ショートノート

自然数の表現の立場から見た多重指数分割浮動小数点表示方式†

横 尾 英 俊††*

すぐれた数値表現方式であるURRは，可変長指数部を実現するために，語頭条件を満たす自然数の表現を利用したものとなっている．URR の精度を改善するということは，効率の良い自然数の表現を見い出すことにほかならない．本論文では，一般の多重指数分割による浮動小数点表示方式と自然数の表現との対応を明示し，URR 型の浮動小数点表示方式の表現誤差が自然数の表現の問題によって記述できることを示す．

1. はじめに

計算機内部の実数値の表現形式として現在広く用いられている浮動小数点表示方式での指数部あふれの問題を解決するため，可変長指数部の浮動小数点表示方式が種々提案されている．代表的なものに，松井・伊理方式[1]と浜田[2]の URR とがあるが，前者では指数部長を表現方式の中で明示的に記述するのに対し，後者では，指数部の符号化法そのものに指数部と仮数部との区切りを識別できるような性質を持たせている．

URR で採用しているような，それ自身で区切りを識別できる性質を持つ符号は，情報理論において種々研究されてきている．その中でも本論文に特に関係が深いのは，自然数の表現と呼ばれる問題で[4]，上限が未知の自然数の任意の系列を誤りなく符号化ならびに復号化する方法を議論するものである．情報理論の目的の一つは，できるだけ効率の良い表現を見い出すことにあるが，このことは，可変長指数部の浮動小数点表示方式の精度と表現可能な数値の範囲とに深い関わりを持っている．本論文では，自然数の表現から導かれる URR のいくつかの変種について，それらの精度ともとになっている自然数の表現の長さとの対応を与える．これらの対応はほとんど自明のものであり，また，浮動小数点表示方式の優劣が精度だけで決まるものではないが，URR 型の浮動小数点表示方式の精度のある種の限界に注意を与えておくことには意味があろう．

以下では，$\log_2$ を単に log と表記する．

2. URR と自然数の表現

URR[2] および次節で述べる一般の多重指数分割浮動小数点表示方式では，1以上の実数 x は2進系列

$$R_A(x)=01\,A(\lfloor x\rfloor)\beta(x-\lfloor x\rfloor) \qquad (1)$$

として表現される．ここで，$\lfloor x\rfloor$ は x の整数部分であり，$\beta(x-\lfloor x\rfloor)$ は x を通常の2進数に展開した場合の小数点以下の2進系列である．すなわち，

$$x-\lfloor x\rfloor=0.\beta(x-\lfloor x\rfloor)$$

という固定小数点2進数表現を与えるものである．$A(\lfloor x\rfloor)$ は各表示方式を特徴づけるもので，$\lfloor x\rfloor$ に応じて決まる2進系列である．$x\geqq 1$ に対し，URR が (1)式の表現形式を持つことは，容易に示すことができる．URR の $A(\lfloor x\rfloor)$ の部分を $D(\lfloor x\rfloor)$ とすると，**表1**の第1列に示す2進系列となる．$D(\lfloor x\rfloor)$，$\beta(x-\lfloor x\rfloor)$ は URR の指数部，仮数部には対応しない．$R_A(x)$ は一般には半無限系列であるので，固定語長内で表現する場合には，その長さで打ち切らなければならず，表現誤差や表現可能な範囲の制限という現象が生じる．しかし，その長さを任意に設定できるという意味で，(1)式は，長さに依存しない表示方式となっている．

$A(i)=D(i)$ には次のような性質が認められる．

(R1) $\{A(i)\}$ は語頭条件を満たす．

(R2) $A(i)$ は辞書式順序である．

後者は，URR の大きな特徴である，数値の大小関係が固定小数点とみなしたときの大小関係に一致する，という性質に対応する．(R1) は，符号 $\{A(i)\}_{i=1}^{\infty}$ の一意復号可能性の十分条件を与えるものである．一意

† Representations of the Integers and Floating-point Representations for Real Numbers Based on Multiple Exponential Cut by HIDETOSHI YOKOO (Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Yamagata University).

†† 山形大学工学部電気工学科
* 現在 群馬大学工学部情報工学科
Department of Computer Science, Gunma University

表 1 自然数の表現の例
Table 1 Examples of representation of the integers.

i	$D(i)$	$S(i)$	$T(i)$	$F(i)$
1	0	0	0	0
2	100	100	100	100
3	101	101	101	101
4	110000	11000	1100000	110000
5	110001	11001	1100001	110001
6	110010	11010	1100010	110010
7	110011	11011	1100011	110011
8	1101000	1110000	11001000	1101000
9	1101001	1110001	11001001	1101001
10	1101010	1110010	11001010	1101010
15	1101111	1110111	11001111	1101111
16	1110000000	111100000	1101000000	11100000000
31	1110001111	111101111	1101001111	11100001111
32	11100100000	11111000000	11010100000	111000100000

復号可能性の必要条件としては，Kraft の不等式[4),5)]がある．表 1 では以上に加えて，

(R 3) $\{A(i)\}$ は完全 (complete[4)]) である．

(R 4) $A(i)$ の長さ関数 $L_A(i)=|A(i)|$ は単調増加関数である．

という性質も成立している．(R 4) は，1 以上の実数に対する URR の表現精度の単調性に対応している．

ここで，$R_A(x)$ を固定語長で表現するときの，隣り合った二つのビット・パタンの正しく表す値の中間の値 x の表現誤差を $\Delta(x)$ とすると，(1)式より $\Delta(x)=2^{-|\beta(x-\lfloor x\rfloor)|-1}$ となる．仮に語長を 64 ビットに選んだ場合，$|\beta(x-\lfloor x\rfloor)|=62-L_A(\lfloor x\rfloor)$ であるから，相対誤差 $Er(x)=\Delta(x)/x$ は

$$\log|Er(x)|=L_A(\lfloor x\rfloor)-63-\log x \qquad (2)$$

を満たす．これより，(1)式で表される浮動小数点表示方式の精度は，長さ関数 $L_A(i)$ をできるだけ低く抑えることで向上することが知れる．しかし，任意の i について $\min_A L_A(i)$ を達成するような符号化法は存在せず，何らかの規準によって長さ関数の最適性を評価しなければならない．これが，自然数の表現と呼ばれる問題である[4)]．

3. 多重指数分割浮動小数点表示方式

自然数の 2 進数表現は明らかに一意復号可能ではない．しかし，自然数 $i\geqq 1$ の通常の 2 進数表現を $1\alpha(i)$ としたとき，

$$S(i)=1^{|\alpha(i)|}0\alpha(i)$$

は一意復号可能となる．ここで，$1^{|\alpha(i)|}$ は 1 を $\alpha(i)$ の長さ分だけ連接した系列を表す．$S(i)$ のはじめの数個を表 1 の第 2 列に示した．$S(i)$ が条件 (R 1)～(R 4) を満たすことは容易に確認できて，その長さ関数を求めると，

$$L_S(i)=2\lfloor\log i\rfloor+1, \quad i\geqq 1 \qquad (3)$$

となる．

次に，URR に使用されている自然数の表現 D は

$$D(i)=\begin{cases}0 & i=1,\\ 1S(|\alpha(i)|)\alpha(i) & i\geqq 2\end{cases}$$

と表すことが可能で，これより，URR による表現 $R_D(x)$ では，$i\geqq 2$ で，

$$L_D(i)=\lfloor\log i\rfloor+2\lfloor\log\log i\rfloor+2 \qquad (4)$$

が成立する．第 2 項の 2 重の対数が，URR が主として利用している 2 重指数分割に対応する．

URR の精度を改善する目的で中森ら[3)]が提案している，「3 重指数分割」に基づく浮動小数点表示方式も，条件 (R 1)～(R 4) を満足する (1)式による表現を有し，$A(\lfloor x\rfloor)$ に対応する部分を $T(\lfloor x\rfloor)$ とすると，その定義より，

$$T(i)=\begin{cases}0 & i=1,\\ 1C(|\alpha(i)|)\alpha(i) & i\geqq 2\end{cases}$$

と求まる．ここで，C は

$$C(i)=S(|\alpha(i)|+1)\alpha(i)$$

によって定義される自然数の表現で，やはり条件 (R 1)～(R 4) を満足するものである．$T(i)$ の例を表 1 の第 3 列に示した．長さ関数は，$i\geqq 4$ で，

$$L_T(i)\simeq\log i+\log\log i+2\log\log\log i \qquad (5)$$

となる．ここで，"$\simeq$" は両辺の差が i によらない定数で抑えられることを意味する．第 3 項の 3 重の対数が 3 重指数分割に対応している．このような多重度は指数部の段数[3)]あるいはレベル[1)]と呼ばれるもので，これを m で表し，$\log^{(k)}i$ を

$$\log^{(1)}i=\log i,$$
$$\log^{(k)}i=\log\log^{(k-1)}i, \quad k\geqq 2$$

で定義すると，一般に，

$$\log^m i\triangleq\sum_{k=1}^{m=1}\log^{(k)}i+2\log^{(m)}i \qquad (6)$$

との差が i によらない定数で抑えられる長さ関数を持つ自然数の表現を利用した多重指数分割浮動小数点表示方式が定義できる．

一方，条件 (R 1)～(R 4) を満足する，次のような自然数の表現 F が知られている[5)]．まず，自然数 i の 2 進数表現 $1\alpha(i)$ に対し，

$$E(0)=0,$$
$$E(i)=1E(|\alpha(i)|)\alpha(i), \quad i\geqq 1 \qquad (7)$$

によって表現 E を定義する．F は E の先頭 1 ビットを除いたもの，すなわち，

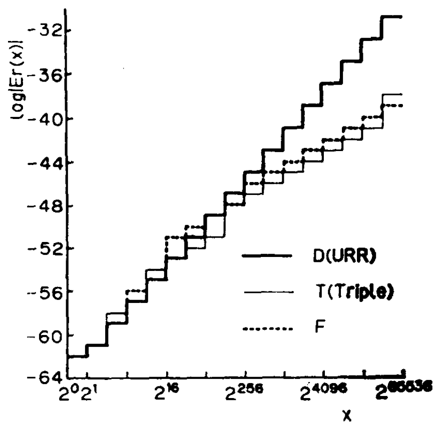


図 1 表現誤差の比較
Fig. 1 Comparison of representation errors.

$$1F(i)=E(i),\quad i\geqq 1$$

であり，表1の第4列に示すようになる．$|\alpha(i)|\simeq\log i$ であるから，(7)式より

$$|E(i)|\simeq|E(\log i)|+\log i$$

が得られ，

$$L_F(i)\simeq\log^* i$$
$$\triangleq\log i+\log^{(2)} i+\log^{(3)} i+\cdots$$

となる．なお，$\log^* i$ を定義する右辺の和は，値が正の項に対してのみとるものとする．この式と(6)式とから，有限多重度の多重指数分割浮動小数点表示方式の精度は，多重度mをどのように選んでも，ある実数 X_m が存在して，$x\geqq X_m$ の範囲では，自然数の表現 F による浮動小数点表示方式の精度を上回ることはないことが分かる．また，各自然数の表現の長さ関数を厳密に求め，(2)式と組み合せて相対誤差をプロットすると**図 1**を得る．

図1では，繁雑になるのを避けるため，(2)式のかわりに，自然数の表現 A に対し，

$$L_A(\lfloor x\rfloor)-63-\lfloor\log x\rfloor$$

をプロットしてある．ただし，自然数の表現Sを利用したものについては，x が 2^8 を越える付近から急速に精度が低下し始め論外であるので，図示していない．図示した範囲では，長さ関数の4重以上の対数が効果を示さないため，3重指数分割を利用したものの精度が比較的良好である．また，各xについて，図1の中で最も高い精度を実現するように長さ関数を与えると，すなわち，

$$L(i)=\min\{L_A(i)\,|\,A\in\{D,T,F\}\}$$

とすると，

$$\sum_{i=1}^{2^{64}-1}2^{-L(i)}=1$$

となって Kraft の不等式が成立せず，$L(i)$ に対応する一意復号可能な自然数の表現は構成できない．このことからも，3重指数分割浮動小数点表示方式の精度が十分良いものであることが理解される．

4. おわりに

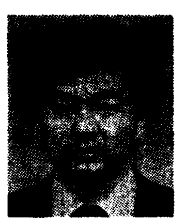
URR 型の数値表現形式の精度を一般的に評価するために，多重指数分割浮動小数点表示方式と自然数の表現の問題との関連を指摘した．ただし，$x<1$ の場合に対する拡張や精度以外の重要な要因との関係については全く言及しなかった．

謝辞 可変長指数部浮動小数点表示方式と自然数の表現との関連については，山梨大学有澤誠助教授の指摘として東京大学伊理正夫教授からご教示いただいた．両先生ならびに本論文作成に協力いただいた山形大学青木ミヨ子技官に謝意を表する．

参考文献

1) 松井正一，伊理正夫：あふれのない浮動小数点表示方式，情報処理学会論文誌，Vol. 21，No. 4，pp. 306-313 (1980).
2) 浜田穂積：二重指数分割に基づくデータ長独立実数値表現法Ⅱ，情報処理学会論文誌，Vol. 24，No. 2，pp. 149-156 (1983).
3) 中森眞理雄，土井　孝：3重指数分割による数値表現方式について，電子情報通信学会論文誌，Vol. J 71-A，No. 7，pp. 1468-1469 (1988).
4) Elias, P.: Universal Codeword Sets and Representations of the Integers, *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. IT-21, No. 2, pp. 194-203 (1975).
5) Knuth, D. E.: Supernatural Numbers, in Klarner, D.A.(ed.), *The Mathematical Gardner*, pp. 310-325, Prindle Weber and Schmidt, Boston (1980).

(昭和64年1月5日受付)
(平成元年4月11日採録)



横尾 英俊（正会員）
1954年生．1978年東京大学工学部計数工学科卒業．1980年同大学院情報工学専攻修士課程修了．同年山形大学工学部電気工学科助手．1989年群馬大学工学部情報工学科講師．工学博士．データ圧縮，記号処理およびそれらの応用に関する研究に従事．電子情報通信学会，情報理論とその応用学会各会員．