三重対角線形方程式の多重分割並列消去法について†

陳 莘 萌†† 井上知子††† 萩原 宏†††

三重対角線形方程式の解法に対する並列処理の新しいアルゴリズムとして，多重分割並列消去法と名付ける方法を提案する．先に著者らは Wang の分割法に基づく分割並列消去アルゴリズム（I）を提案したが，本論文の方法はさらにそれを飛躍的に改良したものである．ベクトル演算総数において分割並列消去アルゴリズム（I）は Wang の分割法の約 40% であったが，多重分割並列消去法では次元数が多くなれば減る率も大きくなり，$n=2^{14}=16,384$ では約 6% で済む．三重対角線形方程式を解くための並列処理のアルゴリズムとして他に Stone の recursive doubling 法や Hockney の cyclic reduction 法などがすでにあるが，これらは特定のアーキテクチャの計算機向きであるとか，行列の次元数が 2 のべき乗であることが望ましいなどの制約がある．しかし，Wangの分割法と同じく多重分割並列消去法にはそれらの制約は全くなく，しかもrecursive doubling 法や cyclic reduction 法などの既存の方法よりもベクトル演算総数は少なくなり，約 60% で済む．

1. まえがき

三重対角線形方程式を並列に解くためのアルゴリズムとしては，すでに Stone が recursive doubling 法[1]とその改良法[2),3)]を，Hockney が cyclic reduction 法[4]を，Wang がそれらと別の方法[5]を提案している．本論文では Wang の提案した方法を “Wang の分割法” とよぶ．

著者らは先に発表した論文「三重対角線形方程式の分割並列消去法について」[6] において，本質的には Gauss 消去法であるが，それに並列処理を加味した Wang の分割法に基礎を置く，分割並列消去アルゴリズム（I）と名付ける方法を提案した．本論文ではそれをさらに発展させた多重分割並列消去法と呼ぶ新しい方法を提案する．必要なベクトル演算総数は，Wang の分割法に比べると $n\geqq 2^9$ の場合 20% 以下で済み，次元数の増加に伴って率は下がる．また，recursive doubling 法や cyclic reduction 法と比べても約 60% で済む．

なお本論文で対象とする三重対角線形方程式は必ず解が一つだけ存在し，かつ係数行列は対角優位であるか，あるいはそうでない場合も pivoting を必要としない，などの条件の良い場合のものである．また対象とする並列処理計算機は SIMD 方式のものであり，複数のデータ領域に対して同種の演算を施す場合に，ベクトル演算 1 回という数え方をする．さらにプロセッサ数は理論的に必要な数だけあるものとする．

2. 二重分割並列消去法について

三重対角線形方程式

$$Ax=r \qquad (1)$$

を解くときに，分割並列消去アルゴリズム（I）[6]の考えを二度利用する方法について述べる．この方法を二重分割並列消去法と名付けるが，簡単に二重分割法とも表記する．

（1）式は n 個の連立方程式を行列表記したもので，係数行列 A およびベクトル x, r は次の形である．

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad r=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_n & a_n \end{bmatrix}$$

また次元数 n は，三項に因数分解可能な 12 以上の数とする．

ステップ（1） 小行列に分割して非対角要素を並列に消去する．

n に対する条件より

$$n=k^{(1)}\times p^{(1)} \qquad (k^{(1)}\geqq 2)$$

$$p^{(1)}=k^{(2)}\times p^{(2)} \qquad (k^{(2)}\geqq 2, p^{(2)}\geqq 3)$$

と書き表せる．

---

† Multi-Partitioned Parallel Elimination Method for Tridiagonal Linear Equations by XINMENG CHEN (Computer Science Faculty, Wuhan University), TOMOKO INOUE and HIROSHI HAGIWARA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Kyoto University).

†† 中国武漢大学計算機科学系
††† 京都大学工学部情報工学科

$A^{(1)}=A$, $r^{(1)}=r$ とおき，$A^{(1)}$ を $k^{(1)}$ 次の $p^{(1)}\times p^{(1)}$ 個の小行列に分割する（図1参照）．その後，分割並列消去アルゴリズム（I）のステップ(2)～(3)を順次適用して各小行列の対応する非対角要素を消去し，新しい方程式(2)を得る．

$$A^{(1)\prime}x=r^{(1)\prime} \qquad (2)$$

すなわち，$c_{ik^{(1)}+j}$ $(i=0,1,\cdots,p^{(1)}-1)$ を $2,3,\cdots,k^{(1)}$ の各 j について並列に消去するが，この過程で $f_{ik^{(1)}+j}$ $(i=1,2,\cdots,p^{(1)}-1;\ j=1,2,\cdots,k^{(1)})$ が付加される．また，$b_{ik^{(1)}+j-1}$ $(i=0,1,\cdots,p^{(1)}-1)$ を $k^{(1)},\cdots,3,2$ の各 j について並列に消去した後，$b_{ik^{(1)}}$ $(i=1,2,\cdots,p^{(1)}-1)$ も並列に消去するが，この過程で $g_{ik^{(1)}+j-1}$ ($i=0$ のとき $j=2,3,\cdots,k^{(1)}$; $i=1,\cdots,p^{(1)}-2$ のとき $j=1,2,\cdots,k^{(1)}$) が付加される．このとき，f_i も変化して f_i' となる．

$n=32$, $k^{(1)}=4$, $p^{(1)}=8$ のときの具体的な $A^{(1)\prime}$ の形を図2に示す．対角要素，右辺ベクトルはもちろん必要に応じて変化しており，ダッシュをつけて表している．

ステップ(2)　抜き出した行で新たに次元の小さい三重対角線形方程式を構成して解く．

(2)式の第 $ik^{(1)}$ 行 $(i=1,2,\cdots,p^{(1)})$ を抜き出して，次元数 $p^{(1)}$ の新しい三重対角線形方程式(3)を構成する．

$$A^{(2)}x^{(2)}=r^{(2)} \qquad (3)$$

図3に $n=32$, $k^{(1)}=4$, $p^{(1)}=8$ のときの $A^{(2)}$, $r^{(2)}$, $x^{(2)}$ を示す．

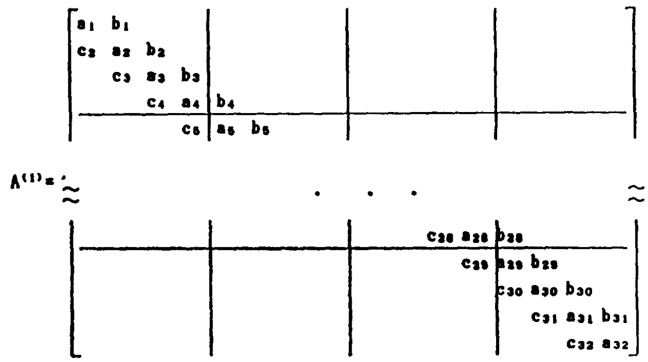

図1　$A^{(1)}$ の次元が32のとき，$k^{(1)}=4$, $p^{(1)}=8$ と分割した例

Fig. 1 The partitioned form in the Multi-Partitioned Parallel Elimination Method, where $n=32$, $k^{(1)}=4$, $p^{(1)}=8$.

$p^{(1)}=k^{(2)}\times p^{(2)}$ を利用して，$A^{(2)}$ を $k^{(2)}$ 次の $p^{(2)}\times p^{(2)}$ 個の小行列に分割し，分割並列消去アルゴリズム（I）のステップ(2)～(5)を再び適用する．すなわち，非対角要素を消去しつつ新しい要素 $f_{(ik^{(2)}+j)k^{(1)}}''$ $(i=1,2,\cdots,p^{(2)}-1;\ j=1,2,\cdots,k^{(2)})$ と $g_{(ik^{(2)}+j-1)k^{(1)}}'$ ($i=0$ のとき $j=2,3,\cdots,k^{(2)}$; $i=1,2,\cdots,p^{(2)}-2$ のとき $j=1,2,\cdots,k^{(2)}$) を付加する．続いて $f_{(ik^{(2)}+j)k^{(1)}}''$ と $g_{(ik^{(2)}+j-1)k^{(1)}}'$ を消去して係数行列の対角行列化を行ったのち，解を求め，方程式(4)を得る．解は $r^{(2)\prime}$ に求まっているが，$r^{(2)}$ が必要に応じて変化したため，各要素は ″ をつけて表している．

$$A^{(2)\prime}x^{(2)}=r^{(2)\prime} \qquad (4)$$

ただし，

$$A^{(2)\prime}=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&\cdot&&\\&&&1&\\&&&&1\end{bmatrix},\quad r^{(2)\prime}=\begin{bmatrix}r_{k^{(1)}}''\\r_{2k^{(1)}}''\\\cdot\\\cdot\\r_{p^{(1)}k^{(1)}}''\end{bmatrix}$$

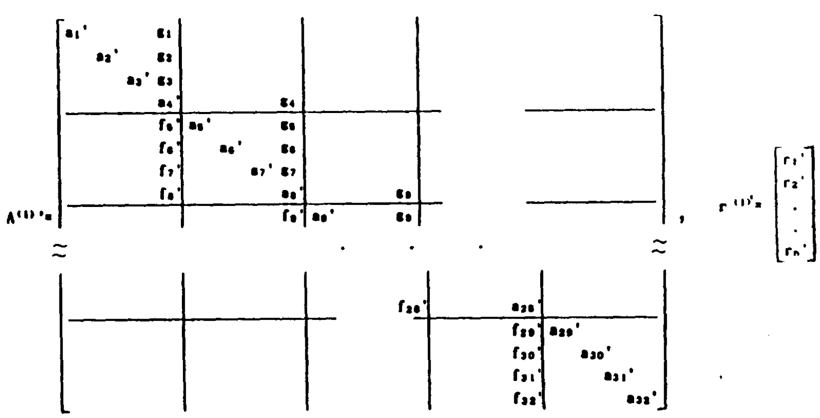

図2　図1の例に対してステップ(1)を適用して b_i, c_i を消去した後の行列の形

Fig. 2 The block tridiagonal form when all b_i, c_i have been vanished.

なおこのステップ(2)をプログラム化するとき，$A^{(2)}$ および $r^{(2)}$ のために新しい記憶場所を確保する必要はない．それを明確に示すために，このステップ(2)では理論的な $A^{(2)}$ の s 行の添字は $sk^{(1)}$ と表現している．

ステップ(3) (4)式で(2)式の一部を置き換えた後，係数行列を対角化する．

(2)式の第 $ik^{(1)}$ 行 $(i=1,2,\cdots,p^{(1)})$ を，(4)式の第 i 行 $(i=1,2,\cdots,p^{(1)})$ でそれぞれ置き換えた行列を(5)式とする．

$$A^{*\prime}x=r^{*\prime} \tag{5}$$

図4に，$n=32$, $k^{(1)}=4$, $p^{(1)}=8$ のときの $A^{*\prime}$, $r^{*\prime}$ を示す．(5)式に対して，すべての $f_{ik^{(1)}+j}{}'$ $(i=1,2,\cdots,p^{(1)}-1;\ j=1,2,\cdots,k^{(1)}-1)$ と $g_{ik^{(1)}+j-1}$ $(i=0,1,\cdots,p^{(1)}-2;\ j=2,3,\cdots,k^{(1)})$ を次の(6)式を用いて並列に消去して，対角線形方程式(7)を得る．ただし，ベクトル r^* の各要素を $r_i{}^*$ で表す．

$$r_{ik^{(1)}+j}{}^*=r_{ik^{(1)}+j}{}'-r_{ik^{(1)}}{}''\times f_{ik^{(1)}+j}{}'-r_{(i+1)k^{(1)}}{}''\times g_{ik^{(1)}+j}$$

(ただし，$f_1{}'\sim f_{k^{(1)}-1}{}'=0$,

$g_{(p^{(1)}-1)k^{(1)}+1}\sim g_{(p^{(1)}-1)k^{(1)}+k^{(1)}-1}=0$ とする．)

$(i=0,1,\cdots,p^{(1)}-1;\ j=1,2,\cdots,k^{(1)}-1)$ (6)

$$A^*x=r^* \tag{7}$$

A^* の主対角要素は $A^{*\prime}$ の主対角要素と，r^* の $ik^{(1)}$ 要素は $r^{*\prime}$ の対応する要素とそれぞれ同じであり，$a_{ik^{(1)}+j}{}^*$ および $r_{ik^{(1)}}{}^*$ と表す．A^* の非対角要素は0である．

ステップ(4) 対角線形方程式を解く．

並列に(8)式を計算する．

$$x_{ik^{(1)}+j}=r_{ik^{(1)}+j}{}^*/a_{ik^{(1)}+j}{}^*$$

$(i=0,1,\cdots,p^{(1)}-1;\ j=1,2,\cdots,k^{(1)}-1)$ (8)

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix} a_4' & g_4 & & & & & & \\ f_8' & a_8' & g_8 & & & & & \\ & f_{12}' & a_{12}' & g_{12} & & & & \\ & & f_{16}' & a_{16}' & g_{16} & & & \\ & & & f_{20}' & a_{20}' & g_{20} & & \\ & & & & f_{24}' & a_{24}' & g_{24} & \\ & & & & & f_{28}' & a_{28}' & 0 \\ & & & & & & f_{32}' & a_{32}' \end{bmatrix},\quad r^{(2)}=\begin{bmatrix} r_4' \\ r_8' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{32}' \end{bmatrix},\quad x^{(2)}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_8 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{32} \end{bmatrix}$$

図3 ステップ(2)で対象とする三重対角行列
Fig. 3 The tridiagonal matrix which is solved in the step (2).

残りの解の成分は(9)式で与えられる．

$$x_{ik^{(1)}}=r_{ik^{(1)}}{}^* \quad (i=1,2,\cdots,p^{(1)}) \tag{9}$$

表1に二重分割並列消去法のベクトル演算総数を列記する．表中「三重対角線形方程式を解く場合」というのは，右辺ベクトルが1個のとき解を求めるのに必要な演算回数である．「右辺の計算」というのは，同じ係数行列で右辺ベクトルだけ異なっているときに，1個の右辺につき増加する回数である．表からわかるように二重分割並列消去法のベクトル演算総数 F_2 は

$$F_2=5(k^{(1)}+k^{(2)})+3p^{(2)}+1 \tag{10}$$

である．

[定理1] n 次の三重対角線形方程式に，二重分割法が適用できるための必要十分条件は，次元数 n が12以上であって，かつ三項に因数分解できることである．

〈証明〉 $n\geqq 12$ であって三項に因数分解できるから，どれかの因数は3以上である．それを $p^{(2)}$ としても一般性は失われないので次のように表記できる．

$$n=k^{(1)}\times k^{(2)}\times p^{(2)} \quad (k^{(1)}, k^{(2)}\geqq 2,\ p^{(2)}\geqq 3) \tag{11}$$

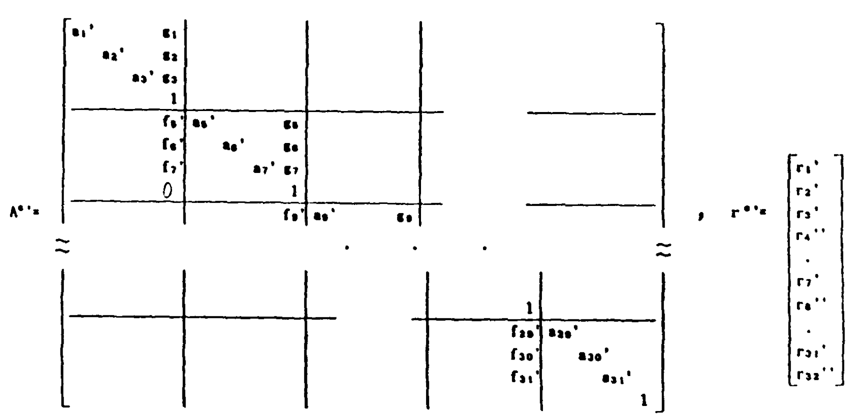

図4 図2の行列に(4)式を埋め込み，ステップ(3)で対象とする $A^{*\prime}$, $r^{*\prime}$ の形
Fig. 4 The model block tridiagonal form in the step (3).

表 1 二重分割並列消去法のベクトル演算総数
Table 1 Vector operation counts in the double-partitioned parallel elimination method.

	三重対角線形方程式を解く場合				右辺の計算			
	ベクトル長	除	乗	加(減)	ベクトル長	除	乗	加(減)
ステップ(1)	$p^{(1)}$	$k^{(1)}-1$			$p^{(1)}$		$2k^{(1)}-3$	$2k^{(1)}-3$
	$3p^{(1)}-1$		$k^{(1)}-1$		$p^{(1)}-1$		1	1
	$2p^{(1)}$			$k^{(1)}-1$	1		1	1
	$n-p^{(1)}$	1						
	2		1	1				
	$3p^{(1)}-2$		$k^{(1)}-2$					
	$2p^{(1)}-1$			$k^{(1)}-2$				
	$3p^{(1)}-3$		1					
	$2p^{(1)}-2$			1				
ステップ(2)	$p^{(2)}$	$k^{(2)}-1$			$p^{(2)}$		$2k^{(2)}-3$	$2k^{(2)}-3$
	$3p^{(2)}-1$		$k^{(2)}-1$		$p^{(2)}-1$		1	1
	$2p^{(2)}$			$k^{(2)}-1$	1		1	1
	$p^{(1)}-p^{(2)}$	1			$k^{(2)}$		2	2
	2		1	1	$2k^{(2)}$		$p^{(2)}-2$	$p^{(2)}-2$
	$3p^{(2)}-2$		$k^{(2)}-2$		$p^{(1)}$	1		
	$2p^{(2)}-1$			$k^{(2)}-2$				
	$3p^{(2)}-3$		1					
	$2p^{(2)}-2$			1				
	$k^{(2)}$	2						
	$2k^{(2)}$	$p^{(2)}-2$	$p^{(2)}/2+2$	$p^{(2)}/2+2$				
	$4k^{(2)}$		$p^{(2)}/2-2$	$p^{(2)}/2-2$				
	$p^{(1)}$	1						
ステップ(3)	$2n-2p^{(1)}$		1		$2n-2p^{(1)}$		1	
	$n-p^{(1)}$			2	$n-p^{(1)}$			2
ステップ(4)	$n-p^{(1)}$	1			$n-p^{(1)}$	1		
合計		$k^{(1)}+k^{(2)}+p^{(2)}+2$	$2k^{(1)}+2k^{(2)}+p^{(2)}-1$	$2k^{(1)}+2k^{(2)}+p^{(2)}$		2	$2k^{(1)}+2k^{(2)}+p^{(2)}-1$	$2k^{(1)}+2k^{(2)}+p^{(2)}$

一方，二重分割法のステップ(1)，(2)でそれぞれ分割並列消去アルゴリズム(I)が適用できるためには

$$\begin{cases} n=k^{(1)}\times p^{(1)} & (n\geqq 6,\ k^{(1)}\geqq 2,\ p^{(1)}\geqq 3) \\ p^{(1)}=k^{(2)}\times p^{(2)} & (p^{(1)}\geqq 6,\ k^{(2)}\geqq 2,\ p^{(2)}\geqq 3) \end{cases} \tag{12}$$

であることが必要十分であるが，(11)式と(12)式は明らかに同値である． (証明終了)

3. 多重分割並列消去法について

三重対角線形方程式(1)を解くために，分割並列消去アルゴリズム(I)の考えをm回利用する方法を述べる．この方法をm重（または多重）分割並列消去法と名付けるが，m重（または多重）分割法と簡単に表記することもある．$m=2$ の場合が前記の二重分割法である．

$m\geqq 3$ のとき，手順は以下のようであるが，次元 n は(13)式の形，すなわち(14)式の形に因数分解できるものとする．

$$n=k^{(1)}\times p^{(1)},\ p^{(1)}=k^{(2)}\times p^{(2)},\ \cdots,\ p^{(m-1)}=k^{(m)}\times p^{(m)}$$
$$(k^{(i)}\geqq 2,\ \text{ただし}\ i=1,2,\cdots,m\ ;\ p^{(m)}\geqq 3) \tag{13}$$

$$n=k^{(1)}\times k^{(2)}\times\cdots\times k^{(m)}\times p^{(m)}$$
$$(k^{(i)}\geqq 2,\ \text{ただし}\ i=1,2,\cdots,m\ ;\ p^{(m)}\geqq 3) \tag{14}$$

ステップ(1) 小行列に分割して非対角要素を並列に消去する．

$A^{(1)}=A, r^{(1)}=r, x^{(1)}=x$ とおき，行列 $A^{(1)}$ を $k^{(1)}$ 次の $p^{(1)}\times p^{(1)}$ 個の小行列に分割する．二重分割法のステップ(1)と全く同じ手順で，図2の形の式(2)を得る．

ステップ(2) 「小三重対角線形方程式を構成し非対角要素を消去すること」を繰り返す．

次の事柄を $t=1$ から $m-2$ まで繰り返す．

「$A^{(t)\prime}x^{(t)}=r^{(t)\prime}$ から第 $ik^{(t)}$ 行 $(i=1,2,\cdots,p^{(t)})$

を抜き出して次元数 $p^{(t)}$ の新しい三重対角線形方程式 $A^{(t+1)}x^{(t+1)}=r^{(t+1)}$ を構成する．行列 $A^{(t+1)}$ を $k^{(t+1)}$ 次の $p^{(t+1)}\times p^{(t+1)}$ 個の小行列に分割し，分割並列消去アルゴリズム（I）の手順を用いて非対角要素の消去を行い，図2の形の線形方程式 $A^{(t+1)\prime}x=r^{(t+1)\prime}$ を構成する．」

ステップ（3） 小三重対角線形方程式を解く．

$$A^{(m-1)\prime}x^{(m-1)}=r^{(m-1)\prime} \tag{15}$$

から第 $ik^{(m-1)}$ 行 $(i=1, 2, \cdots, p^{(m-1)})$ を抜き出して次元数 $p^{(m-1)}$ の三重対角線形方程式(16)を構成する．

$$A^{(m)}x^{(m)}=r^{(m)} \tag{16}$$

$p^{(m-1)}=k^{(m)}\times p^{(m)}$ を用いて分割並列消去アルゴリズム（I）のステップ（1）～（5）を適用し，

$$A^{(m)\prime}x^{(m)}=r^{(m)\prime} \tag{17}$$

を得る．この $A^{(m)\prime}$ は単位対角行列であり，$x^{(m)}=r^{(m)\prime}$ である．

ステップ（4） 後退代入する．

$t=m-1$ から1まで次の手順を繰り返す．

「(17)式の形の $A^{(t+1)\prime}x^{(t+1)}=r^{(t+1)\prime}$ の第 i 行 $(i=1, 2, \cdots, p^{(t)})$ でそれぞれ $A^{(t)\prime}x^{(t)}=r^{(t)\prime}$ の第 $ik^{(t)}$ 行 $(i=1, 2, \cdots, p^{(t)})$ をいれかえた方程式(18)を形成する．

$$A^{(t)*\prime}x^{(t)}=r^{(t)*\prime} \tag{18}$$

表2 m 重分割並列消去法のベクトル演算総数

Table 2 Vector operation counts in the multi-partitioned parallel elimination method.

	三重対角線形方程式を解く場合				右辺の計算			
	ベクトル長	除	乗	加(減)	ベクトル長	除	乗	加(減)
ステップ(1)	$p^{(1)}$	$k^{(1)}-1$			$p^{(1)}$		$2k^{(1)}-3$	$2k^{(1)}-3$
	$3p^{(1)}-1$		$k^{(1)}-1$		$p^{(1)}-1$		1	1
	$2p^{(1)}$			$k^{(1)}-1$	1		1	1
	$n-p^{(1)}$	1						
	2		1	1				
	$3p^{(1)}-2$		$k^{(1)}-2$					
	$2p^{(1)}-1$			$k^{(1)}-2$				
	$3p^{(1)}-3$		1					
	$2p^{(1)}-2$			1				
ステップ(2) $(t=1, 2, \cdots, m-2)$	$p^{(t+1)}$	$k^{(t+1)}-1$			$p^{(t+1)}$		$2k^{(t+1)}-3$	$2k^{(t+1)}-3$
	$3p^{(t+1)}-1$		$k^{(t+1)}-1$		$p^{(t+1)}-1$		1	1
	$2p^{(t+1)}$			$k^{(t+1)}-1$	1		1	1
	$n-p^{(t+1)}$	1						
	2		1	1				
	$3p^{(t+1)}-2$		$k^{(t+1)}-2$					
	$2p^{(t+1)}-1$			$k^{(t+1)}-2$				
	$3p^{(t+1)}-3$		1					
	$2p^{(t+1)}-2$			1				
ステップ(3)	$p^{(m)}$	$k^{(m)}-1$			$p^{(m)}$		$2k^{(m)}-3$	$2k^{(m)}-3$
	$3p^{(m)}-1$		$k^{(m)}-1$		$p^{(m)}-1$		1	1
	$2p^{(m)}$			$k^{(m)}-1$	1		1	1
	$p^{(m-1)}-p^{(m)}$	1			$k^{(m)}$		2	2
	2		1	1	$2k^{(m)}$		$p^{(m)}-2$	$p^{(m)}-2$
	$3p^{(m)}-2$		$k^{(m)}-2$		$p^{(m-1)}$	1		
	$2p^{(m)}-1$			$k^{(m)}-2$				
	$3p^{(m)}-3$		1					
	$2p^{(m)}-2$			1				
	$k^{(m)}$	2						
	$2k^{(m)}$	$p^{(m)}-2$	$p^{(m)}/2+2$	$p^{(m)}/2+2$				
	$4k^{(m)}$		$p^{(m)}/2-2$	$p^{(m)}/2-2$				
	$p^{(m-1)}$	1						
ステップ(4)	$2p^{(t-1)}-2p^{(t)}$		1		$(2p^{(t-1)}-2p^{(t)})$		1	
$(t=m-1, \cdots, 2, 1)$	$p^{(t-1)}-p^{(t)}$	1		2	$(p^{(t-1)}-p^{(t)})$	1		2
合計	$5\{k^{(1)}+k^{(2)}+\cdots+k^{(m)}\}+3p^{(m)}+2m-3$				$4\{k^{(1)}+k^{(2)}+\cdots+k^{(m)}\}+2p^{(m)}+2m-3$			

注) いずれも分割並列消去アルゴリズム（I）のステップ（4）相当部分は偶数の場合で計算したもの．

(18)式の係数は図4のような形である.

(18)式に対して非対角要素を消去するために(6)式に準じた計算を行い，ついで対角線形方程式を解くことによって(17)式の形の新しい $A^{(i)\prime}x^{(i)}=r^{(i)\prime}$ を得る．この $A^{(i)\prime}$ は単位対角行列である.」

方程式の解は $r^{(1)\prime}$ に求まっている.

表2に m 重分割並列消去法のベクトル演算数を示す．表から総ベクトル演算数は

$$5(k^{(1)}+k^{(2)}+\cdots+k^{(m)})+3p^{(m)}+2m-3 \qquad (19)$$

であることがわかる．(19)式は $m=1$ のときは分割並列消去アルゴリズム(I)の，$m=2$ のときは二重分割並列消去法の総ベクトル演算数とも一致している．また，(19)式の形は，$p^{(m)}\geqq k^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ となるものを $p^{(m)}$ とするほうがよく，$k^{(i)}$ と $k^{(j)}$ は交換しても演算数は変わらないことを示す．このため，以下の議論で，任意の $k^{(i)}$ のもつ性質を $k^{(m)}$ で代表させて述べることがある.

［定理2］ n 次の三重対角線形方程式に m 重分割法が適用できるための必要十分条件は，次元数 n が $n\geqq 6\times 2^{m-1}$ であって，かつ $m+1$ 項に因数分解できることである.

〈証明〉 略.

$m=2$ の場合が定理1であり，定理2の証明は定理1に準じる．$m=1$ の場合が分割並列消去アルゴリズム(I)に対応する.

4. 最適の m および分割の仕方について

m 重分割法を用いた時のベクトル演算数が m および $k^{(i)}$, $p^{(m)}$ の関数であることをはっきりさせる記号として $F(m\,;k^{(1)},k^{(2)},\cdots,k^{(m)}\,;p^{(m)})$ を用いると(19)式は

$$F(m\,;k^{(1)},k^{(2)},\cdots,k^{(m)}\,;p^{(m)})$$
$$=5\times(k^{(1)}+k^{(2)}+\cdots+k^{(m)})+3\times p^{(m)}+2\times m-3$$

と表される.

次元数が24の三重対角行列を例にとると，$n=24=2^3\times 3$ だから，定理2より三重分割可能である．$k^{(1)}=k^{(2)}=k^{(3)}=2$, $p^{(3)}=3$ とすると

$$F(1\,;2\,;12)=45$$
$$F(2\,;2,2\,;6)=39$$
$$F(3\,;2,2,2\,;3)=42$$

この例からわかるように，三重分割可能ではあるが，上記の分割法に対しては二重分割法のほうが有利である．ところが $n=4\times 6$ と分割すると

$$F(1\,;4\,;6)=37.$$

つまり分割並列消去アルゴリズム(I)を用いるほうがさらに有利である．したがって，m 重分割法を用いる場合，m の値をいくらにすべきかという問題が生じる.

任意の正の整数 n の素因数分解を，次の(20)式のように表す.

$$n=r_1^{\alpha_1}\times r_2^{\alpha_2}\times\cdots\times r_s^{\alpha_s},$$
$$(2\leqq r_1<r_2<\cdots<r_s\,;\ 各\ \alpha_i\geqq 1) \qquad (20)$$

このとき，n $(\geqq 6)$ の三重対角線形方程式の可能な分割重数の最大値 $m_{\max}$ は

$$m_{\max}=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)-1 \qquad (21)$$

である.

［定義］ 最適な分割重数 m_l

n を固定し，その n に対して m を固定すると，n の $m+1$ 項の因数分解の仕方は有限であり，対応するベクトル演算数の最小値が存在する．それを $F_{\min}(m)$ で表すと，集合 $\{F_{\min}(1), F_{\min}(2),\cdots,F_{\min}(m_{\max})\}$ の最小値がある．その最小値を与える m の最小値を m_l と表し，最適な分割重数と呼ぶ．当然，$m_l\leqq m_{\max}$ である.

［定理3］ 9以上の奇数 n が二項以上に素因数分解できるならば $p^{(m_l)}=r_s$, 各 $k^{(i)}$ を残りの各素因数とするとき最適分割となる．すなわち,

$$f_{\mathrm{sum}}=\underbrace{r_1+\cdots+r_1}_{\alpha_1\text{ 個}}+\cdots+\underbrace{r_{s-1}+\cdots+r_{s-1}}_{\alpha_{s-1}\text{ 個}}+\underbrace{r_s+\cdots+r_s}_{(\alpha_s-1)\text{ 個}}$$

とすると,

$$m_l=m_{\max}$$
$$F_{\min}(m_l)=F(m_{\max}\,;\underbrace{r_1,\cdots,r_1}_{\alpha_1\text{ 個}},\cdots,\underbrace{r_{s-1},\cdots,r_{s-1}}_{\alpha_{s-1}\text{ 個}},\underbrace{r_s,\cdots,r_s}_{(\alpha_s-1)\text{ 個}}\,;r_s)$$
$$=5f_{\mathrm{sum}}+3(r_s-1)+2m_{\max}$$

である.

〈証明〉

(i) n が二項のみに素因数分解できる場合

各因数は3以上である．したがって，分割並列消去アルゴリズム(I)が適用できる方程式であり，$m_l=1$. また，明らかに $m_{\max}=1$. ゆえに，$m_l=m_{\max}$ である．分割については(19)式の考察から，定理の結論を得る.

(ii) n が三項以上に素因数分解できる場合

素因数分解した状態を(20)式のように表すと，n が

奇数という条件から $r_i \geqq 3$ $(i=1,2,\cdots,s)$ である．n は $m_{\max}+1$ 項に因数分解でき，かつ $n \geqq 9\times 2^{m_{\max}-1} > 6\times 2^{m_{\max}-1}$ ゆえ，定理2より $m_{\max}$ 重分割並列消去法が適用できる．$2\leqq m < m_{\max}$ なる任意の m に対して m 重分割法を考える．対応する分割を $k^{(1)}, k^{(2)}, \cdots, k^{(m)}, p^{(m)}$ とすると，いずれかの要素が二項に因数分解できる．

（イ） $k^{(m)}=a\times b$ と表せる場合

$$\begin{aligned}&F(m;k^{(1)},\cdots,a\times b;p^{(m)})\\&\quad -F(m+1;k^{(1)},\cdots,a,b;p^{(m)})\\&\quad =5(a\times b-a-b)-2 \qquad (22)\end{aligned}$$

(22)式は，$a,b\geqq 3$ のとき正である（**図5参照**）．

（ロ） $p^{(m)}=a\times b$ と表せる場合

$$\begin{aligned}&F(m;k^{(1)},\cdots,k^{(m)};a\times b)\\&\quad -F(m+1;k^{(1)},\cdots,k^{(m)},a;b)\\&\quad =3a\times b-5a-3b-2 \qquad (23)\end{aligned}$$

(23)式は，$a,b\geqq 3$ のとき正である（**図6参照**）．

（イ）（ロ）の結果より，各素因数を分割数とするほうが良いことがわかる．ゆえに，$m_t=m_{\max}$ であり，(19)式を考慮すると最適の分割法として定理の結論を得る．（証明終了）

［系］ $n=q^{\alpha}$ （$q\geqq 3$ の素数；$\alpha\geqq 2$）であれば

$$m_t=\alpha-1$$

$$F_{\min}(m_t)=F(\alpha-1;\underbrace{q,\cdots,q}_{(\alpha-1)\text{ 個}};q)=(5\alpha-2)\times q+2\alpha-5$$

である．

〈証明〉 略．

以降の証明中，図5と図6を参照することが多いので，少し説明を加えておく．図5は $k^{(m)}$ について次のことを示している（曲線の方程式は $a=1+7/(5b-5)$）．

(5-正)：曲線より上の領域にある点は(22)式が正，すなわち $k^{(m)}=a\times b$ なら分割数を増やして $k^{(m)\prime}=a$, $k^{(m+1)\prime}=b$ と分解するほうが，ベクトル演算数が減ることを示す．例えば $k^{(m)}=6$ なら $k^{(m)\prime}=2, k^{(m+1)\prime}=3$ とすべきことなど．

(5-零)：曲線上の点は(22)式が0，すなわち $k^{(m-1)}=a$, $k^{(m)}=b$ なら分割数を減らして $k^{(m-1)\prime}=a\times b$ にするほうが良いことを示す（ベクトル演算数は同じだが，m_t の観点からは有効）．ただし，現在この曲線上に a,b ともに整数の点は存在しない．

(5-負)：曲線より下の領域にある点は(22)式が負，すなわち $k^{(m-1)}=a$, $k^{(m)}=b$ のとき分割数を減らして $k^{(m-1)\prime}=a\times b$ にするほうがベクトル演算数も減ることを示している．$k^{(i)}\geqq 2$ の条件を考慮すると問題となるのは点(2, 2)のみであり，これは $k^{(m-1)}=2, k^{(m)}=2$ なら，$k^{(m-1)\prime}=4$ とすべきであることを示す．

図6は分割数の増減を伴う形での $k^{(m)}, p^{(m)}$ の関係を示している（曲線の方程式は $a=1+7/(3b-5)$）．

(6-正)：曲線より上の領域にある点は(23)式が正，すなわち $p^{(m)}=a\times b$ なら分割数を増やして $k^{(m+1)}=a$, $p^{(m+1)}=b$ と分解するほうが，ベクトル演算数が減ることを示す．例えば，$p^{(m)}=20$ なら $k^{(m+1)}=4$, $p^{(m+1)}=5$，または $k^{(m+1)}=2$, $p^{(m+1)}=10$ とすべきことなど．

(6-零)：曲線上の点は(23)式が零，すなわち $k^{(m)}=a$,

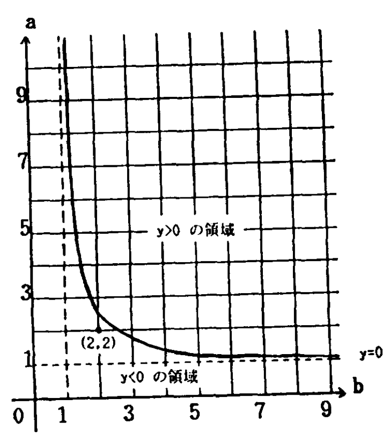

図5 $y=F(m;k^{(1)},\cdots,a\times b;p^{(m)})-F(m+1;k^{(1)},\cdots,a,b;p^{(m)})=5(a\times b-a-b)-2$

Fig. 5 $y=F(m;k^{(1)},\cdots,a\times b;p^{(m)})-F(m+1;k^{(1)},\cdots,a,b;p^{(m)})=5(a\times b-a-b)-2.$

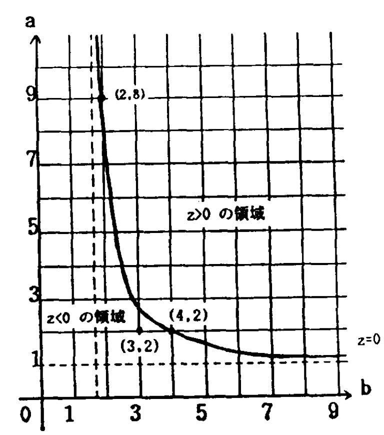

図6 $z=F(m;k^{(1)},\cdots,k^{(m)};a\times b)-F(m+1;k^{(1)},\cdots,k^{(m)},a;b)=3a\times b-5a-3b-2$

Fig. 6 $z=F(m;k^{(1)},\cdots,k^{(m)};a\times b)-F(m+1;k^{(1)},\cdots,k^{(m)},a;b)=3a\times b-5a-3b-2.$

$p^{(m)}=b$ のとき，$p^{(m)}$ に $k^{(m)}$ を吸収させて分割数を減らし，$p(m-1)=a\times b$ とするほうがよい（ベクトル演算数は同じだが，m_t の観点からは有効）ことを示す．現在曲線上の b $(b\geqq3)$, a ともに整数の点は(4, 2)のみであり，$k^{(m)}=2$, $p^{(m)}=4$ のときは $p^{(m-1)}=8$ にするほうがよいことを示す．

(6-負)：曲線より下の領域にある点は(23)式が負，すなわち $k^{(m)}=a, p^{(m)}=b$ のとき，$p^{(m)}$ に $k^{(m)}$ を吸収させて分割数を減らし，$p^{(m-1)}=a\times b$ とするほうがベクトル演算数も減ることを示す．該当する点は(3, 2)のみ，すなわち $k^{(m)}=2, p^{(m)}=3$ のときは，$p^{(m-1)}=6$ とするほうがよいことを示す．

［定理 4］ $n=2^{\alpha}$, $(\alpha\geqq4)$ のとき $m_t=t-1$ で，

$\alpha=2t$ $(t\geqq2)$ ならば

$$F_{\min}(m_t)=F(t-1;\underbrace{4,\cdots,4}_{(t-1)\text{ 個}};4)=22t-13$$

$\alpha=2t+1$ $(t\geqq2)$ ならば

$$F_{\min}(m_t)=F(t-1;\underbrace{4,\cdots,4}_{(t-1)\text{ 個}};8)=22t-1$$

〈証明〉 $2\leqq m\leqq m_{\max}$ のある m に対して，$n=k^{(1)}\times k^{(2)}\times\cdots\times k^{(m)}\times p^{(m)}$ の因数分解に対応する m 重分割を考える．まず，$k^{(m)}=2^s$ $(s\geqq3)$ であるとする．$s=\beta_1+\beta_2\geqq3$ $(\beta_1, \beta_2\geqq1)$ として，$a=2^{\beta_1}$, $b=2^{\beta_2}$, $k^{(m)}=a\times b$ とおくと，a, b のうちいずれかは4以上，もう一つは2以上になる．したがって，(5-正)に述べたことから，2^{β_1} と 2^{β_2} に分けるほうがベクトル演算数を減らす．また，(5-負)で述べたことにより，単独の分割数として2が複数個あるなら4ずつに分割しなおすほうがよいことを考えあわせると，$k^{(i)}=4$（ただし $p^{(m)}$ のことを考慮しなければ α が奇数のときは一つの $k^{(i)}$ のみ2）とする．

ところで，n が2のべき乗であることから $p^{(m)}\geqq4$ である．(6-正)は，$p^{(m)}$ が合成数で $p^{(m)}=k^{(m+1)}\times p^{(m+1)}$, $(p^{(m+1)}\geqq4)$ の場合は $k^{(m+1)}$ と $p^{(m+1)}$ に分割すべきであることを示しているが，このことを繰り返し適用すると，結局最初から $p^{(m)}=4$ とすればよいことを示す．このとき，(6-零)より，単独の分割として2が一つだけ残るときは $p^{(m)}$ に繰り入れて分割数を減らし，$p^{(m)}=8$ とするべきである．

したがって $\alpha=2t$ $(t\geqq2)$ ならば $p^{(m)}=4$, $\alpha=2t+1$ $(t\geqq2)$ ならば $p^{(m)}=8$ となり，定理の結論を得る．

（証明終了）

次に，素因数としていくつかの2といくつかの3以上の素数が同時に含まれている場合を考えてみよう．

［定理 5］ 12以上の数 n の素因数分解を次のように表す．

$$n=2^{\beta}\times r_1^{\alpha_1}\times r_2^{\alpha_2}\times\cdots\times r_s^{\alpha_s}$$

（ただし，$\beta\geqq1$; $s\geqq1$; $\alpha_i\geqq1$ $(i=1,\cdots,s)$; $r_s>r_{s-1}>\cdots>r_2>r_1\geqq3$）

（1） $\beta=2t$ $(t\geqq1)$ のとき

● $r_s=3$ ならば（このとき，$s=1$ である）

$$m_t=t+\alpha_1-1,$$

$$F_{\min}(m_t)=F(m_t;\underbrace{4,\cdots,4}_{(t-1)\text{ 個}},\underbrace{3,\cdots,3}_{\alpha_1\text{ 個}};4)$$

$$=17\alpha_1+22t-13$$

● $r_s\geqq5$ ならば

$$m_t=t+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s-1$$

$$F_{\min}(m_t)=F(m_t;\underbrace{4,\cdots,4}_{t\text{ 個}},\underbrace{r_1,r_2,\cdots}_{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s-1)\text{ 個}};r_s)$$

（2） $\beta=2t+1$ $(t\geqq0)$ のとき

● $r_s=3$ ならば（このとき，$s=1$ である）

$$m_t=t+\alpha_1-1,$$

$$F_{\min}(m_t)=F(m_t;\underbrace{4,\cdots,4}_{t\text{ 個}},\underbrace{3,\cdots,3}_{(\alpha_1-1)\text{ 個}};6)$$

$$=17\alpha_1+22t-2$$

● $r_s\geqq5$ ならば

$$m_t=t+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$$

$$F_{\min}(m_t)=F(m_t;\underbrace{4,\cdots,4}_{t\text{ 個}},2,\underbrace{r_1,r_2,\cdots}_{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s-1)\text{ 個}};r_s)$$

〈証明〉 基本的には，定理3の証明から各 r_j の値そのものを $k^{(i)}$，定理4の証明から 2^{β} は4ずつに区切って $k^{(i)}$ とするほうがベクトル演算数は少なくなることがわかる．問題は $p^{(m)}\geqq3$ のときの $k^{(m)}$ と $p^{(m)}$ の関係であるが，$p^{(m)}$ への3以上の因数の繰り入れは分割数を減らすので（6-正）の場合にあたり，不利である．したがって2を $p^{(m)}$ に繰り入れるか否かが問題となる．

（1） $\beta=2t$ $(t\geqq1)$ の場合

最初，$p^{(m)}=r_s$ とする．

$r_s=3$ のときを見てみよう．このとき $s=1$ である．2を $p^{(m)}$ に繰り入れる場合，分割数の増減はない．

$$F(m;3,\cdots,3,\underbrace{4,\cdots,4}_{t\text{ 個}};p^{(m)})$$

$$-F(m;3,\cdots,3,\underbrace{4,\cdots,4}_{(t-1)\text{ 個}},2;2\times p^{(m)})$$

$$=10-3p^{(m)} \qquad (24)$$

$p^{(m)}=3$ のとき(24)式は正だから，$k^{(m)}$ を2に，$p^{(m)}$ を6にすべきである．ところが，$p^{(m)}\geqq k^{(i)}$ がよいと

いう観点からは $p^{(m)}=r_s=3$ ではなく，$p^{(m)}=4$ とするほうがよい．このとき(24)式は負だから（ただし，$t\geqq 2$ で t を $t-1$ と読み替える．$t=1$ のときは繰り入れるべき2が存在しないので考えなくてよい.）2を $p^{(m)}$ に繰り入れないほうがよい．

そこで両者を比較する．

$$F(t+\alpha_1-1;\underbrace{4,\cdots,4}_{(t-1)\text{個}},\underbrace{3,\cdots,3}_{\alpha_1\text{個}};4)$$

$$-F(t+\alpha_1-1;\underbrace{4,\cdots,4}_{(t-1)\text{個}},2,\underbrace{3,\cdots,3}_{(\alpha_1-1)\text{個}};2\times 3)=-1 \qquad (25)$$

(25)式は負だから，$p^{(m)}=4$ とするほうが有利である．

$r_s\geqq 5$ のときを見てみよう．$p^{(m)}=r_s$ として2を $p^{(m)}$ に繰り入れる．

$$F(m;\underbrace{4,\cdots,4}_{t\text{個}},\underbrace{r_1,r_2,\cdots}_{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s-1)\text{個}};r_s)$$

$$-F(m;\underbrace{4,\cdots,4}_{(t-1)\text{個}},2,\underbrace{r_1,r_2,\cdots}_{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s-1)\text{個}};2\times r_s)$$

$$=10-3r_s \qquad (26)$$

(26)式は $r_s\geqq 5$ のとき負であるから，2を $p^{(m)}$ に繰り入れないほうが良いとわかる．これはまた $p^{(m)}\geqq k^{(i)}$ という条件を満たしている．したがって定理5(1)の結論を得る．

(2) $\beta=2t+1$ $(t\geqq 0)$ の場合

まず 2^β を4ずつに区切る．余った因数2の扱いであるが，単独で扱うか，分割数 $p^{(m)}$ に含ませるかである．

最初，$p^{(m)}=r_s$ とする．

$r_s=3$ のときは $p^{(m)}=3$ ゆえ(6-負)に述べたことから，2を $p^{(m)}$ に繰り入れるほうが良い．ところが，$t=0$ のときはこれでよいが，$t\geqq 1$ のときは $p^{(m)}\geqq k^{(i)}$ という観点から $p^{(m)}$ を4にとりかえた場合，(6-零)に述べたことからやはり2を $p^{(m)}$ に繰り入れて $p^{(m)}=8$ とするほうがよい．両者を比較すると，

$$F(t+\alpha_1-1;\underbrace{4,\cdots,4}_{(t-1)\text{個}},\underbrace{3,\cdots,3}_{\alpha_1\text{個}};2\times 4)$$

$$-F(t+\alpha_1-1;\underbrace{4,\cdots,4}_{t\text{個}},\underbrace{3,\cdots,3}_{(\alpha_1-1)\text{個}};2\times 3)=1 \qquad (27)$$

すなわちこの場合も，$p^{(m)}=6$ とするのがよく，定理5の(2)の $r_s=3$ のときの結論を得る．

$r_s\geqq 5$ のときは $p^{(m)}=r_s$ とすれば(6-正)より，分割数を減らす形で $p^{(m)}$ に2を繰り入れるのは不利である．$t=0$ のときはこの場合にあたるので，$p^{(m)}=r_s$ とする．$t\geqq 1$ のときは分割数を減らさず $p^{(m)}$ に2を繰り入れられるが，このとき $p^{(m)}=r_s$ のままの場合と比較すると

$$F(m;\underbrace{4,\cdots,4}_{(t-1)\text{個}},2,2,\underbrace{r_1,r_2,\cdots}_{(\alpha_1+\cdots+a_s-1)\text{個}};2\times r_s)$$

$$-F(m;\underbrace{4,\cdots,4}_{t\text{個}},2,\underbrace{r_1,r_2,\cdots}_{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s-1)\text{個}};r_s)$$

$$=3r_s-10 \qquad (28)$$

表3 各方法のベクトル演算総数の比較
(かっこ内は，その方法に対する m 重分割法の比率)

Table 3 Comparison of the vector operation counts.
(The numbers in the parentheses show the ratio to the each method.)

n	m_t 重分割法		Wang の分割法	Recursive doubling 法	Cyclic reduction 法
	m_t	演算回数			
$2^4=$ 16	1	31	64 (0.48)	65 (0.48)	77 (0.40)
$2^5=$ 32	1	43	96 (0.45)	82 (0.52)	96 (0.45)
$2^6=$ 64	2	53	144 (0.37)	99 (0.53)	115 (0.46)
$2^7=$ 128	2	65	208 (0.31)	116 (0.56)	134 (0.49)
$2^8=$ 256	3	75	304 (0.25)	133 (0.56)	153 (0.49)
$2^9=$ 512	3	87	432 (0.20)	150 (0.58)	172 (0.51)
$2^{10}=$ 1,024	4	97	624 (0.16)	167 (0.58)	191 (0.51)
$2^{11}=$ 2,048	4	109	880 (0.12)	184 (0.59)	210 (0.52)
$2^{12}=$ 4,096	5	119	1,264 (0.09)	201 (0.59)	229 (0.52)
$2^{13}=$ 8,192	5	131	1,776 (0.07)	218 (0.60)	248 (0.53)
$2^{14}=$ 16,384	6	141	2,544 (0.06)	235 (0.60)	267 (0.53)
$2^{15}=$ 32,768	6	153	3,568 (0.04)	252 (0.60)	286 (0.53)
$2^{16}=$ 65,536	7	163	5,104 (0.03)	269 (0.61)	305 (0.53)
$2^{17}=$ 131,072	7	175	7,152 (0.02)	286 (0.61)	324 (0.54)
$2^{18}=$ 262,144	8	185	10,224 (0.02)	303 (0.61)	343 (0.54)
$2^{19}=$ 524,288	8	197	14,320 (0.01)	320 (0.62)	362 (0.54)
$2^{20}=$1,048,576	9	207	20,464 (0.01)	337 (0.61)	381 (0.54)

(28)式は $r_i \geqq 5$ のとき正なので，2を $p^{(m)}$ に繰り入れないほうが良いことを示す．したがって，定理5(2)の $r_i \geqq 5$ の場合の結論を得る． (証明終了)

5. おわりに

表3に各方法のベクトル演算数を列記する．Wangの分割法，recursive doubling 法，cyclic reduction 法における演算回数は，文献5)のWangの論文，表Vをもとにして算出した．

多重分割並列消去法は，著者らが以前に発表した分割並列消去アルゴリズム(I)に基礎を置くが，それよりさらにベクトル演算数の少ない方法である．表3からわかるように，recursive doubling 法や cyclic reduction 法と比べてもなお少ない．

さらに良いことは，recursive doubling 法や cyclic reduction 法と違って計算機がパイプライン型かベクトル型か，行列の次元が2のべき乗であるか否かなどということと，独立な点である．すなわち，将来どのようなアーキテクチャの並列処理計算機が現れても，適用可能なアルゴリズムであるという利点をもっている．

参考文献

1) Stone, H. S.: An Efficient Parallel Algorithm for the Solution of a Tridiagonal Linear System of Equations, *J. ACM*, Vol. 20, No. 1, pp. 27-38 (Jan. 1973).
2) Stone, H. S.: Parallel Tridiagonal Equation Solvers, *ACM Trans. Math. Softw.*, Vol. 1, No. 4, pp. 289-307 (Dec. 1975).
3) Dubois, P. and Rodrigue, G.: An Analysis of the Recursive Doubling Algorithm, In Kuck, D. J., Lawrie, D. H. and Sameh, A. H. (eds.), *High Speed Computer and Algorithm Orgazination*, Academic Press, New York (1977).
4) Hockney, R. W.: A Fast Direct Solution of Poisson's Equation Using Fourier Analysis, J. ACM, Vol. 12, No. 1, pp. 95-113 (1965).
5) Wang, H. H.: A Parallel Method for Tridiagonal Equation, *ACM Trans. Math. Saftw.*, Vol. 7, No. 2, pp. 170-183 (June 1981).
6) 陳 華萌，井上知子，萩原 宏：三重対角線形方程式の分割並列消去法について，情報処理学会論文誌，Vol. 28, No. 9, pp. 899-906 (1987).

(昭和62年8月21日受付)
(平成元年1月17日採録)

陳 華萌

昭和14年生．昭和33年中国武漢大学数学学部数学学科卒業．同年同大学に勤務．電子計算機，自動化などの研究に従事．昭和55年同計算機科学学部助教授，現在に至る．計算機アーキテクチャ，分散処理，並列処理，人工知能などに興味をもつ．昭和54～57年中国電子計算機学会委員．昭和56～57年度京都大学情報工学科招へい外国人学者．

井上 知子

昭和20年生．昭和43年奈良女子大学理学部数学科卒業．同年京都大学数理解析研究所勤務．昭和51年香川大学経済学部管理科学科勤務．昭和55年京都大学工学部情報工学科に文部技官として勤務，現在に至る．

萩原 宏(正会員)

大正15年生．昭和25年京都大学工学部電気工学科卒業．NHKを経て，昭和32年京都大学工学部助教授，昭和36年同教授，現在に至る．工学博士．情報理論，パルス通信，電子計算機などの研究に従事．昭和31年度稲田賞受賞．昭和50年本学会論文賞受賞．昭和56～58年度本学会副会長．著書「電子計算機通論1～3」「マイクロプログラミング」など．電子情報通信学会，ACM，IEEE 各会員．