

多群中性子拡散方程式に現れる非対称行列系の一般固有値問題に対する ORTHOMIN (1) 法の適用†

末 富 英 一^{††} 関 本 博^{††}

原子炉理論における多群中性子拡散方程式のように物理現象をモデル化し、これを有限要素法や有限差分法により離散近似することによって、大型で疎な非対称行列を係数とする一般固有値問題が得られる場合がある。このような問題では、係数行列が非対称であるために、Rayleigh 商の最小化に共役勾配法 (CG 法) を用いるといった方法を採用することができなくなる。本論文では、Rayleigh 商以外の汎関数として残差ノルムを導入し、これに ORTHOMIN (1) 法 (共役残差法とも呼ばれている) を適用することにより、非対称行列系の最小固有値を求めることを提案した。さらに、係数行列に、不完全 LU 分解による前処理を施すことによって収束性の改善を試みた。例題として多群中性子拡散方程式を離散化して得られる一般固有値問題を取り上げた。その場合、係数行列の構造による影響を見るために左からの前処理と右からの前処理の 2 種類の前処理による比較を行った。その結果、ORTHOMIN (1) 法自体の収束は遅いこと、左からの前処理を施すと非収束現象を示すこと、右からの前処理を施したときは収束を大幅に加速できることが分かった。

1. はじめに

構造工学において、有限要素法 (の変位法) で定常振動問題を解く場合や、原子炉理論における中性子拡散方程式を有限差分法によって離散化した場合、一般固有値問題

$$A\phi = \lambda B\phi, \quad (1.1)$$

が得られる。これらの問題では、しばしば最小固有値とそれに対応した固有ベクトルを求めることが必要となる。その際、多くの問題では行列 A と B が大次元疎行列となることから反復法が用いられている。そのための解法としては逆反復法や共役勾配法 (CG 法) などがあげられる。

特に、CG 法は A と B が対称な場合に有効な算法であることが知られている^{1), 2)}。共役勾配法は、1952 年に Hestenes と Stiefel³⁾ によって開発された算法で、本来は対称正定値行列を係数とする連立 1 次方程式を解くための解法であり、最適化法の一つである。その後、Bradbury ら⁴⁾ は一般固有値問題の最小固有値を求める算法として CG 法を応用した。彼らは、Rayleigh 商

$$R(\phi) = (\phi, A\phi) / (\phi, B\phi), \quad (1.2)$$

を最小にするようなベクトルを CG 法を用いて見つけ、最小固有値を求めた。数値実験によると、この解

法は係数行列 A の条件数が小さいときに、収束が速くなるということが知られている²⁾。われわれは、CG 法を加速するための方法として係数行列 A を

$$A = U^T D U + E, \quad (1.3)$$

の形に不完全 Choleski 分解⁵⁾ し、この結果を用いて (1.1) 式を

$$(D^{1/2} U)^{-T} A (D^{1/2} U)^{-1} D^{1/2} U \phi = \lambda (D^{1/2} U)^{-T} B (D^{1/2} U)^{-1} D^{1/2} U \phi, \quad (1.4)$$

と変換し、上式に対して CG 法を適用した。その結果、前処理つき共役勾配法は高速で安定に収束することが分かった^{5), 6)}。

しかしながら、多群中性子拡散方程式を離散化して得られる一般固有値問題のように、 A および B が共に非対称行列になる⁶⁾ と、前述したような算法を適用することができなくなる。また、従来までの勾配法系の反復解法は、係数行列に対称性を仮定したのに対して適用されることが多く、この種の問題に適用された例はほとんど見られない。

一方、近年、非対称行列を係数に持つ連立 1 次方程式の解法として ORTHOMIN (1) 法⁷⁾ (あるいは共役残差法ともいう) が注目されている。

そこで、本研究では Rayleigh 商以外の汎関数に対して ORTHOMIN (1) 法を適用することにより、非対称行列系の一般固有値問題を勾配法系の反復解法で解くことを提案する。さらに、係数行列 A に前処理を施すことによって収束の加速を試みる。最後に、これらの方法をいくつかの問題に対して適用し、その収束特性を比較する。

† Application of ORTHOMIN (1) Method to Nonsymmetric Generalized Eigenvalue Problems Appearing in the Multi-Group Neutron Diffusion Equations by EIICHI SUETOMI and HIROSHI SEKIMOTO (Research Laboratory for Nuclear Reactors, Tokyo Institute of Technology).

†† 東京工業大学原子炉工学研究所

2. 数値解法

2.1 ORTHOMIN (1) 法による最小固有値の計算
固有値問題 (1.1) 式の残差を次式で定義する。

$$\mathbf{r} = \rho(\phi)\mathbf{B}\phi - \mathbf{A}\phi. \quad (2.1)$$

ここで $\rho(\phi)$ は

$$\rho(\phi) = (\mathbf{A}\phi, \mathbf{B}\phi) / (\mathbf{B}\phi, \mathbf{B}\phi), \quad (2.2)$$

である。 ϕ が固有ベクトルに等しいならば、 $\rho(\phi)$ の値は対応する固有値に一致する。汎関数として残差ベクトル \mathbf{r} の内積 (二乗ノルム)

$$F(\mathbf{r}) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}), \quad (2.3)$$

を採用する。(2.3) 式の最小化に ORTHOMIN (1) 法⁷⁾を適用すると下記のアルゴリズムを得る。

[ALGORITHM OR]

初期値設定 ϕ_0 を定める。

$$\lambda_0 = (\mathbf{A}\phi_0, \mathbf{B}\phi_0) / (\mathbf{B}\phi_0, \mathbf{B}\phi_0), \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{r}_0 = \lambda_0 \mathbf{B}\phi_0 - \mathbf{A}\phi_0, \quad (2.4b)$$

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{r}_0. \quad (2.4c)$$

反復計算 以下の反復を相対残差が十分小さくなるまで繰り返す。

$$\alpha_i = [(\mathbf{r}_i, \mathbf{A}\mathbf{s}_i) - \lambda_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{B}\mathbf{s}_i)] / [(\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{A}\mathbf{s}_i) - 2\lambda_i(\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{B}\mathbf{s}_i) + \lambda_i^2(\mathbf{B}\mathbf{s}_i, \mathbf{B}\mathbf{s}_i)], \quad (2.4d)$$

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \alpha_i \mathbf{s}_i, \quad (2.4e)$$

$$\lambda_{i+1} = (\mathbf{A}\phi_{i+1}, \mathbf{B}\phi_{i+1}) / (\mathbf{B}\phi_{i+1}, \mathbf{B}\phi_{i+1}), \quad (2.4f)$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \lambda_{i+1} \mathbf{B}\phi_{i+1} - \mathbf{A}\phi_{i+1}, \quad (2.4g)$$

$$\beta_i = -[(\mathbf{A}\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{A}\mathbf{s}_i) - \lambda_{i+1}\{(\mathbf{A}\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{B}\mathbf{s}_i) + (\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{B}\mathbf{r}_{i+1})\} + \lambda_{i+1}^2(\mathbf{B}\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{B}\mathbf{s}_i)] / [(\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{A}\mathbf{s}_i) - 2\lambda_{i+1}(\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{B}\mathbf{s}_i) + \lambda_{i+1}^2(\mathbf{B}\mathbf{s}_i, \mathbf{B}\mathbf{s}_i)], \quad (2.4h)$$

$$\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1} + \beta_i \mathbf{s}_i. \quad (2.4i)$$

なお、収束判定には次式で定義する相対残差

$$\varepsilon_i = \|\lambda_i \mathbf{B}\phi_i - \mathbf{A}\phi_i\|_2 / \|\lambda_i \mathbf{B}\phi_i\|_2, \quad (2.5)$$

を用いる。

ϕ_0 としては、解に近い分布を用いることが望ましいが、本研究で行った数値実験ではすべての成分を 1 として計算を実行した。

2.2 不完全 LU 分解つき ORTHOMIN (1) 法
非対称行列系の連立 1 次方程式の解法に ORTHOMIN (1) 法を適用した場合、不完全 LU 分解による前処理と組み合わせることにより、収束性を向上させることが可能である⁹⁾。

一方、Geradin²⁾は、対称行列系の一般固有値問題に対して CG 法を適用したが、その際、係数行列 \mathbf{A} を

スケーリングすることによって収束性が改善されることを示した。末富ら^{5), 6)}は 1 群中性子拡散方程式の有限差分近似から生じる対称行列系の一般固有値問題に対して不完全 Choleski 分解による前処理つき共役勾配法を適用することによって高速で安定に収束することを示した。

以上の理由から、本研究においても係数行列 \mathbf{A} の固有値分布を改善するために、 \mathbf{A} を

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U} + \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

の形に不完全 LU 分解し、その結果を用いて \mathbf{A} に前処理を施すことにした。本論文では、次の二つの方程式に ORTHOMIN (1) 法を適用し収束特性の比較を行った。

左からの前処理 (POR)

$$(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{A}\phi = \lambda(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{B}\phi, \quad (2.7)$$

右からの前処理 (PORMR)

$$\mathbf{A}(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})^{-1}(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U}\phi) = \lambda\mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})^{-1}(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U}\phi). \quad (2.8)$$

(2.7) 式に ORTHOMIN (1) 法を適用した場合の算法 (本論文では POR (Preconditioned ORTHOMIN (1)) 法と呼ぶことにする) は (2.4) 式において \mathbf{A} および \mathbf{B} を、それぞれ $(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{A}$ および $(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{B}$ と置き換えればよい。

(2.8) 式に ORTHOMIN (1) 法を適用した場合の算法 (本論文では PORMR (Preconditioned ORTHOMIN (1) Method for Right preconditioning) 法と呼ぶ) は下記に示す直交係数 β と修正方向 \mathbf{s} を除き (2.4) 式に一致する。

$$\beta_i = -[(\mathbf{A}(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{A}\mathbf{s}_i) - \lambda_{i+1}\{(\mathbf{A}(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{B}\mathbf{s}_i) + (\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{r}_{i+1})\} + \lambda_{i+1}^2(\mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{B}\mathbf{s}_i)] / [(\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{A}\mathbf{s}_i) - 2\lambda_{i+1}(\mathbf{A}\mathbf{s}_i, \mathbf{B}\mathbf{s}_i) + \lambda_{i+1}^2(\mathbf{B}\mathbf{s}_i, \mathbf{B}\mathbf{s}_i)], \quad (2.9)$$

$$\mathbf{s}_{i+1} = (\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{r}_{i+1} + \beta_i \mathbf{s}_i. \quad (2.10)$$

なお、ここで用いた不完全 LU 分解は、行列 \mathbf{A} の完全 LU 分解の際に現れるフィルイン位置をゼロにする方法を採用した。

3. 数値実験

3.1 多群中性子拡散方程式の固有値問題

本論文では、多群中性子拡散方程式を有限差分近似したときに得られる一般固有値問題を例題として取り上げることにする。

原子炉内に存在する中性子のエネルギー範囲は、10 MeV~0.001 eV の領域にも及ぶ。そこで、通常は中性子のエネルギーを離散化して、ある間隔ごとのエネルギー群として取り扱う方法が取られる¹⁰⁾。これを多群拡散理論という。ここでは、中性子のエネルギーを二つの群に分割する場合を考える(2群近似)。この場合、高速中性子を第1群、熱中性子を第2群とする2群拡散方程式は、

$$-\nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1 + \Sigma_{R1} \phi_1 = (1/k)[\nu_1 \Sigma_{f1} \phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \phi_2], \quad (3.1)$$

$$-\nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2 + \Sigma_{R2} \phi_2 = \Sigma_{s12} \phi_1. \quad (3.2)$$

となる。上式は、それぞれのエネルギー群における中性子のつり合いを数学的に表現したものである。つまり、左辺第1項は洩れによる変化(拡散項)、第2項は、中性子が原子核との衝突による散乱や吸収によってそのエネルギー群内から除かれる項を表している。右辺については、(3.1)式が核分裂中性子源項を表し、(3.2)式は中性子が散乱による減速によって上のエネルギー群から入って来る項(散乱流入項)を表している。ここで、核分裂中性子源項の前に中性子増倍率の逆数(1/k)を挿入した。このkは固有値とみなせる。原子炉の臨界計算では、最大の固有値k((1.1)式では最小のλに対応する)を実効増倍率と呼び、k<1(λ>1)であれば核分裂連鎖反応は持続せず、反対にk>1(λ<1)であれば原子炉の出力は上昇する。この値が1にどれほど近いかを調べるために固有値問題が解かれる。

(3.1)~(3.2)式を有限差分法で離散化した場合の行列固有値問題の構造(幾何学形状は1次元平板体系を仮定)を図1に示す。図から明らかなように、行列Aは3重対角行列の下方3角部分に散乱流入項(-Σ_{s12})を付加した形をしており、Bは下方3角部分の要素がすべてゼロという非対称性の強い構造を持っている。

従来の解法^{10),11)}では反復法

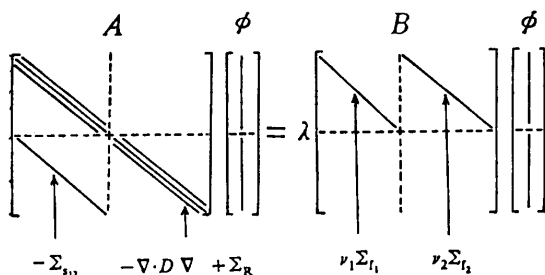


図1 中性子拡散方程式による行列固有値問題の構造
Fig. 1 Matrix structure of a two-group, one-dimensional neutron diffusion problem.

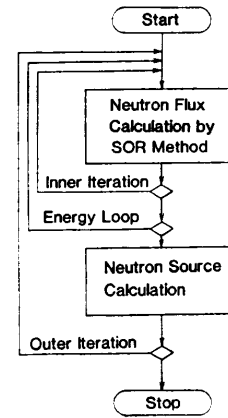


図2 2重反復計算に基づく原子炉の固有値計算
Fig. 2 Inner-outer iteration scheme to determine the eigenvalue of neutron diffusion problems.

$$\phi^{(n)} = \lambda^{(n-1)} A^{-1} B \phi^{(n-1)}, \quad n: \text{外部反復回数} \quad (3.3)$$

によりφやλを求め、この過程は内部・外部の2重反復計算によって行われていた(図2)。外部反復計算では、ベキ乗法を用いて固有値問題として解かれる。内部反復計算では(3.1)、(3.2)式の順に、それぞれの式を離散化して得られる連立1次方程式を解く問題となり、解法としてはSOR法やSLOR法が用いられる。

3.2 数値実験結果

ここでは、まず最初に2章で述べたアルゴリズムを3種類の1次元平板体系の問題(図3)に対して適用した結果を検討する(Problem 1~3)。次に、実際の炉心解析に用いられている幾何学形状の一つである2次元x-y形状の原子炉について計算を行い、前節で述べた従来解法との収束性能の比較を行った(Problem

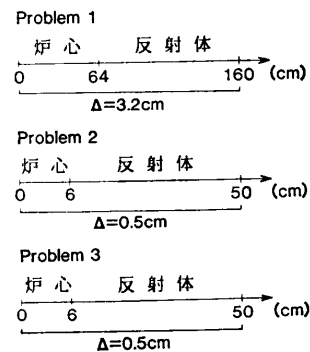


図3 計算に用いた原子炉の1次元平板モデル
Fig. 3 One-dimensional slab models of nuclear reactors.

4). なお、エネルギー群はすべての問題に対して2群とした。

Problem 1~3 については、炉心部の組成は問題ごとに変えてある。境界条件は左端が反射境界、右端が真空境界を仮定している。この結果、得られる固有値問題の次元数は、Problem 1 が100次元、Problem 2 および Problem 3 が200次元となる。使用した計算機は、HITAC M-660K であり、計算はすべて倍精度で行った。Problem 1 から Problem 3 について反復回数と相対残差の関係（相対残差の定義は(2.5)式に示した）を図4~図6に示す。

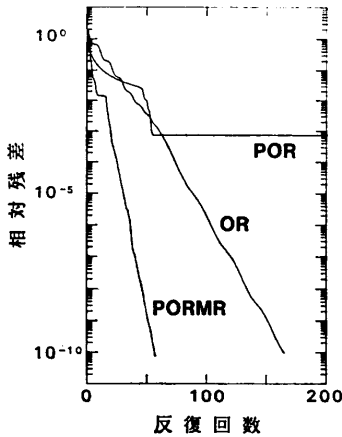


図4 種々の解法による収束の比較 (Problem 1)
Fig. 4 Comparison of convergence for left, right-preconditioned and unpreconditioned ORTHOMIN (1) methods (POR, PORMR and OR) in Problem 1.

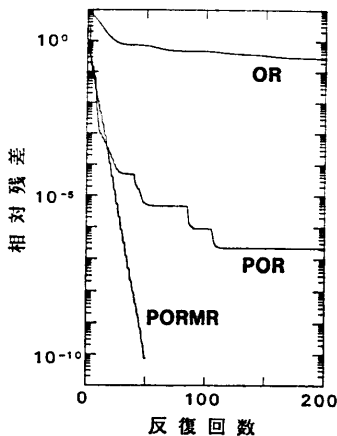


図5 種々の解法による収束の比較 (Problem 2)
Fig. 5 Comparison of convergence for left, right-preconditioned and unpreconditioned ORTHOMIN (1) methods (POR, PORMR and OR) in Problem 2.

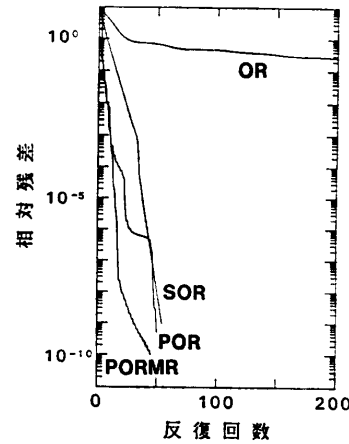


図6 種々の解法による収束の比較 (Problem 3)
Fig. 6 Comparison of convergence for left, right-preconditioned and unpreconditioned ORTHOMIN (1) methods (POR, PORMR and OR) and successive over-relaxation method (SOR) in Problem 3.

Problem 1 (図4) では前処理をしない ORTHOMIN (1) 法 (以下 OR 法と呼ぶ) でも収束は良好である。これに対して、左からの前処理を施した ORTHOMIN (1) 法 (以下 POR 法と呼ぶ) は収束が途中で停止してしまう。右からの前処理による ORTHOMIN (1) 法 (以下 PORMR 法と呼ぶ) では収束は改善されていることが分かる。

Problem 2 (図5) では、OR 法の収束が著しく悪くなっている。POR 法は、反復回数40回目付近までは収束の改善が見られるが、それ以降は残差の停留を繰り返す、やがて収束が停止してしまう。これに対し、PORMR 法では高速かつ安定に収束している。

Problem 3 (図6) では、OR 法の収束を除いて他の二つの方法ともおおむね良好と言える。図中のSORとあるのは、前節で述べた内部・外部の2重反復計算の内部反復にSOR法を用いたものである。ここで、SOR法の加速パラメータは $\omega=1.83$ とした。内部反復回数は多くとればそれだけ収束に要する外部反復回数は減少するが、逆に演算量は増加し、そのために全体の計算時間が増加してしまう。このため通常は1~3回の範囲で計算されることが多い。そこで本研究では内部反復回数は3回に固定した。ここでの計算に用いた ω の値はパラメータサーベイを行うことによって求めた最適の加速パラメータである。相対残差 ϵ が $\epsilon < 10^{-10}$ となるのに要するCPU時間は、PORMR法で0.13秒、SOR法で0.21秒であった。

POR 法と PORMR 法とで、収束性に大きな違いが生じた原因は、係数行列 A が図 1 に示したような非対称性の強い構造をしているために左からの前処理を施した場合前処理後の係数行列の対称部の正定値性が失われたことによるものと思われる。

なお、前処理としては、Gustafsson 流の修正を施した修正不完全分解¹²⁾も考えられるが、今回行った数値実験では全く収束をしなかった。

次に、Problem 1 を例にとり、修正係数 α ((2.4d)) と直交係数 β ((2.4h)) の収束途中における振舞いを図 7 ~ 図 9 に示す。

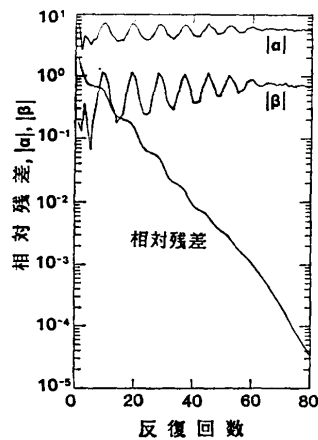


図 7 修正係数 $|\alpha|$ および直交係数 $|\beta|$ の変化 (OR 法の場合)

Fig. 7 Behavior of $|\alpha|$ (Eq. (2.4d)) and $|\beta|$ (Eq. (2.4h)) for unpreconditioned ORTHOMIN (1) method (OR) in Problem 1.

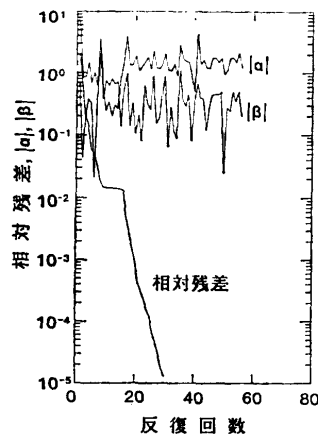


図 8 修正係数 $|\alpha|$ および直交係数 $|\beta|$ の変化 (PORMR 法の場合)

Fig. 8 Behavior of $|\alpha|$ (Eq. (2.4d)) and $|\beta|$ (Eq. (2.4h)) for right-preconditioned ORTHOMIN (1) method (PORMR) in Problem 1.

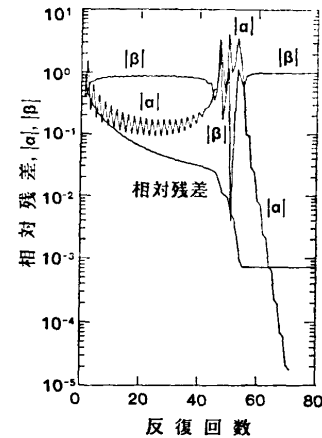


図 9 修正係数 $|\alpha|$ および直交係数 $|\beta|$ の変化 (POR 法の場合)

Fig. 9 Behavior of $|\alpha|$ (Eq. (2.4d)) and $|\beta|$ (Eq. (2.4h)) for left-preconditioned ORTHOMIN (1) method (POR) in Problem 1.

OR 法 (図 7) と PORMR 法 (図 8) について共通な点としては、 $|\alpha|$ および $|\beta|$ が共に激しく変化していることである。このような場合は、各反復ごとの残差の最小化が大きなステップで行われるために収束も速くなる。特に、PORMR 法の $|\alpha|$ と $|\beta|$ の変化が激しいことが分かる。また、図 7 と図 8 の比較から、必ずしも $|\alpha|$ の値が大きい方が収束が速いとは限らないことが分かる。

これに対し、POR 法 (図 9) の収束停止部分では、 $|\alpha|$ は急速にゼロに近づき、 $|\beta|$ は 1 に収束してしまう。

(2.4h) 式から明らかなように

$$\beta = -\frac{((A - \lambda B)r, (A - \lambda B)s)}{((A - \lambda B)s, (A - \lambda B)s)} \quad (3.4)$$

と書けることから、 $|\beta|$ が 1 の場合、修正方向 s と残差ベクトル r は方向が一致してしまい、 s_j ($j=1, \dots, k$) が線形従属になる。このために、収束が停止してしまうと考えられる。

最後に、2次元 $x-y$ 形状の原子炉を例にとり従来解法 (内部反復に SOR 法を用いた) と PORMR 法の収束性能を反復回数と計算時間 (CPU time) について比較を行う。

Problem 4 では炉心形状は 2次元 $x-y$ 形状とし、炉心の組成は均質とする。このため、ここでの計算は原子炉の対称性を考慮して 1/4 炉心で行うものとする。メッシュ数は 30×30 であり、 $\Delta x = \Delta y = 5$ cm の等間隔メッシュである。図 10 に PORMR 法と内部反

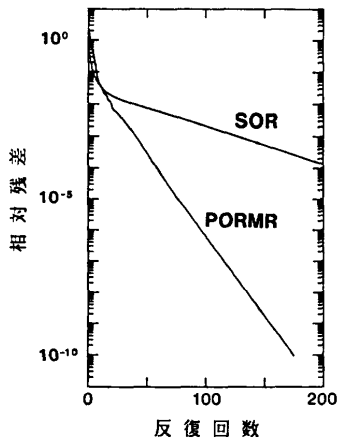


図 10 右からの前処理による ORTHOMIN (1) 法 (PORMR) と内部反復に SOR 法を用いた従来解法 (SOR) との収束の比較 (Problem 4)
Fig. 10 Comparison of convergence for right-preconditioned ORTHOMIN (1) method (PORMR) and successive over-relaxation method (SOR) in Problem 4.

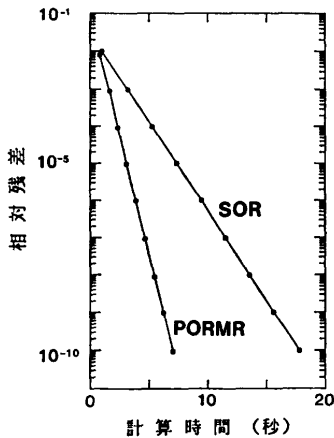


図 11 計算時間 (CPU time) と相対残差の関係
Fig. 11 CPU time versus relative residual norm.

復に SOR 法 (加速パラメータは CITATION code¹¹⁾ で最適値として計算された値 (1.54) を使用した) を用いた従来解法との収束状況を比較したものを示す。PORMR 法は相対残差が 10^{-10} 以下になるまでに要する反復回数が 175 回であるのに対して SOR 法を用いた従来解法では 707 回となり、およそ 4 倍の反復回数を必要としている。図 11 は、各々の解法について計算時間 (CPU time) と相対残差の関係を示したものである。この問題の場合、収束判定条件として相対残差を 10^{-3} 以下に設定すれば、計算時間の点でも PORMR 法が SOR 法より速いことが分かる。

4. まとめと今後の課題

残差ノルムを導入することにより、非対称行列系の一般固有値問題を ORTHOMIN (1) 法 (共役残差法) で解くことを提案した。さらに、係数行列 A に対して不完全 LU 分解に基づく前処理を施し、収束の加速を試みた。

例題として、2 群中性子拡散方程式を離散化して得られる一般固有値問題を取り上げ、収束特性の比較を行った。その結果、今回の例題では、左からの前処理と右からの前処理とでは収束性に大きな違いがあり、左からの前処理では収束が停止してしまうのに対して右からの前処理は有効に働くことが分かった。この理由は、多群中性子拡散方程式を離散化して得られる行列の非対称性と関係があるものと思われるが、今回の研究では、それを明らかにすることはできなかった。

今後の課題として

- (1) 前処理と ORTHOMIN (1) 法の前収束現象との関係を明らかにする。
 - (2) 収束の停止が起こらないような前処理行列を開発する。
- の 2 点が挙げられる。

参考文献

- 1) Bradbury, W. W. and Fletcher, R.: New Iterative Methods for Solution of the Eigenproblem, *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 259-267 (1966).
- 2) Geradin, M.: The Computational Efficiency of a New Minimization Algorithm for Eigenvalue Analysis, *J. Sound Vibration*, Vol. 19, No. 3, pp. 319-331 (1971).
- 3) Hestenes, M. R. and Stiefel, E.: Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Vol. 49, pp. 409-436 (1952).
- 4) Meijerink, J. A. and van der Vorst, H. A.: An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix Is a Symmetric M-Matrix, *Math. Comp.*, Vol. 31, No. 137, pp. 148-162 (1977).
- 5) Suetomi, E. and Sekimoto, H.: Application of Preconditioned Conjugate Gradient Method to Eigenvalue Problems for One-Group Neutron Diffusion Equation, *J. Nucl. Sci. Technol.*, Vol. 25, No. 1, pp. 100-103 (1988).
- 6) 末富英一, 関本 博: 中性子拡散方程式の固有値問題に対する勾配法系解法の適用, *Advances in Numerical Methods for Large Sparse Sets*

- of Linear Equations, *Sparsity and Supercomputer* (Keio University), No. 4, pp. 17-21, マテマティカ (1988).
- 7) Vinsome, P. K. W.: Orthomin, an Iterative Method for Solving Sparse Sets of Simultaneous Linear Equations, in *Proc. Fourth Symposium Reservoir Simulation*, Society of Petroleum Engineers of AIME, pp. 149-159 (1976).
- 8) Eisenstat, S. C., Elman, H. C. and Schultz, M. H.: Variational Iterative Methods for Nonsymmetric Systems of Linear Equations, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 20, No. 2, pp. 345-357 (1983).
- 9) 村田健郎: CR(k) 法の加速について, 京都大学数理解析研究所講究録, No. 514, pp. 92-109 (1984).
- 10) Duderstadt, J. J. and Hamilton, L. J.: *Nuclear Reactor Analysis*, p. 650, John Wiley & Sons (1976).
- 11) Fowler, T. B., Vondy, D. R. and Cunningham, G. W.: Nuclear Reactor Core Analysis Code: CITATION, ORNL-TM-2496, Rev. 2 (1971).
- 12) Gustafsson, I.: A Class of First Order Factorization Methods, *BIT*, Vol. 18, pp. 142-156 (1978).

(昭和 63 年 9 月 28 日受付)
(平成 元年 2 月 14 日採録)



末富 英一 (正会員)

昭和 34 年生。昭和 59 年武蔵工業大学工学部電子通信工学科卒業。昭和 61 年同大学大学院工学研究科原子核工学専攻修士課程修了。現在、東京工業大学大学院理工学研究科原子核工学専攻博士課程在学中。原子炉物理、疎行列の反復解法とその応用の研究に従事。日本原子力学会会員。



関本 博

昭和 20 年生。昭和 43 年京都大学工学部原子核工学科卒業。昭和 45 年同大学院修士課程修了。昭和 49 年カリフォルニア大学バークレー校原子核工学科博士課程修了。同年ゼネラルアトミック社 (米国) 入社。昭和 51 年東京工業大学原子炉工学研究所助手。現在同助教授。中性子工学に関する研究に従事。Ph. D. 著書に「グレイブス核燃料管理の方法と解析」(共訳, 現代工学社), 「新版原子力ハンドブック」(分担, オーム社) などがある。日本原子力学会, 米国原子力学会各会員。