

# 複合多項式による最小二乗近似†

秦 野 和 郎††

本論文では等間隔離散点,  $\bar{x}_r = 2\pi r/N$ ;  $0 \leq r \leq N$  上で関数値が与えられたとき, 複合多項式系  $\{\cos jx, \sin jx | 1 \leq j \leq n-1, x^j | 0 \leq j \leq 2m\}$  を使って元の関数を最小二乗近似する手法を提案する. この際,

$$h(x) = \frac{1}{2} \bar{a}_0' + \sum_{j=1}^{n-1} \{\bar{a}_j' \cos jx + \bar{b}_j' \sin jx\} + \sum_{j=1}^{2m} \bar{c}_j' x^j$$

の形では数値的に不安定で実用にならない. そこでいろいろの工夫をして選点直交性のよい関数系を構成する. 本文中で示したように

$$h(x) = \frac{1}{2} \bar{U}_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \{\bar{U}_j \cos jx + \bar{V}_j \sin jx\} + \sum_{j=1}^{2m} \bar{c}_j \bar{q}_j(x; n, N)$$

の形の式で  $\bar{q}_{2i+1}(x; n, N)$  と  $\bar{q}_{2i}(x; n, N)$ ,  $\bar{q}_{2i+1}(x; n, N)$  と  $\bar{q}_{2i}(x; n, N)$  とは選点直交しないがその他の組合せではすべて選点直交するような関数系を構成することができる. ここで  $\bar{q}_j(x; n, N)$  は多項式と三角多項式との和である. この形の式を使うと数値的に極めて安定な計算法を構成することができる. 本論文で述べた手法を使えば等間隔離散点上で与えられた関数値から Fourier 係数の極めてよい近似値を得ることができる.

## 1. はじめに

離散点で多くのデータが与えられたとき, それらを使って元の関数を最小二乗近似するために, 多くの方法が開発されてきた. すなわちどのような関数系を使うかによって多くの方法が派生するのである. 線形パラメータのみを含む関数系では, 多項式系, 三角多項式系が普遍的である. これらの関数系では, 比較的ゆるい条件のもとで直交系を容易に構成し得る. 多項式系では不等間隔の離散点上で, 各点ごとに異なる重みの選点直交多項式系を構成し得る<sup>1)</sup>. また, 三角多項式系は等間隔離散点上で選点直交する<sup>2)</sup>. したがってこれらの関数系を使う限り実際の計算は容易である.

しかし古くから知られているように, 多項式系では次数を高くするにつれて, しばしば好ましくない振動が生ずる. 同じように三角多項式系では両端付近で“Gibbs の現象”と呼ばれる振動が発生する. これらは多項式系, 三角多項式系の持つ特性であるから避けることはできないのである.

三角多項式系を使う場合, パラメータの個数が多くなっても特別な困難は起こらない. 両端付近の振動はパラメータの個数とはほとんど無関係である. さらにこの振動は両端の関数値, 微係数の値などが異なるために生ずるのであるから低い次数の多項式でこれを補償し得る可能性がある. 複合多項式系, すなわち三角

多項式系に, 低い次数の多項式系を加えた関数系はこのような用途に好ましい関数系であると思われる.

本論文では, 等間隔離散点上でデータが与えられたとき複合多項式を使ってそれらを最小二乗近似する手法を開発する. まず, 具体的な計算法について述べて次に数値的安定性について述べる. さらに数値例によりこの方法が正しく機能することを示す.

本論文で提案する手法は Fourier 係数を近似するのに極めて有用な方法である.

## 2. 複合多項式による最小二乗近似

本章では等間隔離散点上で与えられた関数値を使って, 複合多項式により元の関数を最小二乗近似する手法を述べる.

$m$  を自然数として

$$\begin{cases} f(x) \in C^{2m}[0, 2\pi]. \\ \|f^{(2m+1)}\|_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f^{(2m+1)}(x)| < \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

を満たし

$$f(0) = f(2\pi) = \{f(0+) + f(2\pi-)\} / 2. \quad (2.2)$$

であるような実関数  $f(x)$  の全体を  $W_{2m}^{2m}[0, 2\pi]$  とする.

$N$  を偶数として, 閉区間  $[0, 2\pi]$  上の等間隔離散点

$$x = \bar{x}_r = 2\pi r/N; 0 \leq r \leq N. \quad (2.3)$$

における  $f(x) \in W_{2m}^{2m}[0, 2\pi]$  の値が与えられるとする. すなわち  $f_r = f(\bar{x}_r); 0 \leq r \leq N$  が与えられるとする. ただし,  $f_0, f_N$  の二つについてはそれぞれ  $f(0+), f(2\pi-)$  であるとする. すなわち,

† The Least-Squares Approximation by Composite Polynomials by KAZUO HATANO (Department of Electronics, Faculty of Engineering, Aichi Institute of Technology).

†† 愛知工業大学工学部電子工学科

$f_0=f(0+)$ ,  $f_N=f(2\pi-)$  である.

$D \equiv d/dx$  として, 开区間  $(0, 2\pi)$  において

$$D^{2m+1} \prod_{j=1}^{n-1} (D^2 + j^2) h(x) \equiv 0. \quad (2.4)$$

を満足し両端において

$$h(0) = h(2\pi) = \{h(0+) + h(2\pi-)\} / 2. \quad (2.5)$$

を満たす実関数  $h(x)$  の全体を閉区間  $[0, 2\pi]$  で定義される複合多項式と定義し,  $H^{(2m, n)}[0, 2\pi]$  と書く<sup>4)</sup>.

以下に, 等間隔離散点で関数値が与えられたとき  $f(x) \in W^{2m}[0, 2\pi]$  を  $h(x) \in H^{(2m, n)}[0, 2\pi]$  で最小二乗近似する計算法を述べる.

任意の  $h(x) \in H^{(2m, n)}[0, 2\pi]$  は直観的にわかるように

$$h(x) = \frac{1}{2} \bar{a}_0' + \sum_{j=1}^{n-1} \{\bar{a}_j' \cos jx + \bar{b}_j' \sin jx\} + \sum_{j=1}^{2m} \bar{c}_j' x^j. \quad (2.6)$$

で与えられる. もしこの形の式で残差二乗和を最小にするように正規方程式をつくって, それを数値的に安定に解くことができれば何も問題は生じない. このような素朴な着想は古くから存在したであろう<sup>2)</sup> から簡単に計算することができるなら現在既に有力な計算法になっているはずである.

実際に式(2.6)を使って正規方程式をつくって解いてみると  $2m=2$  の程度でも極めて悪条件の方程式になり, 好ましい結果を得ることができない. これは三角多項式部と多項式部との直交性が極めて悪いためである. 言い替えれば多項式部を三角多項式で最小二乗近似すると, その残差のノルムは大きいかかわらず二乗ノルムは極めて小さくなる. したがって, 複合多項式を使って最小二乗近似する手法を構成することとは, 選点直交性のよい関数列をつくり出すということである.

いま,

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(x) \frac{t^i}{i!} : |t| < 2\pi. \quad (2.7)$$

で定義される Bernoulli 多項式<sup>3)</sup>,  $B_i(x)$  を少し書き直して得られる多項式

$$\begin{cases} p_1(x) = \begin{cases} (x-\pi)/2 : x \in (0, 2\pi). \\ 0 : x = 0, 2\pi. \end{cases} \\ p_i(x) = \frac{(2\pi)^i}{2 \cdot i!} B_i\left(\frac{x}{2\pi}\right) : i \geq 2. \end{cases} \quad (2.8)$$

を導入する. Bernoulli 多項式の Fourier 展開式<sup>3)</sup>からこれらの多項式は

$$\begin{cases} p_{2i}(x) = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos jx}{j^{2i}}. \\ p_{2i+1}(x) = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin jx}{j^{2i+1}}. \end{cases} \quad (2.9)$$

と Fourier 展開されることがわかる. この展開式から最初の  $n-1$  項を削除し, 定数倍した関数列  $q_i(x; n)$  を次のように定義する. すなわち

$$\begin{cases} q_{2i}(x; n) = (-1)^{i-1} n^{2i} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\cos jx}{j^{2i}}. \\ q_{2i+1}(x; n) = (-1)^{i-1} n^{2i+1} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\sin jx}{j^{2i+1}}. \end{cases} \quad (2.10)$$

である. この関数列は内積

$$(f(x), g(x)) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx. \quad (2.11)$$

に関して次のような直交性を持っている. すなわち

$$\begin{cases} (1/2, q_i(x; n)) = (q_i(x; n), \cos jx) \\ \quad = (q_i(x; n), \sin jx) = 0 \\ \quad : i \geq 1, 1 \leq j \leq n-1. \\ (q_{2i}(x; n), q_{2j+1}(x; n)) = 0 \\ \quad : i \geq 1, j \geq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

が成り立つ<sup>4)</sup>.

これらの関数を使って式(2.6)を次のように書き改める.

$$h(x) = \frac{1}{2} \bar{a}_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \{\bar{a}_j \cos jx + \bar{b}_j \sin jx\} + \sum_{j=1}^{2m} \bar{c}_j q_j(x; n). \quad (2.13)$$

文献4)によれば, この形で表現される複合多項式が  $f(x) \in W^{2m}[0, 2\pi]$  を近似するとき,  $\bar{a}_j : 0 \leq j \leq n-1$ ,  $\bar{b}_j : 1 \leq j \leq n-1$  は, この関数に対する Fourier 係数

$$\begin{cases} a_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos jx dx. \\ b_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin jx dx. \end{cases} \quad (2.14)$$

をそれぞれ近似するはずであり,  $\bar{c}_j : 1 \leq j \leq 2m$  は

$$c_j(f; n) = \{f^{(j-1)}(2\pi-) - f^{(j-1)}(0+)\} / (\pi n^j). \quad (2.15)$$

を近似するはずである.

さて,  $n < N/2$  として, 式(2.10)で与えられる  $q_{2i}(x; n)$  に  $x = \bar{x}_r$  を代入し, 式(2.10)における,  $j = n, n+1, \dots$  を

$$\begin{cases} j : j = n, n+1, \dots, N/2-1 \\ kN : k = 1, 2, \dots \\ kN+j, kN-j : j = 1, 2, \dots, N/2-1; k = 1, 2, \dots \\ kN + N/2 : k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

と4通りに分けて各部分和を計算する。cos x の周期性, 対称性を使い

$$\begin{cases} \bar{\delta}_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(k+x)^j} + \frac{(-1)^j}{(k-x)^j} \right\}. \\ \bar{\tau}_j(x) = 1/x^j + \bar{\delta}_j(x). \end{cases} \quad (2.16)$$

とおくと

$$q_{2i}(\bar{x}_r; n) = (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1(2)} \bar{\delta}_{2i}\left(\frac{s}{N}\right) \cos s\bar{x}_r + \sum_{s=n}^{N/2(3)} \bar{\tau}_{2i}\left(\frac{s}{N}\right) \cos s\bar{x}_r \right\}. \quad (2.17)$$

を得ることができる。同じようにして

$$q_{2i+1}(\bar{x}_r; n) = (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+1} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \bar{\delta}_{2i+1}\left(\frac{s}{N}\right) \sin s\bar{x}_r + \sum_{s=n}^{N/2} \bar{\tau}_{2i+1}\left(\frac{s}{N}\right) \sin s\bar{x}_r \right\}. \quad (2.18)$$

を得ることができる。ただしここで

$$\begin{cases} \sum_{s=0}^{n-1(2)} A(s) = \frac{1}{2}A(0) + \sum_{s=1}^{n-1} A(s). \\ \sum_{s=n}^{N/2(3)} A(s) = \sum_{s=n}^{N/2-1} A(s) + \frac{1}{2}A\left(\frac{N}{2}\right). \end{cases} \quad (2.19)$$

である。また,

$$-q_1(0+; n) = q_1(2\pi-; n) = \pi n/2. \quad (2.20)$$

に注意する必要がある。これは式(2.8), (2.10)から得られる。

次に f(x), g(x) の内積, <f(x), g(x)> を

$$\begin{aligned} \langle f(x), g(x) \rangle &= \frac{2}{N} \left\{ \frac{1}{2} f(0+)g(0+) + \sum_{r=1}^{N-1} f(\bar{x}_r)g(\bar{x}_r) + \frac{1}{2} f(2\pi-)g(2\pi-) \right\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

と定義する。よく知られるように 0 ≤ i, j ≤ N/2 に対して

$$\begin{cases} \langle \cos ix, \cos jx \rangle = \begin{cases} 2: i=j(i=0, i=N/2). \\ 1: i=j(i \neq 0, i \neq N/2). \\ 0: i \neq j. \end{cases} \\ \langle \sin ix, \sin jx \rangle = \begin{cases} 0: i=j(i=0, i=N/2). \\ 1: i=j(i \neq 0, i \neq N/2). \\ 0: i \neq j. \end{cases} \\ \langle \cos ix, \sin jx \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

が成り立つ<sup>2)</sup>。すなわち, これらの関数はお互いに選点直交する。このことを使うと

$$\langle q_{2i}(x; n), \cos jx \rangle = \begin{cases} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \bar{\delta}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right) \\ : 0 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle q_{2i+1}(x; n), \sin jx \rangle &= \begin{cases} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \bar{\tau}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right) & : n \leq j \leq N/2. \\ (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+1} \bar{\delta}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right) & : 0 \leq j \leq n-1. \\ (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+1} \bar{\tau}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right) & : n \leq j \leq N/2. \end{cases} \\ \langle q_{2i}(x; n), \sin jx \rangle &= 0 : 1 \leq j \leq n-1. \\ \langle q_{2i+1}(x; n), \cos jx \rangle &= 0 : 0 \leq j \leq n-1. \\ \langle q_{2i}(x; n), q_{2j+1}(x; n) \rangle &= 0. \\ \langle q_{2i}(x; n), q_{2j}(x; n) \rangle &= (-1)^{i+j} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+2j} \cdot \left\{ \sum_{s=0}^{n-1(2)} \bar{\delta}_{2i}\left(\frac{s}{N}\right) \bar{\delta}_{2j}\left(\frac{s}{N}\right) + \sum_{s=n}^{N/2(3)} \bar{\tau}_{2i}\left(\frac{s}{N}\right) \bar{\tau}_{2j}\left(\frac{s}{N}\right) \right\}. \\ \langle q_{2i+1}(x; n), q_{2j+1}(x; n) \rangle &= (-1)^{i+j} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+2j+2} \cdot \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \bar{\delta}_{2i+1}\left(\frac{s}{N}\right) \bar{\delta}_{2j+1}\left(\frac{s}{N}\right) + \sum_{s=n}^{N/2} \bar{\tau}_{2i+1}\left(\frac{s}{N}\right) \bar{\tau}_{2j+1}\left(\frac{s}{N}\right) \right\} \\ &\quad (i=j=0 \text{ の場合を除く}). \\ \langle q_1(x; n), q_1(x; n) \rangle &= \frac{2}{N} \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2 \left[ \sum_{s=0}^{n-1} \left\{ \bar{\delta}_1\left(\frac{s}{N}\right) \right\}^2 + \sum_{s=n}^{N/2} \left\{ \bar{\tau}_1\left(\frac{s}{N}\right) \right\}^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

を得ることができる。これらの式を参考にして次のような関数を定義する。すなわち

$$\begin{aligned} \bar{q}_{2i}(x; n, N) &= q_{2i}(x; n) - (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \cdot \sum_{j=0}^{n-1(2)} \bar{\delta}_{2i}\left(\frac{j}{N}\right) \cos jx. \\ \bar{q}_{2i+1}(x; n, N) &= q_{2i+1}(x; n) - (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\delta}_{2i+1}\left(\frac{j}{N}\right) \sin jx. \end{aligned} \quad (2.24)$$

である。直ちにわかるように

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}_{2i}(x; n, N), \cos jx \rangle &= 0 : 0 \leq j \leq n-1. \\ \langle \bar{q}_{2i+1}(x; n, N), \sin jx \rangle &= 0 : 0 \leq j \leq n-1. \\ \langle \bar{q}_{2i}(x; n, N), \bar{q}_{2j}(x; n, N) \rangle &= (-1)^{i+j} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+2j} \sum_{s=n}^{N/2(3)} \bar{\tau}_{2i}\left(\frac{s}{N}\right) \bar{\tau}_{2j}\left(\frac{s}{N}\right). \\ \langle \bar{q}_{2i+1}(x; n, N), \bar{q}_{2j+1}(x; n, N) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

表 1 選点直交関係  
Table 1 Orthogonality relationship.

	1/2	cos $jx$	sin $jx$	$\bar{q}_{2j}(x; n, N)$	$\bar{q}_{2j+1}(x; n, N)$
1/2	1/2	0	0	0	0
cos $ix$	0	[1]	0	0	0
sin $ix$	0	0	[1]	0	0
$\bar{q}_{2i}(x; n, N)$	0	0	0	[2]	0
$\bar{q}_{2i+1}(x; n, N)$	0	0	0	0	[2]

[1] Refer to equation (2.22).

[2] Refer to equation (2.25).

$$\left\{ \begin{aligned} &= (-1)^{i+j} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+2j+2} \sum_{s=n}^{N/2} \bar{c}_{2i+1} \left(\frac{s}{N}\right) \bar{c}_{2j+1} \left(\frac{s}{N}\right) \\ &\quad (i=j=0 \text{ の場合を除く}). \\ &\langle \bar{q}_i(x; n, N), \bar{q}_i(x; n, N) \rangle \\ &= \frac{2}{N} \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2 \sum_{s=n}^{N/2} \left\{ \bar{c}_1 \left(\frac{s}{N}\right) \right\}^2. \end{aligned} \right. \quad (2.25)$$

が成り立つ。

再び選点直交性についての吟味を行うと表1のようになる。

さて、式(2.13)における  $q_j(x; n)$  を  $\bar{q}_j(x; n, N)$  で置き換えると  $h(x)$  は

$$h(x) = \frac{1}{2} \bar{U}_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \bar{U}_j \cos jx + \bar{V}_j \sin jx \right\} + \sum_{j=1}^{2m} \bar{c}_j \bar{q}_j(x; n, N). \quad (2.26)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U}_j &= \bar{a}_j + \sum_{i=1}^m \bar{c}_{2i} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \bar{\delta}_{2i} \left(\frac{j}{N}\right), \\ \bar{V}_j &= \bar{b}_j + \sum_{i=0}^{m-1} \bar{c}_{2i+1} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+1} \bar{\delta}_{2i+1} \left(\frac{j}{N}\right). \end{aligned} \right. \quad (2.27)$$

と書き改められる。

残差二乗和

$$J = \langle f(x) - h(x), f(x) - h(x) \rangle. \quad (2.28)$$

を最小にするように  $\bar{U}_j : 0 \leq j \leq n-1$ ,  $\bar{V}_j : 1 \leq j \leq n-1$ ,  $\bar{c}_j : 1 \leq j \leq 2m$  を決める。そのために上式を、それぞれのパラメータで偏微分して零とおくと次のような正規方程式が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U}_j &= \bar{u}_j : 0 \leq j \leq n-1, \\ \bar{V}_j &= \bar{v}_j : 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned} \right. \quad (2.29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^m \phi_{2i, 2j} \bar{c}_{2j} &= w_{2i} : 1 \leq i \leq m, \\ \sum_{j=0}^{m-1} \phi_{2i+1, 2j+1} \bar{c}_{2j+1} &= w_{2i+1} : 0 \leq i \leq m-1. \end{aligned} \right. \quad (2.30)$$

ここで

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_{2i, 2j} &= \langle \bar{q}_{2i}(x; n, N), \bar{q}_{2j}(x; n, N) \rangle, \\ \phi_{2i+1, 2j+1} &= \langle \bar{q}_{2i+1}(x; n, N), \bar{q}_{2j+1}(x; n, N) \rangle, \\ w_{2i} &= \langle f(x), \bar{q}_{2i}(x; n, N) \rangle \\ &= (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \sum_{s=n}^{N/2} \bar{c}_{2i} \left(\frac{s}{N}\right) \cdot \bar{u}_i, \\ w_{2i+1} &= \langle f(x), \bar{q}_{2i+1}(x; n, N) \rangle \\ &= (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+1} \sum_{s=n}^{N/2} \bar{c}_{2i+1} \left(\frac{s}{N}\right) \cdot \bar{v}_i, \\ &\quad (i \neq 0), \\ w_1 &= \langle f(x), \bar{q}_1(x; n, N) \rangle \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{\pi n}{2} (f_N - f_0) - \frac{n}{N} \sum_{s=n}^{N/2} \bar{c}_1 \left(\frac{s}{N}\right) \cdot \bar{v}_1. \end{aligned} \right. \quad (2.31)$$

である。また、

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u}_j &= \langle f(x), \cos jx \rangle \\ &= \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N(1)} f(\bar{x}_r) \cos j\bar{x}_r : 0 \leq j \leq N/2, \\ \bar{v}_j &= \langle f(x), \sin jx \rangle \\ &= \frac{2}{N} \sum_{r=0}^N f(\bar{x}_r) \sin j\bar{x}_r : 1 \leq j \leq N/2-1. \end{aligned} \right. \quad (2.32)$$

は離散 Fourier 係数であり実 FFT により求められる量である。ただしここで

$$\sum_{r=0}^{N(1)} A(r) = \frac{1}{2} A(0) + \sum_{r=1}^{N-1} A(r) + \frac{1}{2} A(N). \quad (2.33)$$

である。

以上から、まず  $\bar{c}_j$  についての二つの  $m$  元連立一次方程式、式(2.30)を解き、次に式(2.29)および式(2.27)から  $\bar{a}_j$ ,  $\bar{b}_j$  を求めれば式(2.13)の形の複合多項式の係数が全部求まることになる。

最後に、式(2.13)の形での係数  $\bar{a}_j : 0 \leq j \leq n-1$ ,  $\bar{b}_j : 1 \leq j \leq n-1$ ,  $\bar{c}_j : 1 \leq j \leq 2m$  が求まったとき、等間隔離散点

$$x = \bar{x}_r = 2\pi r/L : 0 \leq r \leq L. \quad (2.34)$$

における  $h(x)$  の値を計算する方法を述べる。ただし、 $n < L/2$  であるとする。

式(2.13)に  $x = \bar{x}_r$  を代入し

$$h(\bar{x}_r) = \frac{1}{2} \bar{U}_0 + \sum_{j=1}^{L/2-1} \{ \bar{U}_j \cos j\bar{x}_r + \bar{V}_j \sin j\bar{x}_r \} + \frac{1}{2} \bar{U}_{L/2} \cos \frac{L}{2} \bar{x}_r. \quad (2.35)$$

とおくと式(2.17), (2.18)から

$$\bar{U}_j = \begin{cases} \bar{a}_j + \sum_{i=1}^m \bar{c}_{2i} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{L}\right)^{2i} \bar{\delta}_{2i} \left(\frac{j}{L}\right) & : 0 \leq j \leq n-1. \\ \sum_{i=1}^m \bar{c}_{2i} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{L}\right)^{2i} \bar{\tau}_{2i} \left(\frac{j}{L}\right) & : n \leq j \leq L/2. \end{cases} \quad (2.36)$$

および

$$\bar{V}_j = \begin{cases} \bar{b}_j + \sum_{i=0}^{m-1} \bar{c}_{2i+1} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{L}\right)^{2i+1} \bar{\delta}_{2i+1} \left(\frac{j}{L}\right) & : 1 \leq j \leq n-1. \\ \sum_{i=0}^{m-1} \bar{c}_{2i+1} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{L}\right)^{2i+1} \bar{\tau}_{2i+1} \left(\frac{j}{L}\right) & : n \leq j \leq L/2-1. \end{cases} \quad (2.37)$$

となる。式(2.36), (2.37)を使って  $\bar{U}_j : 0 \leq j \leq L/2$ ,  $\bar{V}_j : 1 \leq j \leq L/2-1$  を求め実逆 FFT を適用すれば  $h(\bar{x}_r) : 0 \leq r \leq L$  を一挙に求めることができる。ただし、特に

$$h(0+) = h(0) - \bar{c}_1 \frac{\pi n}{2}, \quad h(2\pi-) = h(2\pi) + \bar{c}_1 \frac{\pi n}{2}. \quad (2.38)$$

に注意する必要がある。

### 3. 計算法についての補足

第2章にて、等間隔離散点上で関数値が与えられたとき、複合多項式を使って元の関数を最小二乗近似するための計算法を述べた。本章では、この手法にもとづいて得られた量について、若干の注釈を加え、補足的な説明をする。

既に述べたように複合多項式が式(2.13)の形で与えられるときその係数  $\bar{a}_j : 0 \leq j \leq N/2$ ,  $\bar{b}_j : 1 \leq j \leq N/2-1$  は Fourier 係数の近似値を与え、 $\bar{c}_j : 1 \leq j \leq 2m$  は両端の  $j-1$  次微係数の差の定数倍の近似値を与える。

第2章で述べた計算法では残差二乗和、式(2.28)を最小にするように式(2.26)における係数を決めた。この結果、式(2.26)における係数  $\bar{U}_j : 0 \leq j \leq n-1$ ,  $\bar{V}_j : 1 \leq j \leq n-1$  は離散 Fourier 係数であることがわかった。したがって式(2.27)は離散 Fourier 係数と Fourier 係数との間に近似的に成り立つ式であると言える。式(2.27)を改めて

$$\begin{cases} \bar{a}_j = \bar{u}_j - \sum_{i=1}^m \bar{c}_{2i} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \bar{\delta}_{2i} \left(\frac{j}{N}\right). \\ \bar{b}_j = \bar{v}_j - \sum_{i=0}^{m-1} \bar{c}_{2i+1} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+1} \bar{\delta}_{2i+1} \left(\frac{j}{N}\right). \end{cases} \quad (3.1)$$

と書く。式(2.27)ではこの式は  $j \leq n-1$  に対しての関係式であったが  $n \leq j \leq N/2$  に対して適用しても差し支えないと思われる。離散 Fourier 係数は  $0 \leq j \leq N/2$  に対して求まっているのであるから、式(3.1)から  $0 \leq j \leq N/2$  に対する Fourier 係数の近似値が求まることになる。第5章における数値例はこれが妥当であることを示している。

式(2.26)における  $\bar{c}_j : 1 \leq j \leq 2m$  は正規方程式、式(2.30)を解くことにより求めるが、この正規方程式は残差二乗和、式(2.28)を最小にする条件から得られた。結果論であるが、式(2.30)とほとんど同じ形の式を次のように、別の解釈からも導くことができる。

式(2.36), (2.37)は離散 Fourier 係数と  $\bar{c}_j : 1 \leq j \leq 2m$  との関係を与えている。すなわち  $n \leq j \leq N/2$  に対して

$$\begin{cases} \bar{u}_j = \sum_{i=1}^m \bar{c}_{2i} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \bar{\tau}_{2i} \left(\frac{j}{N}\right). \\ \bar{v}_j = \sum_{i=0}^{m-1} \bar{c}_{2i+1} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+1} \bar{\tau}_{2i+1} \left(\frac{j}{N}\right). \end{cases} \quad (3.2)$$

が成り立つと考えられる。上式第一式の、両辺の差の二乗和

$$J_u = \sum_{j=n}^{N/2(3)} \left[ \bar{u}_j - \sum_{i=1}^m \bar{c}_{2i} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \bar{\tau}_{2i} \left(\frac{j}{N}\right) \right]^2. \quad (3.3)$$

を最小にするために  $J_u$  を  $\bar{c}_{2i} : 1 \leq i \leq m$  で偏微分して零とおくと式(2.30)の第一式が得られる。一方、式(3.2)第二式の両辺の差の二乗和を最小にするように  $\bar{c}_{2i+1} : 0 \leq i \leq m-1$  を決める方程式は式(2.30)の第二式と全く同じにはならない。しかし、その相違はわずかである。

### 4. 数値的安定性について

本章では、前章までに述べた計算法の数値的安定性について簡単に考察する。計算の手順を追いながら各段階での丸め誤差の発生状況を概観する。

係数を求めるための手順は次のようになる。

[1] FFT (高速 Fourier 変換) により離散 Fourier 係数  $\bar{u}_j : 0 \leq j \leq N/2$ ,  $\bar{v}_j : 1 \leq j \leq N/2-1$  を算出する。多くの文献で指摘されているようにこの段階では丸め誤差の累積は起こらない。

[2] 式(2.31)の第三、四、五式により  $w_i$  を計算する。この段階で、丸め誤差が拡大されるかどうかは

$$Y_i(s) = \left(\frac{n}{N}\right)^i \bar{\tau}_i \left(\frac{s}{N}\right) : n \leq s \leq N/2. \quad (4.1)$$

の大きさに依存する。もし、これらの値が1を大幅に越えるようなら丸め誤差が拡大される可能性がある。しかし次に述べるようにこれらの値は1を大きくは越えない。

まず、式(2.16)からわかるように

$$\bar{r}_i(x) \geq 0: 0 \leq x \leq 1/2. \tag{4.2}$$

である。また、

$$\bar{r}'_i(x) = (-i) \cdot \bar{r}_{i+1}(x) \leq 0. \tag{4.3}$$

である。すなわち  $\bar{r}_i(x)$  は単調減少関数である。したがって  $Y_i(n)$  が一番大きいのでこの値さえ評価すればよい。付録 A によればこの値は 2.47 を越えない。

以上から式(2.31)で得られる  $w_i$  には丸め誤差の累積は起こらないことがわかる。

[3] 式(2.31)の第一、二式を使って  $\phi_{i,j}$  を計算する。式(2.23)からわかるように同符号の数の加算であるからこの段階では、丸め誤差の累積は起こらない。

[4] 正規方程式、式(2.30)を解く。この段階が最も危険である。そこで、この計算の安定性の一つの尺度として式(2.30)の係数行列の条件数を、多くの  $N, n, 2m$  に対して計算した。行列のノルムとしては簡単のために一様ノルムを使った。その結果、条件数は  $N$  に大きくは依存せず、 $2m$  に大きく依存することがわかった。また、 $n$  にも依存するが  $1 \leq n \leq N/4$  では条件数は大きくは変わらないことがわかった。

連立一次方程式、式(2.30)第一式、第二式の係数行列をそれぞれ  $\phi_1, \phi_2$  とする。それぞれの条件数

$$\begin{cases} (ce) = \|\phi_1\| \cdot \|\phi_2^{-1}\| \\ (co) = \|\phi_2\| \cdot \|\phi_1^{-1}\| \end{cases} \tag{4.4}$$

を図1, 2に示す。図1は  $N=64$  に対する条件数であり、図2は  $N=2048$  に対する条件数である。どちらの図も左側が (ce) であり右側が (co) である。  $n$  を横

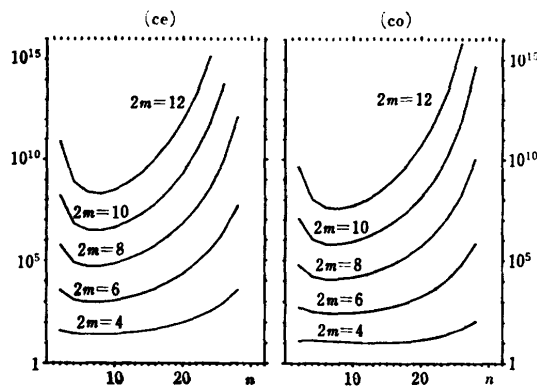


図1  $N=64$  に対する正規方程式の条件数  
Fig. 1 Condition numbers of normal equations for  $N=64$ .

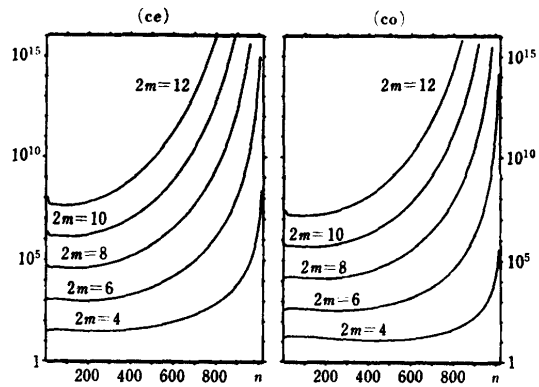


図2  $N=2048$  に対する正規方程式の条件数  
Fig. 2 Condition numbers of normal equations for  $N=2048$ .

軸にとっており左端は  $n=0$ , 右端は  $n=N/2$  である。縦軸は条件数の常用対数である。下端が0 (したがって1), 上端が16 (したがって  $10^{16}$ ) である。それぞれの図で曲線が5本あるが、それらは下から、それぞれ  $2m=4, 6, 8, 10, 12$  に対するものである。  $2m=2$  に対しては一元の方程式であるから条件数は1である。

これらの図から  $2m=2, 4, 6$  に対しては  $n$  を大きくしすぎなければ連立一次方程式の条件はよいと言える。  $2m=12$  程度になると条件が悪くなるので、  $n$  は大きくとも  $N/4$  以内にすべきであることがわかる。

[5] 式(3.1)により Fourier 係数の近似値  $\bar{a}_j: 0 \leq j \leq N/2, \bar{b}_j: 1 \leq j \leq N/2-1$  を算出する。この段階で丸めの誤差が拡大されるかどうかは

$$Z_i(j) = \left(\frac{n}{N}\right)^i \bar{\delta}_i\left(\frac{j}{N}\right): 0 \leq j \leq N/2. \tag{4.5}$$

の大きさに依存する。式(2.16)から

$$\begin{cases} 0 \leq -\bar{\delta}_{2i+1}(x) \leq 2^{2i+1} \\ 2\zeta(2i) \leq \bar{\delta}_{2i}(x) \leq 2^{2i} + 2\zeta\left(2i; \frac{3}{2}\right) \end{cases} \tag{4.6}$$

である。ここで

$$\zeta(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^i} \tag{4.7}$$

は Riemann の Zeta 関数であり

$$\zeta(i; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^i} \tag{4.8}$$

は一般化された Riemann の Zeta 関数である。

さて、式(4.5)において  $n \leq N/2$  である。したがって  $Z_i(j)$  は1を大幅に越えることはない。すなわちこの段階では丸め誤差の累積は起こらない。

以上からわかるように  $2m \leq 6$  程度なら本論文で提

案した計算法は数値的に極めて安定であると言える。また、倍精度計算なら  $2m=12$  程度でも十分に実用的であることがわかる。

次に等間隔離散点上で  $h(x)$  を計算するには、式(2.36), (2.37)を使って離散 Fourier 係数を計算し、それを使って実逆 FFT により式(2.35)を一挙に計算するのであるが、このどちらの計算においても丸め誤差の累積は生じない。

5. 数値例

第2, 3章で提案された方法を使って、次のような二つの計算をした。

5.1 この計算法によりどの程度の精度が得られるかを見るために一例として、Fourier 係数などの正確な値がわかる関数を使い次のような計算を行った。すなわち、

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 A_i \cos(\omega_i x + 2\pi\theta_i) : x \in [0, 2\pi]. \tag{5.1}$$

$i$	$A_i$	$\omega_i$	$\theta_i$
1	12.0	2.40	0.3
2	20.0	0.24	0.7
3	2.0	9.30	0.5

に対していくつかの量を計算した。

式(2.3)における  $N$  を、 $N=256$  とした。すなわち  $f(x)$  の等間隔離散点における、257個の関数値を与えてまず FFT 法により離散 Fourier 係数を計算し、それを使って正規方程式、式(2.29), (2.30)を解いた。この際、式(2.29)における  $n$ 、すなわち三角多項式部の次数 +1 を、 $n=64$  とした。また、多項式部の次数  $2m$  を、 $2m=2, 4, 6, 8, 10, 12$  と変えて計算した。次に正規方程式を解いて得られた  $c_i : 1 \leq i \leq 2m$  を使い、式(3.1)を使って  $f(x)$  に対する Fourier 係数の近似値  $\bar{a}_j : 0 \leq j \leq N/2, \bar{b}_j : 1 \leq j \leq N/2-1$  を計算した。

以上により得られたパラメータを使い、式(2.34)における  $L$  を、 $L=8 \cdot N=2048$  として式(2.35)で与えられる  $h(x_j)$  を計算した。図3, 4, 5にその結果を示す。計算には PC-9801 F2 (i8086, i8087) を使用しすべての計算を倍精度(仮数部2進53桁, MS-DOS V. 2.11, MS-FORTRAN V. 3.31)で行った。

図3上段は式(5.1)で与えられる  $f(x)$  の概形である。この関数については  $\|f\|_\infty \approx 27.5$  である。

図3下段は近似値  $h(x)$  の誤差である。すなわち、

各部分区間  $[\bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}] : 0 \leq r \leq 255$  を8等分しそれぞれの点で  $f(x) - h(x)$  を計算し、その最大絶対値をその区間の誤差として図示した。横軸は  $r$ 、縦軸は各区間の誤差の最大絶対値である。また、縦軸は対数目盛である。上から順に  $2m=2, 4, 6, 8, 10, 12$  に対する結果である。 $2m=10$  に対する曲線と  $2m=12$  に対する曲線とは、ほとんど重なってしまっている。いずれの場合も両端付近で特に誤差が大きいことおよび、多項式部の次数  $2m$  が大きくなるにつれて誤差は急激に小さくなることがわかる。 $2m=12$  に対する結果には丸め誤差の影響が著しく現れている。

図4は式(3.1)で与えられる  $\bar{a}_j, \bar{b}_j$  に関する結果で

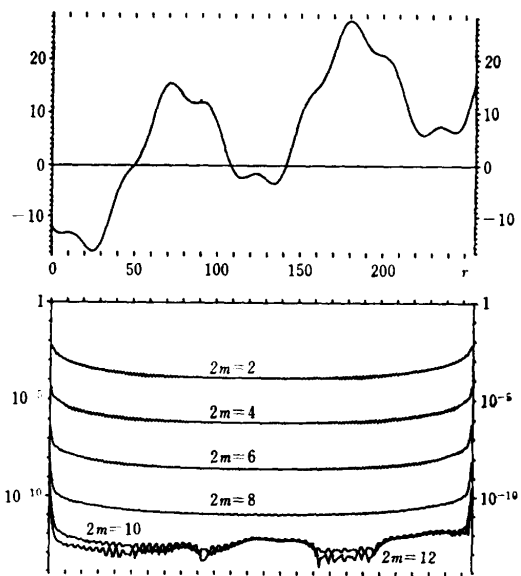


図3 数値例に使用した関数(上段)および  $h(x)$  の誤差(下段)  
Fig. 3 Test function (upper tiers) and errors of  $h(x)$  (lower tiers).

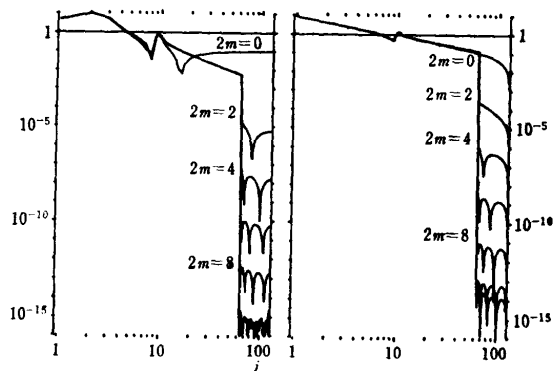


図4  $|\bar{a}_j|, |\bar{a}_j|$ (左側) および  $|\bar{b}_j|, |\bar{b}_j|$ (右側)  
Fig. 4  $|\bar{a}_j|, |\bar{a}_j|$ (left side) and  $|\bar{b}_j|, |\bar{b}_j|$ (right side).

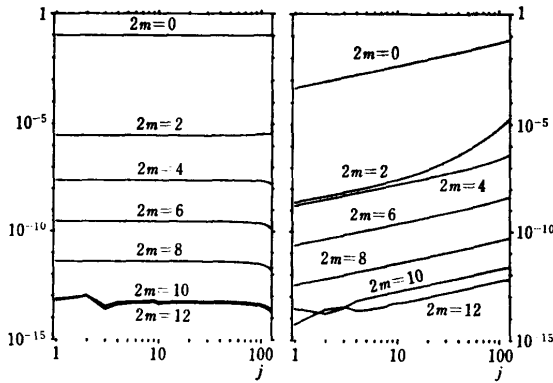


図5  $|\bar{a}_j - a_j(f)|$  (左側) および  $|\bar{b}_j - b_j(f)|$  (右側)  
Fig. 5  $|\bar{a}_j - a_j(f)|$  (left side) and  $|\bar{b}_j - b_j(f)|$  (right side).

ある。横軸、縦軸共に対数目盛である。j を横軸にとっている。1 ≤ j ≤ 63 に対しては  $|\bar{a}_j|$ ,  $|\bar{b}_j|$  を図示し、64 ≤ j ≤ 128 に対しては、

$$\begin{cases} \bar{a}_j = \bar{u}_j - \sum_{i=1}^m \bar{c}_{2i} (-1)^{i-1} \left(\frac{n}{N}\right)^{2i} \bar{v}_{2i} \left(\frac{j}{N}\right), \\ \bar{b}_j = \bar{v}_j - \sum_{i=0}^{m-1} \bar{c}_{2i+1} (-1)^i \left(\frac{n}{N}\right)^{2i+1} \bar{v}_{2i+1} \left(\frac{j}{N}\right). \end{cases} \quad (5.2)$$

の絶対値を図示している。図の左側が  $|\bar{a}_j|$ ,  $|\bar{a}_j|$  であり右側が  $|\bar{b}_j|$ ,  $|\bar{b}_j|$  である。どちらの図も上から順に 2m = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 に対する変化である。2m = 10 と 2m = 12 の曲線とはほとんど重なってしまっている。最上段の 2m = 0 に対する曲線は離散 Fourier 係数  $\bar{u}_j$ ,  $\bar{v}_j$  の変化である。第3章で述べたことからわかるように  $\bar{a}_j$ ,  $\bar{b}_j$  は零に近いはずである。実際これらの図から 2m が大きくなるにつれて  $\bar{a}_j$ ,  $\bar{b}_j$  が零に近くなる様子がわかる。

図5は式(3.1)を使って計算した  $\bar{a}_j$ ,  $\bar{b}_j$  の、Fourier 係数に対する誤差の絶対値である。横軸、縦軸共に対数目盛で、j を横軸にとって図示している。上から順に 2m = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 に対する誤差の変化である。左側の図が  $\bar{a}_j$  の誤差であり、右側の図が  $\bar{b}_j$  の誤差である。最上段の 2m = 0 に対する曲線は離散 Fourier 係数の誤差である。この図からわかるように、本論文で述べた手法は高精度の Fourier 係数の近似値を得るのに極めて有用である。

5.2 本論文で提案された手法は最小二乗法であるから与えられたデータが誤差を含む場合であっても適用できる。一例として図6に示すような175個 (N = 174) の、わずかなノイズを含むデータに対してこの方法を適用してみた。  $\max_{0 \leq r \leq 174} |f_r| \approx 3.5$  である。す

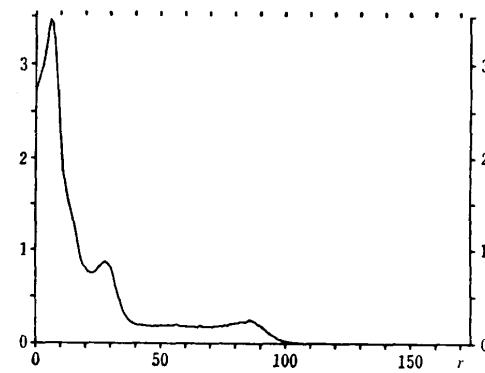


図6 数値例に使用したデータ  $f(\bar{x}_r)$   
Fig. 6 Test data  $f(\bar{x}_r)$ .

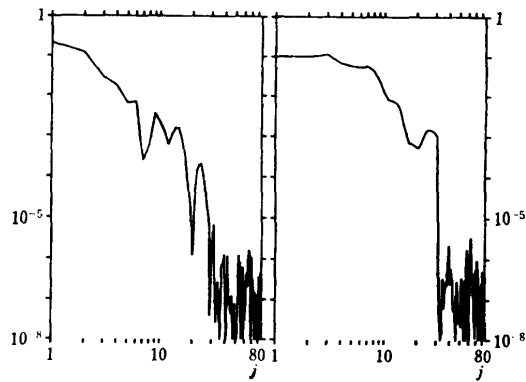


図7  $|\bar{a}_j|$ ,  $|\bar{a}_j|$  (左側) および  $|\bar{b}_j|$ ,  $|\bar{b}_j|$  (右側)  
Fig. 7  $|\bar{a}_j|$ ,  $|\bar{a}_j|$  (left side) and  $|\bar{b}_j|$ ,  $|\bar{b}_j|$  (right side).

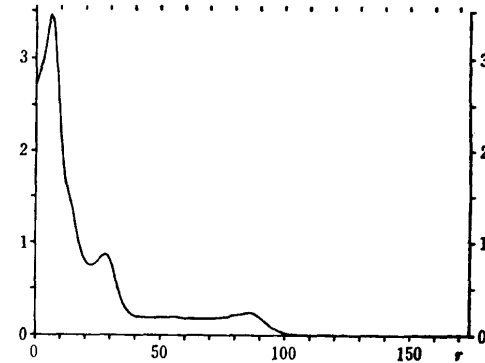


図8 得られた近似値  $h(x)$   
Fig. 8 Approximation  $h(x)$  obtained.

べての計算を単精度 (仮数部、2進24桁) で行った以外は5.1節の計算環境と同じである。

n = 32, 2m = 6 として計算した  $\bar{a}_j$ ,  $\bar{b}_j$ : 1 ≤ j ≤ 31 および  $\bar{a}_j$ ,  $\bar{b}_j$ : 32 ≤ j ≤ 87 を図7に示す。図7は横軸、縦軸共に対数目盛で、j を横軸にとっている。図8は近似値  $h(x)$  を図示しており、図9は残差  $f_r - h(\bar{x}_r)$  を図示している。残差は -0.02 と 0.02 との間



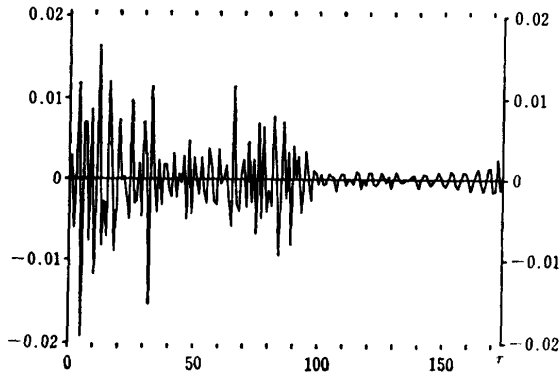


図 9 残差  $f(\bar{x}_r) - h(\bar{x}_r)$   
Fig. 9 Residuals  $f(\bar{x}_r) - h(\bar{x}_r)$ .

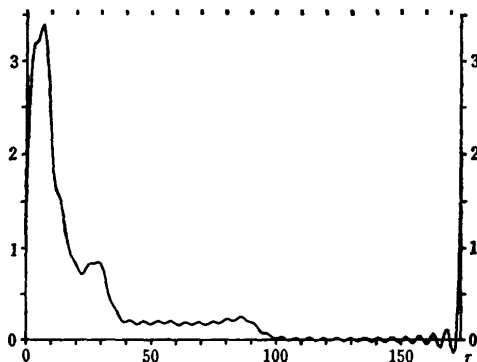


図 10 三角多項式による近似値  $t(x)$   
Fig. 10 Approximation  $t(x)$  by a trigonometric polynomial.

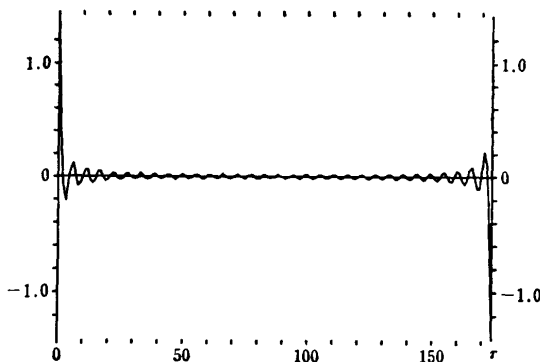


図 11 三角多項式による近似値の残差  $f(\bar{x}_r) - t(\bar{x})$   
Fig. 11 Residuals  $f(\bar{x}_r) - t(\bar{x})$  approximated by trigonometric polynomials.

に収まっており元のデータをうまく近似している。

比較のために  $2m=0$  すなわち三角多項式による近似の結果を図 10, 図 11 に示す。ただし  $n=32$  である。図 10 は近似値  $t(x)$  であり, 図 11 は残差である。図 11 の縦軸は  $-1.40$  から  $1.40$  であり残差の最大絶対値は約  $1.39$  である。図 8 と図 10 とを比較するとわ

かるように複合多項式近似では“Gibbs の現象”は発生しない。

## 6. おわりに

本論文の標題は, 本来は“複合多項式による曲線のあてはめ”とすべきであったかもしれない。実際, この方法はノイズを持つデータをあてはめるための計算法である。しかし, “曲線のあてはめ”という言葉からはごく低精度の近似法を想像してしまう。数値例からわかるように本論文で提案した方法は高精度の近似法である。特に Fourier 係数の近似値を得るには極めて優れた方法であると思われる。そこで標題を“最小二乗近似”とした。

高精度の近似法であるにもかかわらずノイズのあるデータに対して適用しても数値的に不安定になるわけではない。それは, この方法が補間法ではなく最小二乗近似法だからである。

なお, 本方法は多項式による最小二乗近似法などに比較すると計算量が多く, また, データが等間隔で与えられていなければならないこと, 効率的に適用できるのはデータ個数を  $N+1$  としたとき,  $N$  が 2 のべき乗でなければならないこと, など多くの制約がある。したがって, たとえば 3 次式程度の多項式で満足し得る結果が得られるような応用には不適切である。

$N+1$  個のデータが与えられたとき, 三角多項式部の次数  $n-1$ , および多項式部の次数  $2m$  をどのように選ぶべきかは重要な問題である。現在, この方法の誤差解析を検討しているのでその結果と併せてパラメータの個数をどのように選ぶべきかを報告したいと考えている。

謝辞 ご指導頂いた中部大学, 二宮市三教授, 原稿に目を通し適切な御指摘を頂いた名古屋大学, 鳥居達生教授, 議論して頂いた中京大学, 秦野甯世教授に深く感謝します。

## 参考文献

- 1) Ralston, A. and Rabinowitz, P.: *A First Course in Numerical Analysis*, second ed., p. 556, McGraw-Hill (1978). (邦訳がある。戸田英雄, 小野令美: 電子計算機のための数値解析の理論と応用, <上>, <下>, プレイン図書出版, 東京 (1986)).
- 2) Hamming, R. W.: *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, second ed., p. 721, McGraw-Hill, Kogakusha (1973).
- 3) Abramowitz, M. and Stegun, I. (ed.): *Hand-*

*book of Mathematical Functions*, 10th ed., p. 1046, Dover Publication Inc., New York (1972).

- 4) 秦野和郎, 秦野甯世, 二宮市三: 複合多項式による関数近似, 情報処理学会論文誌, Vol. 23, No. 6, pp. 617-624 (1982).
- 5) 秦野甯世, 秦野和郎, 二宮市三: 端補正を伴う三角多項式による曲線のあてはめ, 第21回情報処理学会全国大会論文集, 7G-6, pp. 945-946 (1980).
- 6) 秦野甯世, 秦野和郎, 二宮市三: 複合多項式による離散近似, 第22回情報処理学会全国大会論文集, 2F-5, pp. 799-800 (1981).

#### 付録A $x^i \bar{r}_i(x) : x \in [0, 1/2]$ の上限について

ここでは

$$t_i(x) = x^i \bar{r}_i(x) : x \in [0, 1/2]. \quad (\text{A.1})$$

が1を大きく越えないことを示す。

まず  $\bar{r}_i(x)$  は  $\pi \cot \pi x$  の部分分数展開である<sup>3)</sup>。したがって

$$x \bar{r}_1(x) = \pi x \cdot \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} \leq 1. \quad (\text{A.2})$$

である。次に  $i \geq 2$  として

$$\begin{aligned} x^i \bar{r}_i(x) &= x^i \left[ 1/x^i + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(k+x)^i} + \frac{(-1)^i}{(k-x)^i} \right\} \right] \\ &\leq x^i \left[ 1/x^i + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(k+x)^i} + \frac{1}{(k-x)^i} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{x}{k-x} \right)^i + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{x}{k+x} \right)^i. \quad (\text{A.3})$$

である。ここで

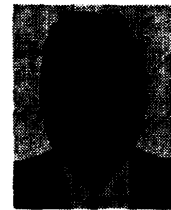
$$\frac{x}{k-x} \leq \frac{1}{2k-1}, \quad \frac{x}{k+x} \leq \frac{1}{2k+1}. \quad (\text{A.4})$$

であることを使うと

$$\begin{aligned} x^i \bar{r}_i(x) &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^i} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^i} \\ &= \frac{2}{2^i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1/2)^i} = \frac{1}{2^{i-1}} \zeta(i; 1/2). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となる。この評価によれば  $x^i \bar{r}_i(x)$  の上限は  $i=2$  のとき最大でその値は 2.47 程度である。

(昭和63年7月1日受付)  
(平成元年4月11日採録)



秦野 和郎 (正会員)

昭和16年生。昭和39年名古屋大学工学部電気学科卒業。(株)日立製作所を経て昭和43年名古屋大学大学院工学研究科修士課程電気工学専攻課程修了。名古屋大学大型計算機センター, 福井大学工学部情報工学科を経て現在, 愛知工業大学電子工学科教授。工学博士。数値計算に興味を持っている。電気学会, 電子情報通信学会各会員。