が奇数のときも同じようにして解析できる．

以下では記述の容易のために N と

$$
n=N/2.
\tag{3.1}
$$

とを併用して使う．

さて, $f(x)\in W^m_{2,\Delta}[0,2\pi]$ に対して, $x=\bar{x}_r:0\leqq r\leqq N$ で $f(\bar{x}_r)$ に一致する三角多項式, すなわち三角補間式, $\bar{T}_n(f;\ x)$ は, 式(2.9)で与えられる離散 Fourier 係数を使って

---

* $\|f\|_2=\left\{\displaystyle\sum_{i=0}^{\xi-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}$.

$$\overline{T}_n(f;x)=\frac{1}{2}\bar{u}_0(f)+\sum_{j=1}^{n-1}\{\bar{u}_j(f)\cos jx+\bar{v}_j(f)\sin jx\}+\frac{1}{2}\bar{u}_n(f)\cos nx. \tag{3.2}$$

と表現される[5]. 上で定義される三角補間式に関して

$$\overline{T}_n(f;\bar{x}_r)=f(\bar{x}_r):\ 0\leqq r\leqq N. \tag{3.3}$$

であるが, 一般に

$$\begin{cases}\overline{T}_n(f;x_i+)=f(x_i+),\\ \overline{T}_n(f;x_i-)=f(x_i-):\ 0\leqq i\leqq \xi.\end{cases} \tag{3.4}$$

は成立しない. すなわち不連続点においては, 三角補間式はその点における関数値を再現するが右関数値, 左関数値を再現しない.

さて, 式(2.13), (2.16)の第一式から

$$\begin{aligned}\bar{u}_n(f)=&\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\omega_{\nu-1}(f;x_i)\frac{(-1)^\nu}{N^\nu}\Big\{2^\nu+\bar{\delta}_\nu\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\}\cdot\mathrm{cir}_\nu nx_i\\&+\frac{(-1)^m}{\pi N^{m+1}}\int_0^{2\pi}\Big\{2^{m+1}\mathrm{cir}_{m+1}nt+\bar{\alpha}_{m+1}\Big(2nt;\frac{1}{2}\Big)\Big\}\cdot f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.5}$$

である. 上式および, 式(2.16)から得られる $\bar{u}_j(f)$, $\bar{v}_j(f)$ を式(3.2)に代入すると, 式(3.2)は

$$\begin{aligned}&\overline{T}_n(f;x)\\&=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{n-1}\{a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\}\\&+\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\omega_{\nu-1}(f;x_i)\frac{(-1)^\nu}{N^\nu}\Big[\frac{1}{2}\bar{\delta}_\nu(0)\mathrm{cir}_\nu 0\\&+\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\delta}_\nu\Big(\frac{j}{N}\Big)\{\mathrm{cir}_\nu jx_i\cos jx-\mathrm{cir}_{\nu-1}jx_i\sin jx\}\\&+\frac{1}{2}\Big\{2^\nu+\bar{\delta}_\nu\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\}\mathrm{cir}_\nu nx_i\cos nx\Big]\\&+\frac{(-1)^m}{\pi N^{m+1}}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{2}\bar{\alpha}_{m+1}(Nt;0)\\&+\sum_{j=1}^{n-1}\Big\{\bar{\alpha}_{m+1}\Big(Nt;\frac{j}{N}\Big)\cos jx-\bar{\beta}_{m+1}\Big(Nt;\frac{j}{N}\Big)\sin jx\Big\}\\&+\frac{1}{2}\Big\{2^{m+1}\mathrm{cir}_{m+1}nt+\bar{\alpha}_{m+1}\Big(Nt;\frac{1}{2}\Big)\Big\}\cos nx\Big]\\&\cdot f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.6}$$

と書き改められる. 上式において,

$$T_n(f;x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{n-1}\{a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\}. \tag{3.7}$$

は $f(x)\in W_{2,A}^m[0,2\pi]$ に対する打ち切り Fourier 級数である.

次に式(3.6)において

$$\begin{cases}\bar{\delta}_{2\nu+1}(0)=0.\\(-1)^\nu(\mathrm{cir}_\nu jx_i\cos jx-\mathrm{cir}_{\nu-1}jx_i\sin jx)\\\qquad=\mathrm{cir}_\nu j(x-x_i).\\2^{2\nu+1}+\bar{\delta}_{2\nu+1}(1/2)=0.\end{cases} \tag{3.8}$$

である. また,

$$\mathrm{cir}_{2\nu-1}nx_i\sin nx=(-1)^\nu\sin n\frac{2\pi r_i}{2n}\sin nx=0.$$

であるから

$$\begin{aligned}&\mathrm{cir}_{2\nu}nx_i\cos nx\\&\quad=\mathrm{cir}_{2\nu}nx_i\cos nx-\mathrm{cir}_{2\nu-1}nx_i\sin nx\\&\quad=\mathrm{cir}_{2\nu}n(x-x_i).\end{aligned} \tag{3.9}$$

となる. 式(3.8), (3.9)を式(3.6)に代入すると, 式(3.6)の右辺第三項は

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{\omega_{\nu-1}(f;x_i)}{N^\nu}\Big[\frac{1}{2}\bar{\delta}_\nu(0)\mathrm{cir}_\nu 0\\&\quad+\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\delta}_\nu\Big(\frac{j}{N}\Big)\mathrm{cir}_\nu j(x-x_i)\\&\quad+\frac{1}{2}\Big\{2^\nu+\bar{\delta}_\nu\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\}\mathrm{cir}_\nu n(x-x_i)\Big].\end{aligned} \tag{3.10}$$

と書き改められる.

さて

$$\begin{aligned}f(x)-\overline{T}_n(f;x)=&\{f(x)-T_n(f;x)\}\\&+\{T_n(f;x)-\overline{T}_n(f;x)\}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

である. すなわち三角補間式の誤差は打ち切り Fourier 級数の誤差と, 打ち切り Fourier 級数に対する三角補間式の誤差との和として与えられる.

$f(x)\in W_{2,A}^m[0,2\pi]$ に対する打ち切り Fourier 級数の誤差は文献 11) によれば

$$\begin{aligned}&f(x)-T_n(f;x)\\&\quad=\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\omega_{\nu-1}(f;x_i)\tilde{q}_\nu(x-x_i;n)\\&\quad\quad-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(m+1)}(t)\tilde{q}_{m+1}(x-t;n)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.12}$$

で与えられる. ここで

$$\begin{aligned}\tilde{q}_\nu(x;n)&=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^\nu}\mathrm{cir}_\nu jx\\&=p_\nu(x)-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^\nu}\mathrm{cir}_\nu jx.\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{cases}p_1(x)=\begin{cases}(x-\pi)/2:\ x\in(0,2\pi).\\0\qquad\qquad:\ x=0,2\pi.\end{cases}\\[2mm]p_\nu(x)=\dfrac{(2\pi)^\nu}{2\cdot\nu!}B_\nu\Big(\dfrac{x}{2\pi}\Big):\ \nu\geqq 2.\end{cases} \tag{3.14}$$

で，$B_\nu(x)$ は

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}B_\nu(x)\frac{t^\nu}{\nu!}:\ |t|<2\pi. \tag{3.15}$$

で定義される ν 次の Bernoulli 多項式である[4]．

次に式(3.11)の右辺第二項は式(3.6)右辺の第三項，四項に負号を付けたものになる．

以上から

$$\begin{cases}\bar{Q}_\nu(x\,;\,n)=\tilde{q}_\nu(x\,;\,n)-\dfrac{1}{N^\nu}\Big[\dfrac{1}{2}\bar{\delta}_\nu(0)\mathrm{cir}_\nu 0\\ \quad+\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\delta}_\nu\Big(\frac{j}{N}\Big)\mathrm{cir}_\nu jx\\ \quad+\dfrac{1}{2}\Big\{2^\nu+\bar{\delta}_\nu\Big(\dfrac{1}{2}\Big)\Big\}\mathrm{cir}_\nu nx\Big].\\ \bar{G}_\nu(x,t\,;\,n)\\ \quad=\tilde{q}_\nu(x-t\,;\,n)+\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{N^\nu}\Big[\dfrac{1}{2}\bar{\alpha}_\nu(Nt\,;\,0)\\ \quad+\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\Big\{\bar{\alpha}_\nu\Big(Nt\,;\,\frac{j}{N}\Big)\cos jx\\ \quad-\bar{\beta}_\nu\Big(Nt\,;\,\dfrac{j}{N}\Big)\sin jx\Big\}\\ \quad+\dfrac{1}{2}\Big\{2^\nu\mathrm{cir}_\nu nt+\bar{\alpha}_\nu\Big(Nt\,;\,\dfrac{1}{2}\Big)\Big\}\cos nx\Big].\end{cases} \tag{3.16}$$

とおくと $f(x)\in W^{m}_{2,\xi}[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差は

$$\begin{aligned}f(x)-\bar{T}_n(f\,;\,x)&=\sum_{i=0}^{\xi-1}\sum_{\nu=1}^{m+1}\omega_{\nu-1}(f\,;\,x_i)\bar{Q}_\nu(x-x_i\,;\,n)\\&-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(m+1)}(t)\bar{G}_{m+1}(x,t\,;\,n)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.17}$$

と簡潔に表現されることがわかる．この式は本論文で得られた第二に重要な成果であり，これから三角補間式に関しての多くの性質が導かれる．

次に式(3.16)で与えられる $\bar{Q}_\nu(x\,;\,n)$ 等について，そのいくつかの性質を述べる．

式(3.14)で与えられる $p_\nu(x)$ に関して

$$\begin{cases}p_\nu^{(k)}(0+)=p_\nu^{(k)}(2\pi-):\ k=0,1,\cdots,\nu-2,\nu,\cdots\\ \quad-p_\nu^{(\nu-1)}(0+)=p_\nu^{(\nu-1)}(2\pi-)=\pi/2.\end{cases} \tag{3.18}$$

が成り立つ[11]．したがって，

$$\omega_{k-1}(p_\nu\,;\,0)=\begin{cases}1:\ k=\nu.\\0:\ k\neq\nu.\end{cases} \tag{3.19}$$

である．また，$\nu<m+1$ に対して

$$p_\nu^{(m+1)}(x)=0:\ x\in(0,2\pi). \tag{3.20}$$

である．式(3.17)で $f(x)=p_\nu(x)$ とおいて，上の性質を使うと，

$$p_\nu(x)-\bar{T}_n(p_\nu\,;\,x)=\bar{Q}_\nu(x\,;\,n). \tag{3.21}$$

を得ることができる．すなわち，$\bar{Q}_\nu(x\,;\,n)$ は ν 次の多項式，$p_\nu(x)$ に対する三角補間式の誤差である．このことから，また，

$$\bar{Q}_\nu(\bar{x}_r\,;\,n)=0:\ 0\leqq r\leqq N. \tag{3.22}$$

が成り立つ．

式(3.16)で与えられる $\bar{G}_\nu(x,t\,;\,n)$ についても

$$\bar{G}_\nu(\bar{x}_r,t\,;\,n)=0:\ 0\leqq r\leqq N,\ t\in(0,2\pi). \tag{3.23}$$

が成立する（証明は付録参照）．

次に，後の参照のために $\|\bar{Q}_\nu(x\,;\,n)\|_\infty$ などを評価する．

式(3.13)から $\nu\geqq2$ に対して

$$\|\tilde{q}_\nu(x\,;\,n)\|_\infty\leqq\zeta(\nu\,;\,n). \tag{3.24}$$

である．これを使って，式(3.16)から

$$\begin{aligned}\|\bar{Q}_\nu(x\,;\,n)\|_\infty\leqq\zeta(\nu\,;\,n)+\frac{(-1)^\nu}{N^\nu}\Big[\frac{1}{2}\bar{\delta}_\nu(0)\\+\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\delta}_\nu\Big(\frac{j}{N}\Big)+\frac{1}{2}\Big\{2^\nu+\bar{\delta}_\nu\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\}\Big].\end{aligned} \tag{3.25}$$

となる．一方，$(-1)^\nu\bar{\delta}_\nu(x)$ が閉区間 $[0,1/2]$ において単調増加であること，および，式(2.17)から

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^\nu}{N}\sum_{j=0}^{n-1}\bar{\delta}_\nu\Big(\frac{j}{N}\Big)&\leqq(-1)^\nu\int_0^{1/2}\bar{\delta}_\nu(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu-1}\Big\{\bar{\delta}_{\nu-1}\Big(\frac{1}{2}\Big)-\bar{\delta}_{\nu-1}(0)\Big\}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

である．このことと，

$$\zeta(\nu\,;\,n)=\frac{1}{n^{\nu-1}}\Big(\frac{1}{\nu-1}+\frac{1}{2n}+O(n^{-2})\Big). \tag{3.27}$$

であることを[4]使うと，式(3.25)は

$$\begin{cases}\|\bar{Q}_\nu(x\,;\,n)\|_\infty\leqq\bar{\rho}_\nu/n^{\nu-1}.\\ \bar{\rho}_\nu=\dfrac{1}{\nu-1}\Big[1+\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{2^{\nu-1}}\{\bar{\delta}_{\nu-1}(1/2)-\bar{\delta}_{\nu-1}(0)\}\Big]\\ \quad+\dfrac{1}{N}\Big[1+\dfrac{(-1)^\nu}{2^\nu}\{2^\nu+\bar{\delta}_\nu(1/2)-\bar{\delta}_\nu(0)\}\Big]\\ \quad+O(N^{-2}).\end{cases} \tag{3.28}$$

となる．上式から $\|\bar{Q}_\nu(x\,;\,n)\|_\infty$ は $O(1/n^{\nu-1})$ で減少することがわかる．また，式(2.25)から

$$\bar{\rho}_\nu\fallingdotseq2/(\nu-1). \tag{3.29}$$

である．

次に，

$$\|\bar{G}_\nu(x,t\,;\,n)\|_2=\Big\{\int_0^{2\pi}|\bar{G}_\nu(x,t\,;\,n)|^2\mathrm{d}t\Big\}^{1/2}. \tag{3.30}$$

および

$$\begin{aligned}&\|\bar{Q}_\nu(x\,;\,n)-\bar{G}_\nu(x,t\,;\,n)\|_1\\&=\int_0^{2\pi}|\bar{Q}_\nu(x\,;\,n)-\bar{G}_\nu(x,t\,;\,n)|\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.31}$$

も同じようにして評価できる．すなわち

$$\|\bar{G}_\nu(x,t;n)\|_2\leqq\sqrt{\pi}\Big[\{\zeta(2\nu;n)\}^{1/2}+\frac{1}{N^\nu}\Big[\frac{1}{2}\{\bar{\delta}_{2\nu}(0)\}^{1/2}+\sum_{j=1}^{n-1}\Big\{\bar{\delta}_{2\nu}\Big(\frac{j}{N}\Big)\Big\}^{1/2}+\frac{1}{2}\Big[2^\nu+\Big\{\bar{\delta}_{2\nu}\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\}^{1/2}\Big]\Big]\Big]. \tag{3.32}$$

であり，$\nu\geqq2$ に対して

$$\|\bar{Q}_\nu(x;n)-\bar{G}_\nu(x,t;n)\|_1\leqq2\sqrt{\pi^2+4}\Big\{\zeta(\nu;n)+\frac{1}{N^\nu}\Big[\frac{1}{2}\gamma_\nu(0)+\sum_{j=1}^{n-1}\gamma_\nu\Big(\frac{j}{N}\Big)+\frac{1}{2}\Big\{2^\nu+\gamma_\nu\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\}\Big]\Big\}. \tag{3.33}$$

である．$\|\bar{Q}_\nu(x;n)\|_\infty$ におけると同じように

$$\|\bar{G}_\nu(x,t;n)\|_2\leqq\sqrt{\pi}\,\bar{\lambda}_\nu/n^{\nu-1}. \tag{3.34}$$

と書けば

$$\bar{\lambda}_\nu\doteqdot2/(\nu-1). \tag{3.35}$$

を得ることができて

$$\|\bar{Q}_\nu(x;n)-\bar{G}_\nu(x,t;n)\|_1\leqq2\sqrt{\pi^2+4}\,\bar{\sigma}_\nu/n^{\nu-1}. \tag{3.36}$$

と書けば

$$\bar{\sigma}_\nu\doteqdot2/(\nu-1). \tag{3.37}$$

を得ることができる．

さて，式(3.17)および式(3.16)から $f(x)\in W^m_{2,\xi}[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差は一般に大きい．特に，式(3.16)第一式から $\bar{Q}_1(x;n)$ は

$$-\bar{Q}_1(0+;n)=\bar{Q}_1(2\pi-;n)=\pi/2. \tag{3.38}$$

でありその最大絶対値が n に依存せず一定である．したがって $f(x)\in W^m_{2,\xi}[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差の最大絶対値は，Nをどんなに大きくしても，ある一定値以下にはならない．

次に，式(3.17)から $f(x)\in P^m_{2,\xi}[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差は，

$$f(x)-\bar{T}_n(f;x)=\sum_{i=0}^{\xi-1}\omega_m(f;x_i)\bar{Q}_{m+1}(x-x_i;n)-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(m+1)}(t)\bar{G}_{m+1}(x,t;n)\mathrm{d}t. \tag{3.39}$$

である．上式右辺の第二項に Schwarz の不等式を適用し式(3,28)，(3.34)，(2.31)等を使うと $f(x)\in P^m_{2,\xi}[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差限界は

$$|f(x)-\bar{T}_n(f;x)|\leqq\frac{2\xi}{\pi}\|f^{(m)}\|_\infty\frac{\bar{\rho}_{m+1}}{n^m}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\|f^{(m+1)}\|_2\frac{\bar{\lambda}_{m+1}}{n^m}=\frac{1}{n^m}\Big\{\frac{2\xi}{\pi}\bar{\rho}_{m+1}\|f^{(m)}\|_\infty+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\bar{\lambda}_{m+1}\|f^{(m+1)}\|_2\Big\}. \tag{3.40}$$

で与えられることがわかる．この式から $f(x)\in P^m_{2,\xi}[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差は $O(n^{-m})$ で減少する．

$f(x)\in P^m_\infty[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差は，式(3.17)および(2.35)から

$$f(x)-\bar{T}_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(m+1)}(t)\{\bar{Q}_{m+1}(x;n)-\bar{G}_{m+1}(x,t;n)\}\mathrm{d}t. \tag{3.41}$$

である．この式に Hölder の不等式を適用すると $f(x)\in P^m_\infty[0,2\pi]$ に対する三角補間式の誤差限界

$$|f(x)-\bar{T}_n(f;x)|\leqq\frac{1}{n^m}\cdot\frac{2\sqrt{\pi^2+4}}{\pi}\bar{\sigma}_{m+1}\|f^{(m+1)}\|_\infty. \tag{3.42}$$

を得ることができる．

4. おわりに

三角補間は多くの分野でよく使われている．同時にその欠陥もよく知られており，それについて多くの文献でいろいろな解釈がなされている．どの分野でも離散 Fourier 係数は，Fourier 係数の近似値として用いられている．しばしば，台形則で与えられる離散 Fourier 係数の誤差が大きいことから，Filon の公式[4]などが使われることもある．しかし，そのような方法は計算が面倒な割には大幅な精度の向上を望めない．

Fourier 係数を近似的に計算する手法の一つに“MIPS 法”[6),8)~10)]がある．この方法の出発点は本論文の議論の出発点と極めてよく似ている．“MIPS 法”の出発点は“Fourier 係数の漸近展開式”と“Poisson の総和公式”である．しかし，この二つの式を組み合わせて得られた方法はかなり，扱いにくいものである．一方，本論文の議論の出発点は“Fourier 係数の漸近展開式”と“Aliasing の式”である．この出発点のわずかな違いから，本論文では見透しのよい式を得ることができたし，それを使って三角補間式の誤差を導くことができたのである．なお，三角補間式の誤差の導出に当たっては“打ち切り Fourier 級数の誤差を与える式”[11)]が大きな貢献をしている．

これまで三角補間式の誤差解析は十分にはなされていなかったし[2),3),13)]，誤差の“閉じた形”を導くことはできない[7)]とされてきた．本論文でそれが導かれた意義は大きいと思われる．なお，文献 13) には p 回連続微分可能な周期関数に対する離散 Fourier 係数の，比較的精密な誤差限界が与えられている．しかし，本

論文で与えられた結果は同一の条件で比較してもより精密である.

本論文での解析により，三角補間の誤差が“絶対値の大きい計算可能な項”と“絶対値の小さい一般には計算不可能な項”との和から成っていることがわかった．したがって，次になすべきことは“絶対値の大きい計算可能な項”を計算し三角補間の誤差を補正して一つの高精度な補間公式を作ることである．どのようにして計算法を構成すべきかについて今後検討し報告したいと考えている.

謝辞 ご指導いただいた中部大学，二宮市三教授[12]，原稿に目を通し適切な御指摘をいただいた名古屋大学，鳥居達生教授，議論していただいた中京大学，秦野甯世教授[12]に深く感謝します.

参 考 文 献

1) 藤田 宏：解析入門V，岩波講座基礎数学 解析学(I)(ii)，p. 242，岩波書店，東京 (1981).

2) Ciarlet, P. G., Schultz, M. H. and Varga, R. S.: Numerical Methods of High-Order Accuracy for Nonlinear Boundary Value Problems IV. Periodic Boundary Conditions, *Numer. Math.*, Vol. 12, pp. 266-279 (1968).

3) Bube, K. P.: C^m Convergence of Trigonometric Interpolants, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 15, No. 6, pp. 1258-1268 (1978).

4) Abramowitz, M. and Stegun, I. (ed.): *Handbook of Mathematical Functions*, 10-th ed., p. 1046, Dover Publication Inc., New York (1972).

5) Hamming, R. W.: *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, second ed., p. 721, McGraw-Hill, Kogakusha (1973).

6) Davis, P. F. and Rabinowitz, P.: *Methods of Numerical Integration*, second ed., p. 612, Academic Press, Inc., (1984). (第一版には邦訳がある．森 正武訳：計算機による数値積分法，p. 550，科学技術出版社，東京 (1980)).

7) Ralston, A. and Rabinowitz, P.: *A First Course in Numerical Analysis*, second ed., p. 556, McGraw-Hill (1978). (邦訳がある．戸田英雄，小野令美：電子計算機のための数値解析の理論と応用，〈上〉，〈下〉，ブレイン図書出版，東京 (1986)).

8) Lyness, J. N.: The Calculation of Fourier Coefficients, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 4, No. 2, pp. 301-315 (1967).

9) Lyness, J. N.: The Calculation of Fourier Coefficients by the Möbius Inversion of the Poisson Summation Formula, Part I. Functions whose Early Derivatives are Continuous, *Math. Comp.*, Vol. 24, pp. 101-135 (1970).

10) Lyness, J. N.: The Calculation of Fourier Coefficients by the Möbius Inversion of the Poisson Summation Formula, Part II. Piecewise Continuous Functions and with Poles near the Interval (0, 1), *Math. Comp.*, Vol. 25, No. 113, pp. 59-78 (1971).

11) 秦野和郎，秦野甯世，二宮市三：複合多項式による関数近似，情報処理学会論文誌，Vol. 23, No. 6, pp. 617-624 (1982).

12) 秦野和郎，秦野甯世，二宮市三：三角補間の誤差解析，第 25 回情報処理学会全国大会論文集，3 L-10 (1982).

13) Urabe, M. and Reiter, A.: Numerical Computation of Nonlinear Forced Oscillations by Galerkin's Procedure, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 14, No. 1, pp. 107-140 (1966).

付録 式(3.23)の証明

まず，式(3.13)から

$$\tilde{q}_\nu(\bar{x}_r-t\,;\,n)=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^\nu}\mathrm{cir}_\nu j(\bar{x}_r-t). \qquad (\mathrm{A.\ 1})$$

である．上式における $j=n, n+1, \cdots$ を

$$\begin{cases} j=2kn\,;\ k=1,2,\cdots \\ j=2kn-s,\,2kn+s\,;\ k=1,2,\cdots,1\leqq s\leqq n-1 \\ j=2kn+n\,;\ k=0,1,\cdots. \end{cases} \qquad (\mathrm{A.\ 2})$$

と三通りに分けて各部分和を計算する.

第一の部分和

$$S_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(kN)^\nu}\mathrm{cir}_\nu(kN)(\bar{x}_r-t). \qquad (\mathrm{A.\ 3})$$

に式(3.8)第二式を適用し，$\bar{x}_r=2\pi r/N$ であることを使うと，

$$S_1=\frac{(-1)^\nu}{N^\nu}\cdot\frac{1}{2}\bar{\alpha}_\nu(Nt\,;\,0). \qquad (\mathrm{A.\ 4})$$

を容易に導くことができる.

同じようにして第二の部分和は

$$\begin{aligned} S_2&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{(kN-j)^\nu}\mathrm{cir}_\nu(kN-j)(\bar{x}_r-t)\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{(kN+j)^\nu}\mathrm{cir}_\nu(kN+j)(\bar{x}_r-t)\right\}\\ &=\frac{(-1)^\nu}{N^\nu}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{\bar{\alpha}_\nu\left(Nt\,;\,\frac{j}{N}\right)\cos j\bar{x}_r\right.\\ &\qquad\left.-\bar{\beta}_\nu\left(Nt\,;\,\frac{j}{N}\right)\sin j\bar{x}_r\right\}. \end{aligned} \qquad (\mathrm{A.\ 5})$$

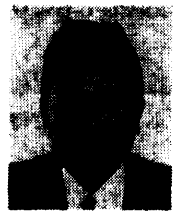
となり，第三の部分和は，

$$S_3=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(kN+n)^\nu}\mathrm{cir}_\nu(kN+n)(\bar{x}_r-t)$$

$$=\frac{(-1)^{\nu}}{N^{\nu}}\cdot\frac{1}{2}\left\{2^{\nu}\mathrm{cir}_{\nu}\,nt+\bar{\alpha}_{\nu}\left(Nt\,;\,\frac{1}{2}\right)\right\}\cos n\bar{x}_{r}. \tag{A. 6}$$

となる．これらを式(3.16)第二式に適用すると，式(3.23)を得ることができる．

(昭和 63 年 6 月 29 日受付)
(昭和 63 年 11 月 14 日採録)



秦野 和郎（正会員）

昭和 16 年生．昭和 39 年名古屋大学工学部電気学科卒業．(株)日立製作所を経て昭和 43 年名古屋大学大学院工学研究科修士課程電気工学専攻課程修了．名古屋大学大型計算機センター，福井大学工学部情報工学科を経て現在，愛知工業大学電子工学科教授．工学博士．数値計算に興味を持っている．電気学会，電子情報通信学会各会員．