A-018

$Conditional\text{-}Value\text{-}at\text{-}Risk(CVaR)$によるリスクを考慮した多期間生産計画の解法

田口　雄基† Yuki Taguchi　上野　信行‡ Nobuyuki Ueno　奥原　浩之† Koji Okuhara　小出　哲彰† Noriaki Koide

1．はじめに

近年、様々な産業においてコスト削減の必要に迫られる状況が多く発生している。特に製造業においては、生産活動の無駄を省くことや顧客や市場の需要の変化に柔軟に対応するということが一層重要視されている。その中でサプライチェーンを形成する企業間において、予期可能な先行需要情報の一種である内示情報を生産計画に活用するという研究が進められてきた[1,2]。

内示生産システムは、多様化する顧客ニーズや製品の安定供給に有効であるといわれている。サプライチェーンの下流の企業や顧客が上流の企業に対して、「内示情報」を提示し納入直前には確定注文情報を伝達するという仕組みは、日本の製造業界における伝統的な情報共有の方法である。この内示情報を用いた不確実な需要環境における企業間連携は、製品の安定的な供給には不可欠なシステムである。生産の大まかな流れとしては、サプライチェーンの下流企業の生産予定が決まると、上流企業に内示情報が提示される。これによって上流企業は生産準備、あるいは生産を開始する。さらに下流企業から顧客からの要求の変更などを反映した確定注文情報が出され、一定の納入リードタイムの後に納入が行われる。この場合、確定注文は内示情報の後に提示されることから、上流企業は見込みにて生産を行う必要がある。

このような特徴を持つ内示生産システムでは、内示情報に含まれる不確実な注文に対して在庫を充当していく際に、保有する在庫量によっては「在庫品切れ」が発生し、顧客へ製品の納入ができない事態が起こる。

本論文では、このような注文の不確実性から生じる「在庫品切れ」をリスクと捉える。リスク指標としては、金融分野で用いられている *VaR*(*Value-at-Risk*)、*CVaR*(*Conditional-Value-at-Risk*)をとりあげ[3]、これらを反映した多期間の生産計画問題の定式化と解法を提案する。解法としては、ゲーム理論におけるシャープレイ値[4]を用いて、トータルのリスク許容度を各期に配分し、これを満たすように生産量を決めることにより生産計画を作成する方法を示す。3 期間の生産計画問題に本手法を適用し、既存手法との比較を行い、考察する。本提案の手法は、多期間の生産計画立案において、在庫品切れ量の厳密な確率分布を必要としないという特徴を持っている。

2 内示生産システムにおける生産計画

2.1 生産計画問題

内示生産システムにおいては、実際の需要量（確定注文）は様々な細かい変動によって確率的に変動する。このとき、需要量は内示情報を平均値とした正規分布に従うと仮定できる。図 1 に内示情報と確定注文の概略を示す。

† 大阪大学大学院　情報科学研究科

‡ 県立広島大学

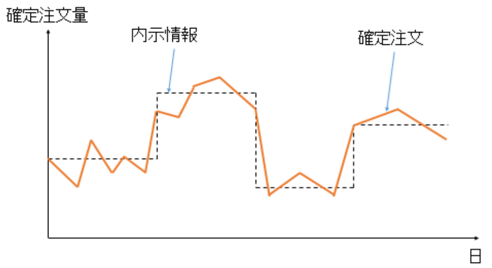

図 1　内示情報と確定注文

また、内示生産システムにおける生産計画は次のような確率非線形計画問題として定式化される[1,2]。

$$min\, E\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \sum_{i=1}^{n} h_i S_i\right)$$

s.t.

$$S_0 + \sum_{t=1}^{i} x_t - \sum_{t=1}^{i} \overline{d_t} \geq 0 \qquad (1)$$

$$SO_n \leq \beta \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = r \qquad (3)$$

$$(x_1、x_2, \ldots, x_n) \in RC \qquad (4)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (5)$$

ただし、

x_i: 第i期の生産量
d_i: 第i期の需要量、正規分布に従う。平均$\overline{d_i}$
S_i: 第i期の在庫量、初期在庫量はS_0
p_i: 第i期の単位あたりの製造コスト
h_i: 第i期の単位あたりの在庫コスト
SO_n: 未達率
β: 計画目標未達率
r: n期間までの合計生産量
RC: 定式化に顕示的に表現される生産制約式以外の線形で表現される制約式のすべてを満たす実行可能領域に含まれる期別生産量x_iの集合。必要な都度、問題に線形制約式を追加して構成できるということを意味している。

目的関数は生産コストと在庫保有コストとなっており、その最小化を目指している。(1)式は在庫量の平均は各期と

Copyright © 2014 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

も非負であること、(2)式は未達率制約、(3)式は合計生産量制約、(4)式は線形の生産制約、(5)式は生産量が非負であることをそれぞれ表している。未達率の詳細な定義は 2.2 で述べる。

2.2 未達率

在庫量がある確率分布に従うとすると、確率変数が負になるときが「在庫切れ」である。すなわち、確率変数が負になる確率がそのまま在庫切れの起こる確率ということになる。在庫量は、

$$S_i = S_0 + \sum_{t=1}^{i} x_t - \sum_{t=1}^{i} d_t \tag{6}$$

と表される。ここで、初期在庫量と生産量は確定した情報であるが、需要量は顧客の注文情報によって変動する情報であり、正規分布$\mathrm{N}(\bar{d}, \omega^2)$に従う。従って、在庫量$S_i$も正規分布になる。

多期間の場合の在庫量の期待値E、分散V、共分散Covは次のように求められる。

$$E[S_i] = S_0 + \sum_{t=1}^{i} x_t - \sum_{t=1}^{i} \overline{d_t} \tag{7}$$

$$V[S_i] = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_i^2 = \sigma_i^2 \tag{8}$$

$$Cov[S_i, S_j] = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_i^2 \tag{9}$$

ここから分散共分散行列は次のように構成される。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^2 \\ \omega_1^2 & \omega_1^2 + \omega_2^2 & \dots & \omega_1^2 + \omega_2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^2 & \omega_1^2 + \omega_2^2 & \dots & \omega_1^2 + \omega_2^2 \dots + \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

以上より、各期間の在庫量は、平均値は(7)式、分散共分散は(10)式に従う多次元正規確率分布である。(10)式が示すように、後ろの期になるほど分散が大きくなるという特徴をもつ。

未達率SO_nは、各期の在庫量S_iとその期待値m_iを格納したベクトル$\boldsymbol{S} = [S_1, S_2, \dots, S_n]$, $\boldsymbol{m} = [m_1, m_2, \dots, m_n]$を用いて、

$$SO_n = 1 - \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\boldsymbol{S}; \boldsymbol{m}; \Sigma)\, dS \tag{11}$$

$$f(\boldsymbol{S}; \boldsymbol{m}; \Sigma) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sqrt{|\Sigma|}} exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{m})^2 \Sigma^{-1} (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{m})\right] \tag{12}$$

と定義される。これは計画期間において少なくとも 1 回以上の在庫切れが起こる確率である。計画期間を n 期間とすると(11)式は n 次元正規確率分布の n 重積分となり、計算量は多大である。

2.3 リスク指標

リスク指標としては *VaR*、 *CVaR* を用いる。*VaR*、 *CVaR* は次のように定義されている[5]。

$$VaR(\varepsilon) = -inf(F(x) \geq \varepsilon) = -F^{-1}(\varepsilon) \tag{13}$$

$$CVaR(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon VaR(p)\, dp \tag{14}$$

リスク指標として満たすべき性質として次の 4 項目が提案されている[3]。なお、$\rho(\cdot)$はリスク指標を表わしている。

1. 単調性(monotonicity)
   $X_1 \geq X_2$ならば、$\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$
2. 劣加法性(sub-additivity)
   $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$
3. 正の同次性(positive homogeneity)
   $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)\ for\ \lambda > 0$
4. 平行移動不変性(translation invariance)
   $\rho(X + c) = \rho(X) + c \quad for\ all\ c$

VaR はリスク指標としての柔軟性の高さから、よく用いられるが、テールリスクのように、発生する確率は低いが大きな損害を出すリスクを捉えることが困難であるということや、劣加法性を満たさないということなどが指摘されている。一方、*CVaR* は、先に挙げた 4 つの性質を満たすことが示されている。ここで、*CVaR* は特に劣加法性を満たしており、後述するように、シャープレイ値を求める場合の特性関数の前提を満たしていることがわかる。

2.4 在庫管理におけるリスク指標の解釈

単一期間を考える。在庫管理におけるVaRの意味を述べる。信頼水準εが与えられたときの$VaR(\varepsilon)$は、在庫量の確率密度関数を$f(x)$とすると、

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{VaR(\varepsilon)} f(x) dx \tag{15}$$

の関係にある。

一方、未達率は

$$SO_n = 1 - \int_0^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx \tag{16}$$

である。(15)(16)式から、$SO_n = \varepsilon$のときには$VaR(\varepsilon) = 0$となる。すなわち、未達率がεであるリスク指標は$VaR(\varepsilon)$であり、在庫量が 0 以下になる確率がεであるといえる。したがって$VaR(\varepsilon)$とは、在庫水準が$VaR(\varepsilon)$以下になる確率がεであるときの在庫水準である。

次に、在庫管理における$CVaR$の意味を述べる。$CVaR$は定義より、信頼水準ε以下における$VaR(\varepsilon)$の平均値である。

在庫品切れ量を$SVaR$とすると、

$$SVaR = -\int_{-\infty}^0 x f(x)\, dx \tag{17}$$

Copyright © 2014 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

である。一方、$CVaR$は（14）式より、

$$CVaR(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{VaR(\varepsilon)} yf(y)\,dy \qquad (18)$$

のように変形される。在庫管理においてεは、$VaR(\varepsilon) = 0$が成立する値であるから、（17）（18）式の右辺は、等しくなり、$SVaR$と$CVaR(\varepsilon)$の間には次のような関係が成り立つ。

$$SVaR = \varepsilon \cdot CVaR(\varepsilon) \qquad (19)$$

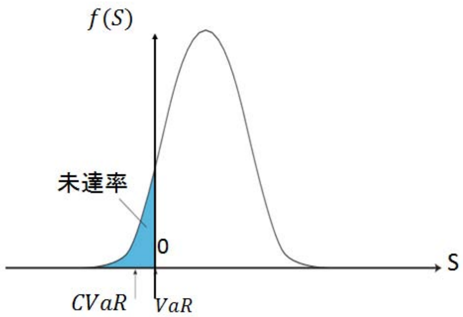

図 2: 未達率・VaR・$CVaR$

3. シャープレイ値を用いた多期間生産計画

3.1 シャープレイ値による配分

ゲーム理論を用いて多次元正規確率分布に従う各確率変数にリスクを配分する方法が提案されている[4]。ゲーム理論において協力ゲームとは、複数のプレイヤーが協力的な行動を行うことが可能である場合のゲームのことであるが、このゲームにおいては全てのプレイヤーが協力したときに得られる最大の利得を、それぞれのプレイヤーの貢献度に応じて配分することが考えられている。このときのプレイヤーiの配分量π_iの算出についてはシャープレイ値が提案されており、次のように定義されている。

$$\pi_i^{Shapley} = \sum_{\mathcal{H}\subset\Omega-\{i\}} \frac{|\mathcal{H}|!\,(|\Omega|-|\mathcal{H}|-1)!}{|\Omega|!}\left(v(\mathcal{H}\cup\{i\}) - v(\mathcal{H})\right) \qquad (20)$$

ここで、Ωは全てのプレイヤーの集合、$\mathcal{H}$はΩの部分集合、すなわち協力関係にあるプレイヤーの集合を示す。$|\cdot|$は集合の要素数、$\mathrm{v}(\cdot)$は特性関数である。ただし、特性関数は優加法性を満たすものを選択する必要がある。

2.3 でふれたように、$CVaR(\varepsilon)$は劣加法性を満たしていることから、$-CVaR(\varepsilon)$は優加法性を満たす。したがって多次元正規確率分布に従う確率変数をプレイヤーとみなすと、特性関数を$-CVaR(\varepsilon)$とすることにより、各確率変数の　$CVaR(\varepsilon)$の値をシャープレイ値によって算出することができる。すなわち、(20)式の要素について

$$\Omega = \{S_1, S, \dots, S_n\} \qquad (21)$$

$$v(\mathcal{H}) = -CVaR_{\mathcal{H}} = \frac{-1}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{S_{\mathcal{H}_{1-\alpha}}} t f_{S_{\mathcal{H}}}(t)\,dt \qquad (22)$$

とする。ただし、

$$S_{\mathcal{H}} = \sum_{S_i\in\mathcal{H}} S_i \qquad (23)$$

$$S_{\mathcal{H}_{1-\alpha}} = F_{S_{\mathcal{H}}}^{-1}(1-\alpha) \qquad (24)$$

であり、$f_{S_{\mathcal{H}}}$は$S_{\mathcal{H}}$の確率密度関数、$F_{S_{\mathcal{H}}}$は$S_{\mathcal{H}}$の累積分布関数を表している。

3.2 生産計画問題

ここでは、$VaR(\varepsilon)$と$CVaR(\varepsilon)$の値を指標に、各期の生産量を適正にすることによって生産計画の立案を達成することを考える。

信頼水準εが与えられたとき、それに対する$VaR(\varepsilon)$が算出され、それに伴って$CVaR(\varepsilon)$も算出される。通常、信頼水準εとは計画立案者のリスクに対する許容度によって任意に設定される値であり、例えば$\varepsilon = 0.05$のように設定される。

今回の問題では、在庫量の確率分布として正規分布を考えていることから、正規分布の平均を増減させることによって$VaR(\varepsilon)$と$CVaR(\varepsilon)$の値も増減させることができる。2.4 で在庫管理におけるVaRと$CVaR$の解釈を述べたが、$CVaR(\varepsilon) = 0$とすることによって平均在庫品切れ量$SVaR = 0$とすることができる。ここから、$CVaR(\varepsilon) = 0$となるように、在庫量の従う確率分布である正規分布の平均を増減させる、すなわち決定変数である生産量を確定することによって、リスクを考慮した生産計画の立案が可能となる。

図 3、図 4 で生産計画の改善例を示す。縦軸は在庫水準であり、横軸を下回っている面積が未達率である

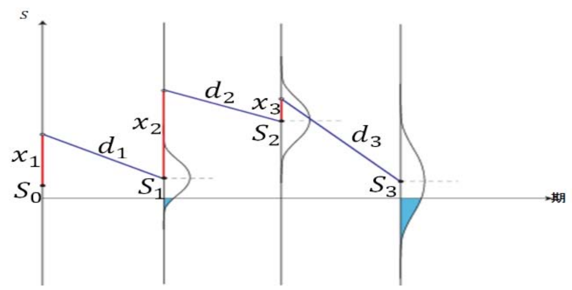

図 3: 初期計画の例

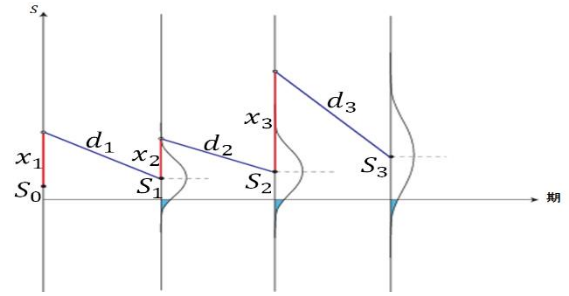

図 4: 改善後の例

Copyright © 2014 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

3.3 解法の手順

今回の問題では計画期間中の各期の在庫量は多次元正規確率分布に従うことから、3.1 で述べた方法を用いることによって各期の在庫量に関する *CVaR* を算出することができる。

まず、初期生産計画として $x_i = 0$、$S_0 = 0$と設定する。この初期生産計画の各期の在庫量に関して、3.1 で述べた方法を用いて *CVaR* を算出する。このとき、第i期の *CVaR* をπ_iとする。次に、実際のS_0を考慮して、$\pi_i = 0$となるように生産量を 1 期目から順に調整していく。多期間の生産計画問題であっても、期ごとに *CVaR* が割り振られるとその後は、逐次の生産量の決定問題となる。

(手順)
1. シャープレイ値を用いてπ_iを求める。
2. 次に各期の生産量を次のようにして決定する。
   $i = 1: x_1 = \pi_1 - S_0$
   $i \geq 2: x_i = \pi_i - \pi_{i-1}$

4．数値例

3 期間の生産計画問題を用いて、新しく提案した手法と既存手法との比較を行う。

既存手法による生産計画結果を表 1 に示す。初期在庫 15、需要の平均（内示）を 10、20、24、需要のばらつきを 3 とした場合である。

表 1: 3 期間の既存手法による生産計画

	初期在庫量	15		
前提	期	1	2	3
	需要量	10	20	24
生産計画結果	生産量	2	22.9	26.2
	在庫量	7	9.8	12
ばらつき	期別の偏差	3.000	3.000	3.000
	期別の分散	9	9	9
	累積の分散	9	18	27
	累積の偏差	3.000	4.243	5.196
未達率	期別未達率	0.010	0.010	0.010
	期別達成率	0.990	0.990	0.990
	累積達成率	0.990	0.980	0.970
	未達率	0.01	0.02	0.03
コスト	在庫コスト	7	9.8	12
	累積在庫コスト	7	16.8	28.8

次に、3.1 のシャープレイ値を用いた手法による生産計画を表 2 に示す。

表 2: シャープレイ値による生産計画

	初期在庫量	15		
前提	期	1	2	3
	需要量	10	20	24
生産計画結果	生産量	1.05	22.61	27.39
	在庫量	6.05	8.66	12.05
ばらつき	期別の偏差	3	3	3
	期別の分散	9	9	9
	累積の分散	9	18	27
	累積の偏差	3.000	4.243	5.196
期別未達率	期別未達率	0.022	0.021	0.010
	期別達成率	0.978	0.979	0.990
	累積達成率	0.978	0.958	0.948
	未達率	0.022	0.042	0.052
コスト	在庫コスト	6.05	8.66	12.05
	累積在庫コスト	6.05	14.71	26.76

これらから、既存手法とほぼ同じ結果が得られていることがわかる。数値的な誤差はシャープレイ値を求める際のデータを詳細にすれば小さくなると考えられる。

5．おわりに

在庫管理における「在庫切れ」を顧客の注文充足要求にこたえられないという意味で企業にとっての「リスク」であると捉え、リスクを考慮した生産計画の提案を行った。

結果として、

(1)リスク指標VaR、$CVaR$の在庫管理における意味を明確にした。すなわちリスク許容度εが在庫管理における未達率と同義であること。また、在庫管理における平均在庫品切れ量は、$CVaR(\varepsilon)$と未達率の積であることを示した。

(2)シャープレイ値を用いて、リスク許容度を各期に配分し、生産計画を立案する方法を示した。本手法では、従来とほぼ同等の結果が得られた。

今後の予定としては、

(1)シャープレイ値による配分法の候補の列挙方法の改善

(2) *CVaR* をベースとして、リスク量に基づく多期間生産計画用のリスク指標の提案

を行っていく [6,7]。

参考文献

1. N. Ueno, K. Okuhara, H. Ishii, H. Shibuki and T. Kuramoto: Multi-item production planning and management system based on unfulfilled order rate in supply chain, *Journal of the Operations Research, Society of Japan*, **50**, No. 3, pp. 201-218(2007)
2. 上野信行: 大規模生産における内示情報を活用した生産計画―不確実な需要環境に対する先行需要情報の活用―, *計測と制御*, **50,** 第 7 号(2011)
3. P Artzner, F Delbaen, J Eber and D Health: Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, **9**, No. 3, pp. 203-228(1999)
4. B. Abbasi, S. Z. Hosseinifad: Tail conditional expectation for multivariate distributions: A game theory approach, *Statistics and Probability Letters*, **83**, pp. 2228-2235(2013)
5. J. lee, A.Prekopa: Properties and calculation of multivariate risk measures: MVaR and MCVaR, *Annals of Operations Research*, **211**, pp. 225-254 (2013)
6. N. Noyan, G. Rudolf: Optimization with multivariate Conditional-Value-at-Risk constraints, *Operation Research*, **Vol61**, No. 4, pp. 990-1013 (2013)
7. 上野信行：内示情報と生産計画-持続可能な社会における先行需要情報の活用-，朝倉書店(2011)

Copyright © 2014 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.