

ROW におけるヤコビ行列の誤差の影響†

森山 貴志** 三井 斌友***

常微分方程式 stiff 問題は、通常の数值解法によったのでは、精度・安定性の両者を満足させることが困難である。stiff 問題向きの数值解法は、いくつか提案されているが、どれも直接的あるいは間接的にヤコビ行列の計算を必要とする。ROW 法は、数值積分公式の中に直接ヤコビ行列を含んでいる。ルンゲ・クッタ法に似た方法である。これは計算の手間も小さく、安定性も良いが、ヤコビ行列は解析的に正確なものが必要と考えられる。そのことを実証する意味で、著者はヤコビ行列を数值微分で近似した場合、その誤差が近似解に与える影響を解析し、さらに数值実験も行った。その結果、ROW 法では、精度・安定性の両面でヤコビ行列が正確でなければならないことが導かれた。数式微分を少ない手間で実現する方法として、伊理らの「高速微分法」が知られているので、これを行う前処理系を C 言語で開発し、ROW 法の FORTRAN プログラムと併用したところ、前処理系の処理時間は短く、かつヤコビ行列計算時間を数值微分より短縮し、ROW 法の理論的精度を達成することができた。このような方向で、非線型微分方程式の stiff 問題への ROW 法の有効性が高められると考えられる。

1. はじめに

常微分方程式初期値問題を離散変数法で解く場合、数値的に扱いが困難な stiff 問題と言われるクラスがある。実は、stiff 問題は応用上多く現れているので、stiff 問題向きの数值解法を考えることは、実用上重要である。

stiff 問題の数值解法は直接的・間接的に、関数のヤコビ行列を必要とするので、本論ではその誤差の影響と、ヤコビ行列の計算法について著者の考察の結果を述べる。

まず stiff 問題とその数値的な困難さについて述べ、次に stiff 問題のための数值解の一つである ROW 法について説明する。そして ROW 法でのヤコビ行列計算は、従来の数值微分による方法では欠点があり、ROW 法が完全に機能していないことを示し、伊理らによる「高速微分法」をヤコビ行列の計算に使うことを提案する。最後に、C 言語による高速微分法の前処理系と、FORTRAN プログラムによる ROW 法とを結合した数值実験の結果を示す。

2. stiff 問題

常微分方程式の離散変数法の安定性を調べるため、スカラーのテスト問題 $y' = \lambda y$ ($\text{Re } \lambda < 0$) にそれを適用する。そして、固定したステップ幅 h で解いて、離散

解 y_n が $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ を満たすとき、絶対安定という。

これは λ と h に依存するから、 $z = \lambda h$ を変動させ、絶対安定になる複素平面での z の領域を、その解法の絶対安定領域という。陽的公式では、絶対安定領域は左半複素平面で有界となるので、 $h\lambda$ をその領域に入るようにすると、 h の大きさに制限が課される。一般的なベクトル形の方程式 $y' = f(x, y)$ では、ヤコビ行列 $\partial f / \partial y$ のすべての固有値 λ_i に対して、 $h\lambda_i$ が絶対安定領域に入るようにしなければならない。

Stiff 問題では、 $\partial f / \partial y$ の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ とすると

$$\max_{1 \leq i \leq d} |\text{Re } \lambda_i| / \min_{1 \leq i \leq d} |\text{Re } \lambda_i| \quad (\text{硬度比})$$

が非常に大きな値をとる。すると、stiff 問題を安定に解くためには、実数部分絶対値最大の固有値 λ_m に対して、 $h\lambda_m$ が絶対安定領域に入るように h を非常に小さく選び、さらに実数部分絶対値最小の固有値 λ_n に対応する解の成分が十分減衰するまでの長い区間を積分しなければならず、数値的な困難さが生じる。

ステップ幅 h に対する制限をなくし、かつ安定に解くためには、絶対安定領域が左半平面で左側有界でないことが要求される。そしてこのような方法は必ず陰的な方法になることが知られている。陰的方法では、1 ステップ進めるのに連立非線型方程式を解かなくてはならない。

例えば、 $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ を p 段の陰的 Runge-Kutta 法で近似解を求めるならば、次式を解くが必要になる。

$$k_i = f\left(x_0 + \alpha_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^p \beta_{ij} k_j\right)$$

† Influence of Errors in Jacobian Matrix upon the ROW Method by TAKASHI MORIYAMA (Yasu Site, IBM Japan Ltd.) and TAKETOMO MITSUI (Department of Information Engineering, Nagoya University).

** 日本 IBM 野州事業所

*** 名古屋大学工学部情報工学科

$$k_2 = f\left(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + h \sum_{i=1}^p \beta_{2i} k_i\right)$$

$$\vdots$$

$$k_p = f\left(x_0 + \alpha_p h, y_0 + h \sum_{i=1}^p \beta_{pi} k_i\right)$$

この方程式を逐次代入法で解いたとしよう。すなわち

$$k_j^{[t+1]} = f\left(x_0 + \alpha_j h, y_0 + h \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} k_i^{[t+1]} + h \sum_{i=j}^p \beta_{ji} k_i^{[t]}\right)$$

と反復する。函数 $f(x, y)$ は、リプシッツ定数 L でリプシッツ連続

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L \|y - z\|$$

と仮定し、さらに

$$b_L = \max(|\beta_{21}|, |\beta_{31}| + |\beta_{32}|, \dots, |\beta_{p1}| + \dots + |\beta_{p, p-1}|)$$

$$b_M = \max(|\beta_{11}| + \dots + |\beta_{1p}|, |\beta_{22}| + \dots + |\beta_{2p}|, \dots, |\beta_{pp}|)$$

と定義すると、逐次代入法が収束するための十分条件は、 h に対する次のような制限となる¹⁾。

$$h < \frac{1}{(b_L + b_M)L} \quad (1)$$

また、陰的な線型多段階法や半陰的 Runge-Kutta 法でも、同種の条件が課せられる。

ところが、stiff 問題では定数 L は硬度比程度の大きさなので、結局再び h を十分小さく選ばなければならないことになる。そこでこの制限をとり払うため、非線型方程式をニュートン反復法で解くことが考えられる。ニュートン法によれば、逐次代入法のような h に対する厳しい制約(1)はなくなるが、反面ヤコビ行列 $\partial f / \partial y$ の計算が必要となる。

3. ROW 法

前章より、stiff 問題向きの陰的な数値解法を実行するには、ヤコビ行列の計算が必要になることがわかった。そこで、Runge-Kutta 公式の中に直接にヤコビ行列を導入した離散変数法が考案された。これが ROW 法 (Rosenbrock-Wanner 法) である。 p 段 ROW 法の一般形は次のように与えられる。(以下簡単のため、初期値問題を $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ とする。)

$$E = I - h\gamma \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$$

$$Ek_1 = hf(y_0)$$

$$Ek_j = hf\left(y_0 + \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i\right) + \sum_{i=1}^{j-1} c_{ji} k_i$$

$$(j=2, 3, \dots, p)$$

$$y_{\text{new}} = y_0 + \sum_{i=1}^p b_i k_i$$

ここで γ , a_{ji} , b_i , c_{ji} は次数および安定性の条件から決まる定数である。

Kaps と Rentrop は、4 段 ($p=4$)、4 次の ROW 法で、局所離散化誤差評価のための 3 次公式を埋め込んだ A-安定 (絶対安定領域が左半平面を含む) な公式を作った²⁾⁻⁴⁾。この公式では、特に $a_{41} = a_{31}$, $a_{42} = a_{32}$, $a_{43} = 0$ と選ばれたので、4 段公式であるにもかかわらず、1 ステップでの函数計算は実は 3 回だけである。そして、計算された函数値から、同一の係数行列 E をもつ連立線型方程式を順次解けばよい。

4. ヤコビ行列の誤差の影響

問題が非線型の場合は、解析的にヤコビ行列を与えることは困難であるとみなされてきたので、一般的には数値微分すなわち差分商をもってヤコビ行列を近似してきた。事実 Kaps と Rentrop の FORTRAN プログラムも、数値微分を採用している。

ニュートン反復のためにヤコビ行列を使う場合は、数値微分によって計算しても、その誤差は収束に必要な反復回数に影響を及ぼすことはあっても、解の精度とは関係しないと考えられる。しかし ROW 法では公式の中にヤコビ行列を含んでいるので、数値微分による誤差は近似解の精度に影響を与える可能性がある。そこでヤコビ行列の誤差が、どのように ROW 法の精度、安定性に影響するかを調べた。

(a) 精度への影響

Kaps-Rentrop の公式の 1 ステップの計算過程は、次のように書くことができる³⁾。

$$1^\circ \quad g_1 = f(y_0)$$

$$2^\circ \quad J = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$$

$$3^\circ \quad E = I - h\gamma J$$

$$4^\circ \quad Ek_1 = hg_1$$

$$5^\circ \quad g_2 = f(y_0 + a_{21}k_1)$$

$$6^\circ \quad Ek_2 = hg_2 + c_{21}k_1$$

$$7^\circ \quad g_3 = f(y_0 + a_{31}k_1 + a_{32}k_2)$$

$$8^\circ \quad Ek_3 = hg_3 + c_{31}k_1 + c_{32}k_2$$

$$9^\circ \quad Ek_4 = hg_4 + c_{41}k_1 + c_{42}k_2 + c_{43}k_3$$

$$10^\circ \quad y_{\text{new}} = y_0 + b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4$$

$$11^\circ \quad \text{error} = e_1k_1 + e_2k_2 + e_3k_3 + e_4k_4$$

ここで、11 番目は埋込み型公式を使った、局所離散化誤差の事後評価である。このアルゴリズムでヤコビ

行列に誤差が含まれていたとし、正確なヤコビ行列を J 、誤差の行列を D 、また誤差の含まれた量を、もとの量の記号に \sim をつけて表すことにする。

2° に対応して

$$\tilde{2}^\circ \quad \tilde{J} = J + D$$

となり、さらに

$$\tilde{3}^\circ \quad \tilde{E} = I - h\gamma\tilde{J} = E - h\gamma D$$

である。以下、 h は十分小で必要な行列はすべて正則であることを仮定し、 D の 2 乗以上は無視することにする。

$$\begin{aligned} y_{\text{new}} = & y_{\text{new}} + \{2 - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)\} \gamma h^2 E^{-4} Df(y_0) \\ & + O(h^3) \end{aligned}$$

という結果がえられる (付録参照)。上式のうち、 $\{2 - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)\} \gamma$ は公式で定められる定数であるから、これを C とおくことにする (C の値は 0.270673) と、次のような結論になる。Kaps-Rentrop 公式は本来 4 次であるのに、ヤコビ行列の計算に誤差 D が含まれており、それが h とは独立であるならば、実は 1 次の近似にしかなっていない。そのくい違いの主要項である $Ch^2 E^{-4} Df(y_0)$ の大きさを事前に予測することは困難であるが、 E が悪条件の行列であるならば、誤差は拡大される恐れがある。

(b) 安定性への影響

Kaps-Rentrop の 4 次公式は、A-安定であることが示されている²⁾。しかし、その場合ヤコビ行列は正確であることが仮定されており、これに誤差が含まれている場合は考察がない。そこで、誤差を含んだヤコビ行列が A-安定性に対してどのように影響するかを調べよう。

A-安定性は公式の絶対安定領域を求めることから始まるので、テスト問題 $y' = \lambda y$ に ROW 法を適用して、安定性因子 $R(z)$ を求める ($z = \lambda h$)。 $|R(z)| < 1$ を満たす z の領域が絶対安定領域である。数値微分を採用したことによる誤差のモデルとして、ヤコビ行列 J (今の場合はスカラー λ) に D (やはりスカラー) だけのゆらぎがあり、これが計算過程 3°以降の E に影響を与えているとしよう。 f の計算そのものは λy と正確に行われるとする。 D を

$$\begin{aligned} D = & |J| \exp(i\theta) / 100 \\ & \left(\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi \right) \end{aligned}$$

と変えたときの絶対安定領域の変化を図 1 から図 6 に示す。すべての図で境界曲線の左側が絶対安定領域である。

これらの図から結論されることは、 D が実数の場合

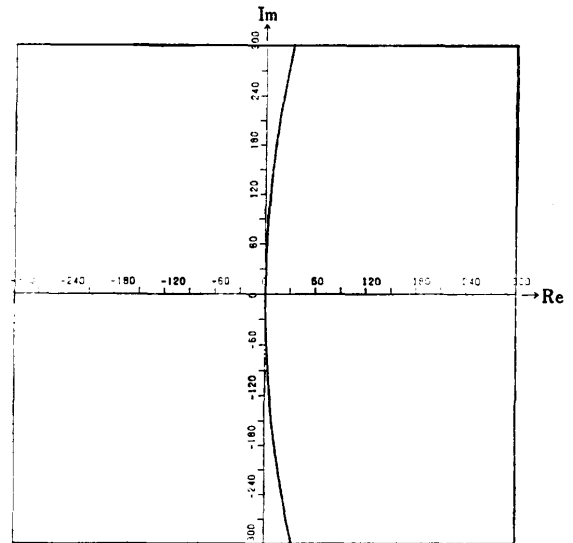


図 1 絶対安定領域 ($D=0$)

Fig. 1 The region of absolute stability. ($D=0$)

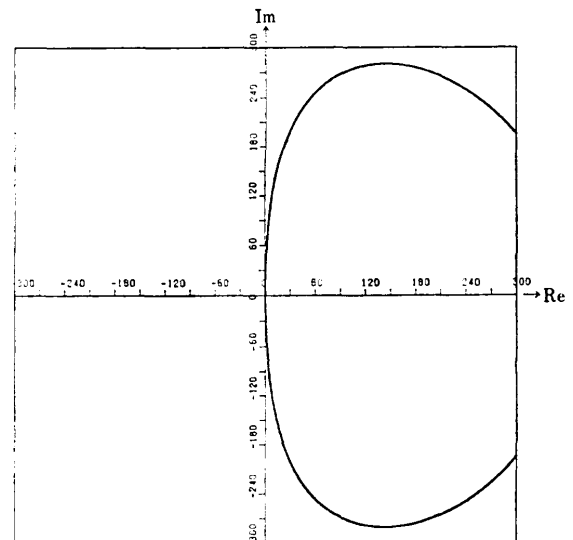


図 2 絶対安定領域 ($\theta=0$)

Fig. 2 The region of absolute stability. ($\theta=0$)

は公式の A-安定性に影響しないが、実数でないときには A-安定性が損なわれる可能性があること、 $A(\alpha)$ -安定性すら危うい可能性があることである。ヤコビ行列にこのような危険なゆらぎが入るかどうかは、問題と、数値微分のとり方によるのであるから、公式の絶対安定領域は、ヤコビ行列のゆらぎに対して「安定ではない」と言うことができよう。

5. 数値実験

以上の考察を踏まえて、非線型常微分方程式 stiff

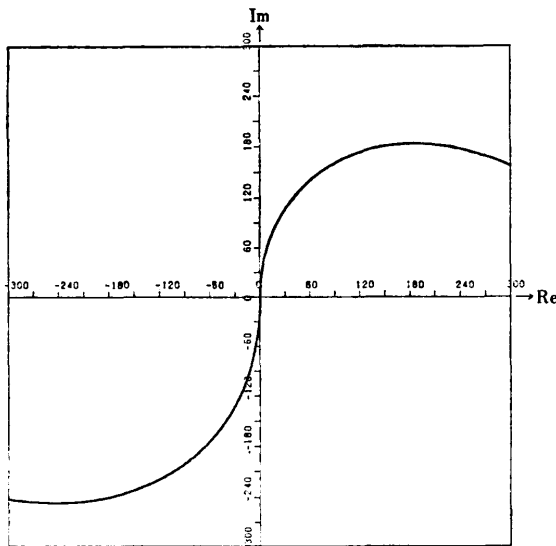


図3 絶対安定領域 ($\theta = \pi/4$)
Fig. 3 The region of absolute stability. ($\theta = \pi/4$)

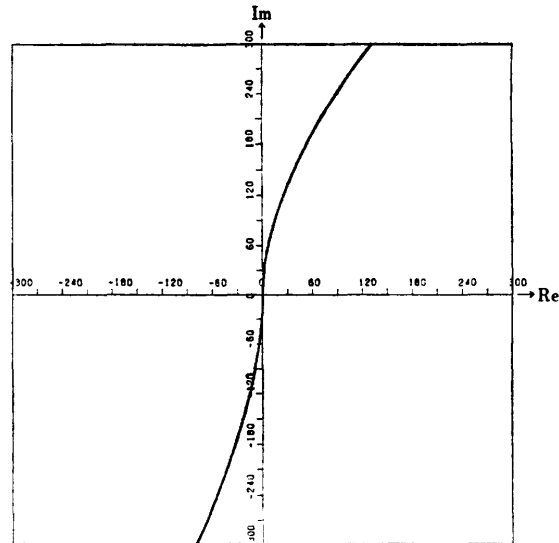


図5 絶対安定領域 ($\theta = 3/4\pi$)
Fig. 5 The region of absolute stability. ($\theta = 3/4\pi$)

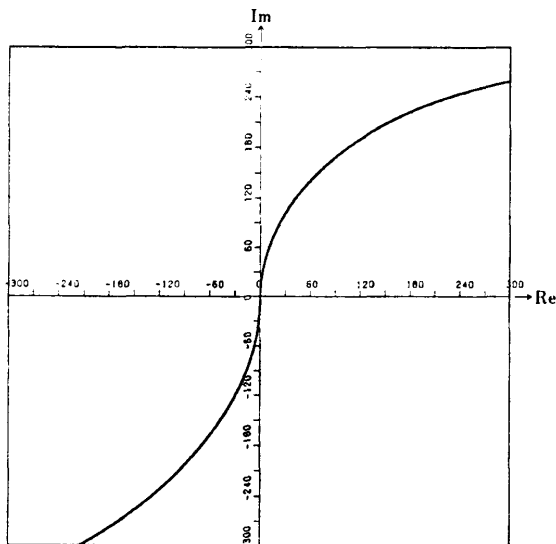


図4 絶対安定領域 ($\theta = \pi/2$)
Fig. 4 The region of absolute stability. ($\theta = \pi/2$)

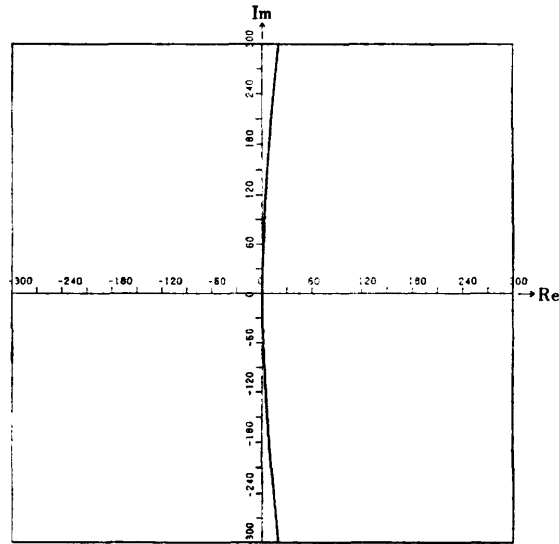


図6 絶対安定領域 ($\theta = \pi$)
Fig. 6 The region of absolute stability. ($\theta = \pi$)

問題の例を van der Pol 方程式⁵⁾にとり、正確でないヤコビ行列の影響についての数値実験を行った。

van der Pol 方程式を連立系に書くと、

$$\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 2 \\ y_2' = \beta(1 - y_1^2)y_2 - y_1, & y_2(0) = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

となり、正数 β が大きいと stiff になる。いま $\beta = 5$ にとり、この問題に ROW 法 Kaps-Rentrop 公式を適用し、ヤコビ行列の計算に数値微分(独立変数の差分一定の差分商)を使った場合と、解析的微分を使

った場合を比較する。これをステップ幅 h を変えながら実行する。(Kaps-Rentrop 公式には、埋め込まれた3次公式の併用で、ステップ幅自動調節の機能があるが、ここではその機能は使わない。) 図7は、横軸に使用したステップ幅 h 、縦軸には積分区間での誤差の絶対値の最大値(ともに対数)をとって、ステップ幅と誤差の関係を示している。

図より、解析的微分の場合は、誤差曲線が直線的で傾きが -4 に近く、この公式が4次公式であることを推測させる。しかし、数値微分を使った場合は、傾き

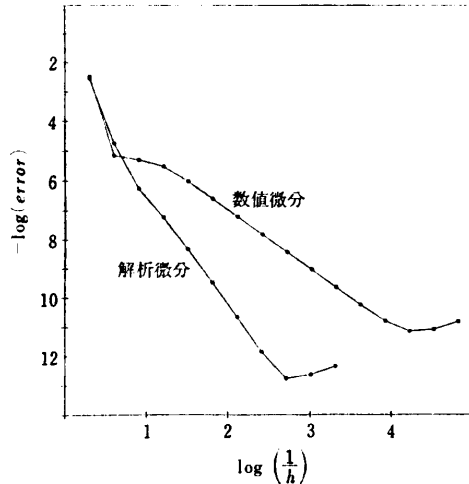


図 7 数値微分と解析微分の比較

Fig. 7 Comparison of numerical and analytic differentiations.

が一定でなく、さらに h が比較的大きく、誤差の値も大きいときは解析的微分の場合に近いが、 h が小さくなると傾きはゆるやかとなり、4次近似にはなっていないことを推察させる。

6. 高速微分法による解析的ヤコビ行列の実現

以上の数学的な解析と数値実験から、ROW 法においてはヤコビ行列を解析的に正確な形式で与えなければならぬことがわかった。初期値問題解法パッケージのユーザ側が与えるのは、通常導関数の形式あるいはそれを計算するプログラムであるから、このほかにヤコビ行列計算のプログラムを与えることは、余分な手間となる。そして、手計算による偏導関数計算は誤りやすく、また次元が大となれば非常な労力を必要とする。

ところが、通常使われる関数の形式は四則演算や初等関数によって成り立っているから、これらに対する代数的操作のみで、導関数の形式は計算できる。これに対しては、コンピュータによる記号・代数演算 (SAM) の機能が活用できる。さらに、SAM によった場合、ヤコビ行列の計算の手間が増大してしまうが、これを防ぎ、偏導関数値の計算を関数値の計算と同程度の手間で実行可能にする方法に、伊理らの「高速微分法」がある^{6),7)}。これは、関数の計算グラフを活用して、関数値計算の途中の中間結果を利用し、偏導関数値を高速に計算するものである。

この方法を実行するプログラムはすでにいくつか作

られているが、著者は、新たに C 言語による前処理系としてこれを実行するプログラムを作成した。その詳細は他に譲る⁸⁾が、これは次の機能をもっている。

- (1) FORTRAN プログラムの形式に書かれた、四則演算と初等関数から成る関数形式を読み込む。
- (2) 関数形式の字句構析・構文解析を行い、微分規則も加えて、必要なら新たな中間変数を設定し、偏導関数計算の規則を生成する。
- (3) FORTRAN のサブルーチン形式で、ヤコビ行列計算のプログラムを出力する。

このようにすれば、ユーザは関数計算の FORTRAN プログラムを与えるのみでよく、あとは前処理系を実行して、得られたヤコビ行列計算プログラムを ROW 法プログラムにリンクすればよい。したがって、高速微分法の知識がなくとも、その成果を利用することができる。

前処理系の処理時間は、他の要素と比較すると大きなものではない。文献 5) にあげられている非線型 stiff テスト問題 C1~E5, 文献 3) にあげられている問題 F1~F5, 合計 21 問題 (次元 $n=2$ が 4 問, $n=3$ が 7 問, $n=4$ が 9 問, $n=8$ が 1 問) について、次元数ごとに、前処理系の処理時間と、前処理系の出力した FORTRAN プログラムをコンパイラが処理する時間とを比較したのが、表 1 である。これは、FUJITSU・A-600・UTS を使用した結果である。前処理にかかる時間は、ほとんど無視できるほど小さく、またその比率は n が大きくなるに従って小さくな

表 1 前処理系の処理時間
Table 1 Processing time of pre-compiler.
(単位: 秒)

| | 前処理系 | FORTRAN コンパイラ | 比 |
|-------|--------|---------------|------|
| $n=2$ | 0.0073 | 0.28 | 2.6% |
| $n=3$ | 0.0088 | 0.52 | 1.7% |
| $n=4$ | 0.0100 | 0.75 | 1.3% |
| $n=8$ | 0.0105 | 0.85 | 1.2% |

FUJITSU A-600 UTS

表 2 微分の計算時間の比較
Table 2 Comparing computing time of differentiation.
(単位: 秒/10 万回)

| | 高速微分法 | 数値微分 | 比 |
|-------|-------|-------|-----|
| $n=2$ | 1.03 | 3.57 | 3.5 |
| $n=3$ | 1.92 | 7.18 | 3.7 |
| $n=4$ | 2.70 | 11.72 | 4.3 |
| $n=8$ | 3.68 | 16.90 | 4.6 |

FUJITSU A-600 UTS

ることがわかる。

表2は、同じ問題集に対して、高速微分法によるヤコビ行列の計算時間と、数値微分による時間とを比較したものである。時間は、各次元数・各問題について10万回実行した平均値である。高速微分法を使うことで、ヤコビ行列の計算時間も大幅に短縮でき、その差は次元数が大きくなるにつれて顕著になることがわかる。

7. ま と め

本論文では、常微分方程式の stiff 問題に対して、効率的で優れたアルゴリズムである ROW 法について考察し、そこで必要なヤコビ行列の計算は解析的に行うべきであることを、数学的な解析と数値実験から示した。次に、ヤコビ行列の解析的な生成を、ROW 法のユーザに負担をかけずに実行し、かつえられたヤコビ行列計算プログラムが能率的となるようにするため、高速微分法を実行する前処理系を C 言語で作成し、若干の数値的な試験を実施した。これらの結果から、高速微分法によるヤコビ行列の計算は、数値微分によるよりも高速であり、もちろん数値解の精度を決して低下させず、ROW 法のもっている理論的精度がいかなる場合も保証できることが示された。こうした意味において、ROW 法プラス高速微分法というアルゴリズムは、非線型常微分方程式の stiff 問題に対する有力なアルゴリズムといえることができる。

今後の課題としては、より実際的な問題にもこれを適用してみること、その際高速微分法の適用できる関数の範囲を、初等関数とその四則演算よりさらに拡張することがあげられよう。

参 考 文 献

- 1) 三井斌友: 数値解析入門—常微分方程式を中心に, p. 90, 朝倉書店, 東京 (1985).
- 2) Kaps, P. and Rentrop, P.: Generalized Runge-Kutta Methods of Order Four with Stepsize Control for Stiff Ordinary Differential Equations, *Numer. Math.*, Vol. 33, pp. 55-68 (1979).
- 3) Gottwald, B. A. and Wanner, G.: A Reliable Rosenbrock Integrator for Stiff Differential Equations, *Computing*, Vol. 26, pp. 355-360 (1981).
- 4) Gottwald, B. A. and Wanner, G.: Comparison of Numerical Methods for Stiff Differential Equations in Biology and Chemistry, *Simulation*, Vol. 38, No. 2, pp. 61-65 (1982).

- 5) Enright, W. H., Hull, T. E. and Lindberg, B.: Comparing Numerical Methods for Stiff Systems of O. D. E. s, *BIT*, Vol. 15, pp. 10-48 (1975).
- 6) Iri, M.: Simultaneous Computing of Functions, Partial Derivatives and Estimates of Rounding Errors—Complexity and Practicality, *Japan J. Appl. Math.*, Vol. 1, pp. 223-252 (1984).
- 7) 伊理正夫, 久保田光一: 高速微分法—グラフ, 丸め誤差, ノルム, 数理科学, Vol. 25, No. 3, pp. 41-48 (1987).
- 8) 森山貴志, 三井斌友: ROW 法について, 京都大学数理解析研究所講究録, No. 643, pp. 129-153 (1988).

付録 \tilde{y}_{new} 項の導出

第4章で導いた行列 E については

$$\begin{aligned}(E - h\gamma D)^{-1} &= [E(I - h\gamma E^{-1}D)]^{-1} \\ &= (I - h\gamma E^{-1}D)^{-1}E^{-1} \\ &\doteq (I + h\gamma E^{-1}D)E^{-1}\end{aligned}$$

とみることができる。ゆえに \tilde{k}_1 について

$$E\tilde{k}_1 = hq_1, \quad E\tilde{k}_2 = hq_2$$

を用いると

$$(E - h\gamma D)\tilde{k}_1 = E\tilde{k}_1$$

であり、上式を用いれば、

$$\tilde{k}_1 \doteq k_1 + h\gamma E^{-1}Dk_1$$

が導かれる。同様な計算によって

$$\begin{aligned}\tilde{k}_2 &\doteq k_2 + h\gamma E^{-1}Dk_2 + c_{21}h\gamma E^{-2}Dk_1 \\ \tilde{k}_3 &\doteq k_3 + h\gamma E^{-1}Dk_3 + c_{31}h\gamma E^{-2}Dk_1 \\ &\quad + c_{32}h\gamma E^{-2}Dk_2 + c_{32}c_{31}h\gamma E^{-3}Dk_1 \\ \tilde{k}_4 &\doteq k_4 + h\gamma E^{-1}Dk_4 + c_{41}h\gamma E^{-2}Dk_1 \\ &\quad + c_{42}h\gamma E^{-2}Dk_2 + c_{42}c_{21}h\gamma E^{-3}Dk_1 \\ &\quad + c_{43}h\gamma E^{-2}Dk_3 \\ &\quad + c_{43}c_{31}h\gamma E^{-3}Dk_1 + c_{43}c_{32}h\gamma E^{-3}Dk_2 \\ &\quad + c_{43}c_{32}c_{21}h\gamma E^{-4}Dk_1\end{aligned}$$

が得られる。 $\tilde{k}_1 \sim \tilde{k}_4$ の右辺を整理するため、 $k_1 \sim k_4$ を h のオーダーまでで表現すると

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(y_0) + O(h^2) \\ k_2 &= (1 + c_{21})hf(y_0) + O(h^2) \\ k_3 &= (1 + c_{31} + c_{32})hf(y_0) + O(h^2) \\ k_4 &= (1 + c_{41} + c_{42} + c_{43})hf(y_0) + O(h^2)\end{aligned}$$

が得られる。これらを式

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{new} &\doteq y_{new} \\ &\quad + h\gamma E^{-4} \{ b_1 + b_2c_{21} + b_3(c_{31} + c_{32}c_{21}) \\ &\quad + b_4(c_{41} + c_{42}c_{21} + c_{43}c_{31} + c_{43}c_{32}c_{21}) \} Dk_1 \\ &\quad + \{ b_2 + b_3c_{32} + b_4(c_{42} + c_{43}c_{32}) \} Dk_2 \\ &\quad + (b_3 + b_4c_{43})Dk_3 + b_4Dk_4\end{aligned}$$

に代入し, Kaps-Rentrop 公式の次数条件式²⁾から導かれる

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_2c_{21} + b_3c_{31} + b_3c_{32} + b_4c_{41} + b_4c_{42} \\ + b_4c_{43} + b_3c_{32}c_{21} + b_4c_{43}c_{31} + b_4c_{43}c_{32} + b_4c_{42}c_{21} \\ + b_4c_{43}c_{32}c_{21} = 1$$

を用いれば

$$\tilde{y}_{\text{new}} = y_{\text{new}} + Ch^2 E^{-4} Df(y_0) + O(h^3)$$

が得られる.

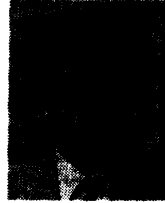
(昭和 63 年 3 月 14 日受付)

(昭和 63 年 12 月 12 日採録)



森山 貴志

1964 年生. 1986 年名古屋大学工学部応用物理学卒業. 1988 年同大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了. 現在日本アイ・ピー・エム(株)野洲事業所勤務.



三井 斌友 (正会員)

1944 年生. 1967 年東京大学教養学部基礎科学科卒業. 1969 年同大学院理学系研究科修士課程修了. 京都大学数理解析研究所助手, 福井大学工学部講師, 同助教授を経て現在名古屋大学工学部助教授. 理学博士. 応用数学・数値解析の研究に従事. 著書「数値解析入門—常微分方程式を中心に」(朝倉書店). 日本数学会, C&A セミナー各会員.